Mécanique 4A OMI3 Automne 2020

# Corrigé de l'examen du 12 Janvier 2021

*Ce corrigé renvoie à des références du cours et des TD qui ont ont été réactualisés en date du 1er février 2021 ; prière de consulter la dernière version disponible sur* `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

**Correction de l'exercice 1.**

(1) Voir question 1 de l'exercice 2.

(2) Voir exercice 3.

**Correction de l'exercice 2.**
Le résultat de cet exercice sera généralisé dans l'exercice 3 page 4.

(1) On considère la fonction $f$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z}{1+z^4}. \tag{1}$$

Les pôles de $f$ sont les zéros du dénominateur ; on cherche donc les $z$ complexes tels que

$$1 + z^4 = 0. \tag{2}$$

Pour cela, on détermine une solution particulière de (2), en posant par exemple

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}},$$

puisque

$$z_0^4 = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^4 = e^{i\pi} = -1.$$

On cherche alors classiquement les solutions $z$ de (2) sous la forme

$$Z = zz_0,$$

ce qui donne

$$Z^4 = (zz_0)^4 = z^4 z_0^4 = -1,$$

et donc, puisque $z_0^4 = -1$, on a

$$z^4 = 1,$$

ce qui nous montre que $z$ est une racine quatrième de l'unité, donc dans l'ensemble $\{1, i, -1, -i\}$, ce qui nous donne :

$$\text{les pôles de } f \text{ sont les nombres complexes } \{z_0, z_1 = iz_0, z_2 = -z_0, z_3 = -iz_0\} \text{ où } z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}, \tag{3}$$

ce qui est encore équivalent à

$$\text{les pôles de } f \text{ sont les nombres complexes } z_k = e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{ik\pi}{2}}, \text{ pour } k \in \{0,1,2,3\}. \tag{4}$$

Dans le plan complexe, ce sont donc les images du point

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}},$$

sur le cercle trigonométrique, de module $\pi/4$, par l'identité et les trois rotations, d'angles $\pi/2$, $\pi$ et $3\pi/2$ de centre 0.

Voir la figure 1.

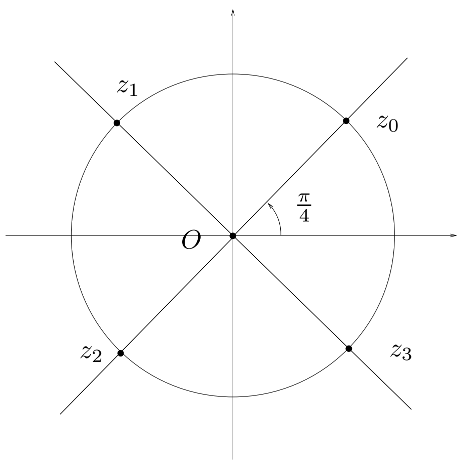


FIGURE 1. Les pôles $z_0$, $z_1$, $z_2$ et $z_3$ de $f$.

(2) Si on applique la proposition 5.8 page 56 du cours à la fonction $f$ donnée par (1), on aura

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{1+x^4} dx = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, z_k),$$

où la somme est étendue aux pôles de $f$ situés au dessus de l'axe des $x$. Or, la fonction $\frac{x}{1+x^4}$ est impaire et l'intégrale ci-dessus est toujours nulle, par symétrie. On a donc

$$0 = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, z_k),$$

ce qui ne nous fournit pas la valeur de l'intégrale donnée par

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx. \tag{5}$$

(3) La technique utilisée ci-dessous est proche de celle de l'annexe G page 201 du cours.

(a)

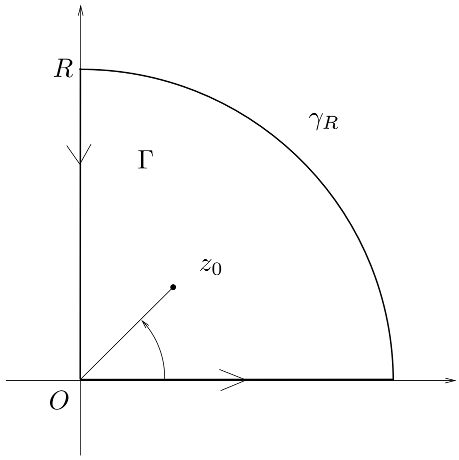


FIGURE 2. Le chemin $\Gamma$ considéré et l'unique pôle $z_0$ de $f$ à l'intérieur de $\Gamma$.

Pour $R > 0$ assez grand, le seul pôle de $f$ à l'intérieur de $\Gamma$ est $z_0$, comme le montre la figure 2 page précédente. Le théorème 3.37 page 41 du cours appliquée à la fonction $f$ sur le chemin $\Gamma$ à $R > 0$ donne :

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, z_k), \tag{6}$$

où la somme est étendue aux pôles de $f$ situés à l'intérieur de $\gamma$. Ici, le seul pôle est $z_0$ d'ordre un, car le polynôme $z^4+1$ est égal à $(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$. On a donc, d'après le lemme 3.39 page 43 du cours :

$$\begin{aligned}
2i\pi \sum_k \text{Rés}(f, \alpha_k) &= 2i\pi\, \text{Rés}(f, z_0), \\
&= 2i\pi \frac{z_0}{\left[1+z^4\right]'_{z=z_0}}, \\
&= 2i\pi \frac{z_0}{\left[4z^3\right]'_{z=z_0}}, \\
&= 2i\pi \frac{z_0}{4z_0^3}, \\
&= \frac{i\pi}{2}\frac{1}{z_0^2}, \\
&= \frac{i\pi}{2} z_0^{-2}, \\
&= \frac{i\pi}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{-2}, \\
&= \frac{i\pi}{2} e^{\frac{-2i\pi}{4}}, \\
&= \frac{i\pi}{2} e^{\frac{-i\pi}{2}}, \\
&= \frac{i\pi}{2}\frac{1}{i},
\end{aligned}$$

et donc

$$\int_\Gamma f(z)dz = \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Décomposons maintenant l'intégrale de gauche de (7) en deux trois terme, chacun correspondant à à l'arc de cercles de centre l'origine $O$ et de rayon et des deux segments inclus respectivement sur l'axe des $x$ et l'axe des $y$ comme le montre la figure 2 page ci-contre. Le premier segment, inclus dans l'axe des $x$, est paramétré par

$$z = \gamma(t), \text{ où } \gamma(t) = t \text{ avec } t \in [0, R], \tag{8}$$

le second, inclus dans l'axe des $y$ est paramétré par

$$z = \gamma(t), \text{ où } \gamma(t) = it \text{ avec } t \in [R, 0]. \tag{9}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)dz &= \int_0^R f(t)dt + \int_R^0 f(it)idt + \int_{\Gamma_R} f(z)dz, \\
&= \int_0^R \frac{t}{t^4+1}dt - i\int_0^R \frac{it}{(it)^4+1}dt + \int_{\Gamma_R} f(z)dz, \\
&= \int_0^R \frac{t}{t^4+1}dt + \int_0^R \frac{t}{i^4t^4+1}dt + \int_{\Gamma_R} f(z)dz,
\end{aligned}$$

et donc, d'après (7),

$$\int_0^R \frac{t}{t^4+1}dt + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi}{4}. \tag{10}$$

(b) Démontrons la formule suivante, donnée dans l'énoncé :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0. \tag{11}$$

Elle provient du lemme 5.6 page 55 du cours, de Jordan appliqué à $z_0 = 0$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $z_0 = 0$ et $R_0 = +\infty$. L'égalité (5.13) du cours a lieu, puisque, quand $|z|$ tend vers l'infini :

$$|zf(z)| = \left|\frac{z^2}{z^4+1}\right| \sim \left|\frac{z^2}{z^4}\right| = \frac{1}{|z|^2},$$

tend vers zéro. On en déduit (11). De (10), on déduit donc en faisant tendre $R$ vers l'infini :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{4}. \tag{12}$$

(4) De façon générale, pour intégrer ce type de fonctions, il faut décomposer en éléments simples et appliquer les techniques présentées par exemple dans [Bas19, l'annexe intitulée "Quelques calculs de primitives"]. Mais, ici, il est très rapide de procéder ainsi : Faisons le changement de variable $u = x^2$ qui donne $du = 2xdx$ et donc

$$\int \frac{x}{x^4+1}dx = \int \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(u) = \frac{1}{2}\arctan(x^2),$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\left(\arctan(+\infty) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2},$$

ce qui permet de retrouver (12).

**Correction de l'exercice 3.**

Le résultat de cet exercice constitue une généralisation du résultat de l'exercice 2 page 1.

(1) On considère la fonction $f$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^q}{1+z^p}. \tag{13}$$

Les pôles de $f$ sont les zéros du dénominateur ; on cherche donc les $z$ complexes tels que

$$1 + z^p = 0. \tag{14}$$

Pour cela, on détermine une solution particulière de (14), en posant par exemple

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{p}},$$

puisque

$$z_0^p = \left(e^{\frac{i\pi}{p}}\right)^p = e^{i\pi} = -1.$$

On cherche alors classiquement les solutions $z$ de (14), sous la forme

$$Z = zz_0,$$

ce qui donne

$$Z^p = (zz_0)^p = z^p z_0^p = -1,$$

et donc, puisque $z_0^p = -1$, on a

$$z^p = 1,$$

ce qui nous montre que $z$ est une racine$p$-ième de l'unité, donc dans l'ensemble

$$U_p = \left\{ e^{\frac{2ki\pi}{p}}, \quad k \in \{0, ..., p-1\} \right\} \tag{15}$$

et donc

$$\text{les pôles de } f \text{ sont les nombres complexes } \{z_k\}_{0 \leq k \leq p-1} \text{ où } z_k = e^{\frac{2ki\pi}{p}} e^{\frac{i\pi}{p}}, \tag{16}$$

ce qui est encore équivalent à

$$\text{les pôles de } f \text{ sont les nombres complexes } z_k = e^{\frac{(1+2k)i\pi}{p}}, \text{ pour } k \in \{0, ..., p-1\}. \tag{17}$$

Dans le plan complexe, ce sont donc les images du point

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{p}},$$

sur le cercle trigonométrique, d'argument $\pi/p$, par l'identité et les $p-1$ rotations, d'angles $\frac{(1+2k)\pi}{p}$, pour $k \in \{1, ..., p-1\}$.

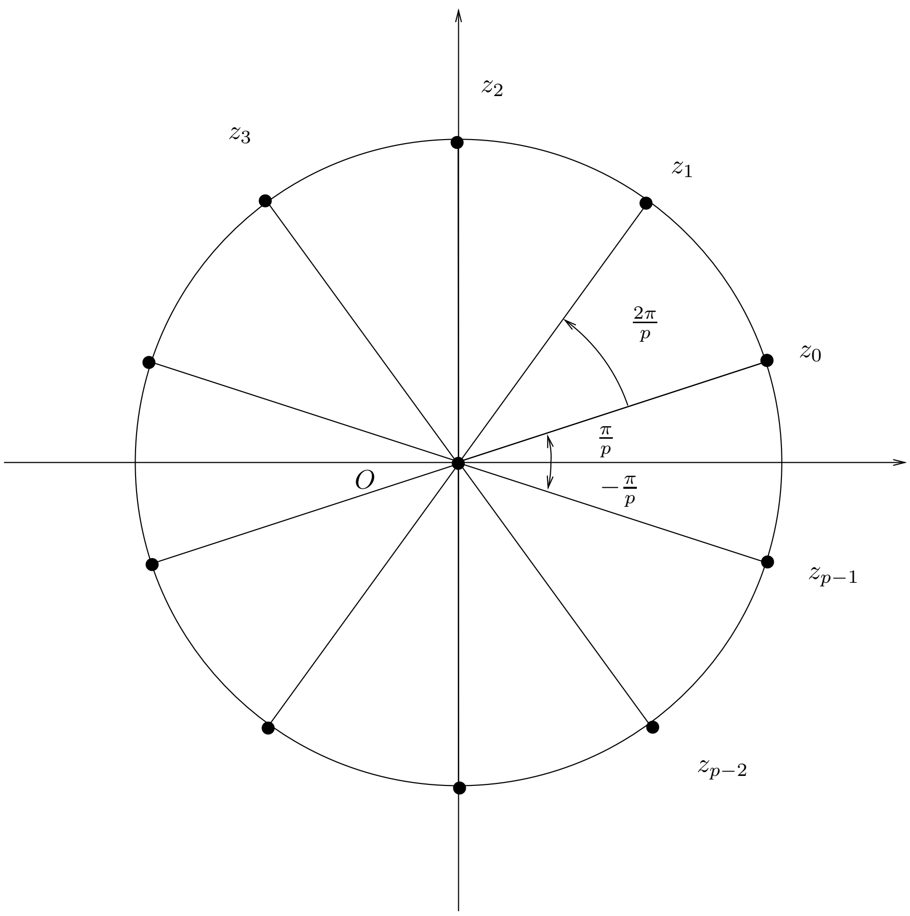


FIGURE 3. Les pôles $\{z_k\}_{0 \leq k \leq p-1}$ de $f$.

Voir la figure 3.

(2) Avant de répondre à la question, déterminons les pôles réels de $f$, avec deux cas, selon la parité de $p$.

— Premier cas : $p$ est pair. On a alors, pour tout $x$ réel, $x^p \geq 0$ et donc, $x^p + 1 \geq 1 > 0$. Le dénominateur de $f$ n'est donc jamais nul pour $x$ réel et $f$ n'a donc pas de pôle réel.

— Second cas : $p$ est impair. Puisque $p \geq 2$, on a donc $p = 2q + 1$ avec $q \geq 1$. Parmi les pôles de $f$, donnés par (17), considérons $k = q$. Il est clair que $k \geq 1$ et que $k \leq p - 1$, ce qui est équivalent à $q \leq 2q$, ce qui est vrai. Pour ce $k = q$, on a

$$z_q = e^{\frac{(1+2q)i\pi}{2q+1}} = e^{i\pi} = -1,$$

et donc $z_q = -1$ est un unique pôle réel de $f$. On vérifie que c'est l'unique pôle réel de $f$.

Bref,

$$\text{Si } p \text{ est pair, } f \text{ n'a aucun pôle réel.} \tag{18a}$$

$$\text{Si } p \text{ est impair, } f \text{ a un unique pôle réel (égal à } -1\text{).} \tag{18b}$$

$$\tag{18c}$$

Ainsi, si $p$ est impair, on ne peut appliquer la proposition 5.8 page 56 à la fonction $f$.

Examinons, ce qui se passe si $p$ est pair. Si $q$ est impair, et si on applique la proposition 5.8 page 56 du cours à la fonction $f$ donnée par (13), on aura

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} dx, \frac{x^q}{1+x^p} dx = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k),$$

où la somme est étendue aux pôles de $f$ situés au dessus de l'axe des $x$. Or, la fonction $\frac{x^q}{1+x^p}$ est impaire et l'intégrale ci-dessus est toujours nulle, par symétrie. On a donc

$$0 = 2i\pi \sum_k \text{Rés}(\mathcal{R}, \alpha_k),$$

ce qui ne nous fournit pas la valeur de l'intégrale donnée par

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx. \tag{19}$$

Si $q$ est pair, l'application de la proposition 5.8 page 56 à la fonction $f$ est techniquement possible, mais nous verrons ici que la variante présenté sera plus rapide.

*La suite de cette correction est partiellement rédigée. Voir rédaction provisoire sur* `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/OMI3/complementmanuscrits/01.pdf`

(3)

(a) Le choix du chemin est proche de celui utilisé dans l'annexe H.

(b) On obtient

$$J = \frac{\pi}{p \sin\left(\frac{\pi(q+1)}{p}\right)}. \tag{20}$$

*Remarque* 1. Cela est confirmé par matlab : si on tape

```
syms p q x;
f=x^q/(1+x^p);
int(f,x)
simple(int(f,x,0,inf))
```

On obtient

$$\int f(x)dx = x^{q+1} \mathit{hypergeom}\left([1, \frac{q}{p} + p^{-1}], [1 + \frac{q}{p} + p^{-1}], -x^p\right) p^{-1} \left(\frac{q}{p} + p^{-1}\right)^{-1},$$

et

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \pi \left(\sin\left(\frac{\pi\ (q+1)}{p}\right)\right)^{-1} p^{-1}.$$

*Attention, cela ne fonctionne que sous Matlab 2007 !* Pour la version 2019, on ne pourra obtenir par exemple que

```
syms x;
f=x^2/(1+x^9);
int(f,x)
simplify(int(f,x,0,inf))
```

On obtient

$$\int f(x)dx = 1/9\ \ln\left(1+x^3\right) - 1/18\ \ln\left(x^6-x^3+1\right) + 1/9\sqrt{3}\arctan\left(1/3\ \left(2\,x^3-1\right)\sqrt{3}\right),$$

et

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{2}{27}\,\pi\,\sqrt{3}.$$

ou bien

```
syms x;
f=sqrt(x)/(1+x^9);
int(f,x)
simplify(int(f,x,0,inf))
```

On obtient

$$\int f(x)dx = 2/9\ \arctan\left(x^{3/2}\right) + 1/18\sqrt{3}\ln\left(x^3+\sqrt{3}x^{3/2}+1\right) + 1/9\ \arctan\left(2\,x^{3/2}+\sqrt{3}\right) - 1/18\sqrt{3}\ln\left(x^3-\sqrt{3}x^{3/2}+1\right) + 1/9\ \arctan\left(2\,x^{3/2}-\sqrt{}\right.$$

et

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2/9\,\pi.$$

♢

(c) La valeur de $J$ pour $q=0$ et $p=3$ est donnée par

$$J = \frac{\pi}{3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\pi}{3\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

soit

$$J = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

(d) La valeur de $J$ pour $q=1$ et $p=4$ est donnée par

$$J = \frac{\pi}{4\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{4\sin(\pi/2)} = \frac{\pi}{4},$$

et on retrouve donc le résultat (12).

(4) Il faudrait utiliser les techniques d'intégration des fractions rationnelles, présentées par exemple dans [Bas19, l'annexe intitulée "Quelques calculs de primitives"].

*Remarque* 2. D'après la remarque 1, matlab sait d'une certaine façon intégrer $f$.

♢

(5) (a) Le choix du chemin est proche de ceux utilisés à la fois dans l'annexe G et dans l'annexe H.

$$p > q+1, \tag{21a}$$
$$q \geq 0. \tag{21b}$$

Et donc, les calculs de cet exercice sont encore valables si par $p$ est un entier et $q$ réel vérifient (21).

*Remarque* 3. D'après la remarque 1, matlab connaît ces résultats pour tout $p$ et $q$.

♢

(b) La valeur de

$$J=\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^p}dx$$

est donné par (20) avec $q=1/2$, c'est-à-dire :

$$J=\frac{\pi}{p\sin\left(\frac{\pi(q+1)}{p}\right)}.$$

soit encore

$$J=\frac{\pi}{p\sin\left(\frac{3\pi}{2p}\right)},$$

*Remarque* 4. Cela est confirmé par matlab (2007) : On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^q}dx=\pi\ \csc\left(3/2\,\frac{\pi}{p}\right)p^{-1},$$

où $\csc(y)=1/\sin(y)$.

$\diamondsuit$

(6) (a)

$$p>q+1, \tag{22a}$$

$$q>-1. \tag{22b}$$

Et donc, les calculs de cet exercice sont encore valables si par $p$ est un entier et $q$ réel vérifient (22). Remarquons que la condition nécessaire et suffisante constitue aussi une condition nécessaire pour que l'intégrale

$$J=\int_0^{+\infty} f(x)dx, \tag{23}$$

converge. En effet, sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ est strictement positive et on a

$$\text{quand } x \text{ tend vers zéro} : f(x)\sim x^q, \tag{24a}$$

$$\text{quand } x \text{ tend vers } +\infty : f(x)\sim x^{q-p}, \tag{24b}$$

Pour l'intégrabilité de $f$ en zéro, d'après le critère de Rieman, il faut et il suffit que $q+1>0$ ce qui donne (22b). Pour l'intégrabilité de $f$ en $+\infty$, d'après le critère de Rieman, il faut et il suffit que $q-p+1<0$ ce qui donne $p>q+1$ et donc (22a).

(b) La valeur de

$$J=\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^p)}dx,$$

est donnée par (20) avec $q=-1/2$, c'est-à-dire :

$$J=\frac{\pi}{p\sin\left(\frac{\pi(q+1)}{p}\right)}.$$

soit encore

$$J=\frac{\pi}{p\sin\left(\frac{\pi}{2p}\right)},$$

*Remarque* 5. Cela est confirmé par matlab (2007) : On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^q}dx=\pi\ \csc\left(1/2\,\frac{\pi}{p}\right)p^{-1},$$

où $\csc(y)=1/\sin(y)$.

$\diamondsuit$

**Correction de l'exercice 4.**

(1) Voir question 3(a)i page suivante de l'exercice 5.

(2) Voir question 3(b)i page 13 de l'exercice 5.

**Correction de l'exercice 5.**

(1) On renvoie à la correction de la question 1 de l'exerice de TD 6.4.

(2) (a) Rappelons les résultats obtenus dans la question 1 : dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$(x-a)\delta_a = 0, \tag{25a}$$

$$(x-a)\delta'_a = -\delta_a. \tag{25b}$$

Dans tout cet exercice, nous considérons les multiplications de fonction indéfiniment dérivables (ici des polynômes) pour les dérivées successives du dirac. On renvoie à l'exemple 6.46 page 102 et à la définition 6.47 page 102 du cours.

Si on dérive (25b), on a dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$((x-a)\delta'_a)' = -\delta'_a,$$

et donc, grâce à la proposition 6.51 page 103 du cours on obtient

$$(x-a)'\delta'_a + (x-a)\delta''_a = -\delta'_a,$$

soit encore

$$\delta'_a + (x-a)\delta''_a = -\delta'_a,$$

ce qui donne

$$(x-a)\delta''_a = -2\delta'_a. \tag{26}$$

On recommence encore une fois en redérivant (26), ce qui donne de la même façon

$$((x-a)\delta''_a)' = -2\delta''_a.$$

et donc

$$(x-a)'\delta''_a + (x-a)\delta'''_a = -2\delta''_a.$$

et donc

$$\delta''_a + (x-a)\delta'''_a = -2\delta''_a.$$

ce qui donne finalement

$$(x-a)\delta'''_a = -3\delta''_a. \tag{27}$$

(b) On itére encore et on généralise en montrant par récurrence sur $n$ que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (x-a)\delta_a^{(n)} = -n\delta_a^{(n-1)}. \tag{28}$$

où rappelle que $T^{(n)}$ désigne la dérivée $n$-ième de la distribution $T$.

Pour $n=1$, ce n'est autre que (25b). On rappelle aussi que par convention, la dérivée zero-ième vaut l'identité, autrement dit pour tout distribution $T$

$$T^{(0)} = T. \tag{29}$$

On suppose maintenant (28) vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné et on montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On procède comme dans question 2a : on dérive (28) écrite pour $n$, ce qui donne

$$\Big((x-a)\delta_a^{(n)}\Big)' = -n\Big(\delta_a^{(n-1)}\Big)',$$

ce qui donne

$$(x-a)'\delta_a^{(n)} + (x-a)\Big(\delta_a^{(n)}\Big)' = -n\delta_a^{(n)},$$

ce qui fournit

$$\delta_a^{(n)} + (x-a)\delta_a^{(n+1)} = -n\delta_a^{(n)},$$

et donc

$$(x-a)\delta_a^{(n+1)} = -(n+1)\delta_a^{(n)},$$

ce qui n'est autre que (28) au rang $n+1$.

(3) (a) (i)

*Remarque* 6. La formule de Leibniz est une formule permettant de calculer la dérivée d'ordre $n$ d'un produit de deux fonctions. Elle est analogue à la formule du binôme de Newton pour calculer une puissance d'ordre $n$ d'une somme de deux termes. Sa preuve en est l'analogue exacte, que l'on rappelle ici :

On cherche à vérifier que la propriété

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

est vraie par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour tout couple [1] $\{(a,b)\} \in \mathbb{R}^2$.

— Initialisation : Si $n=0$, on a $(a+b)^0 = 1$ et $\binom{0}{0}a^0b^0 = 1$ et la propriété est donc bien initialisée.
— Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang $n$. On a alors successivement

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n,$$

et d'après la propriété au rang $n$ :

$$\begin{aligned}
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},\\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} aa^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k bb^{n-k},\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k},
\end{aligned}$$

1. En fait, elle est vraie dans tout anneau $(A,+,\times)$ commutatif où l'on note $ab = a\times b$, $a^n$ est le produit (pour la lois $\times$) de $n$ termes et $a^0 = 1$ où 1 est l'élément neutre de la loi $\times$.

on pose alors $k' = k+1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} a^{k'} b^{n-k'+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k},\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k},\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1},\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1},\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n+1-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1},\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^{k} b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1},
\end{aligned}$$

on utilise la relation $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ pour $k \in \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{k} b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1},\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{k} b^{n+1-k},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.

Voir `http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./l/leibnizformule.html`, `https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Leibniz`

Soient $n \in \mathbb{N}$ et deux fonctions $\phi$ et $\psi$ $n$ fois dérivables. On note $\phi^{(0)} = \phi$ et $\psi^{(0)} = \psi$. Alors $\phi\psi$ est $n$ fois dérivable et

$$(\phi\psi)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k)} \psi^{(n-k)}.$$

Montrons cela par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ .

— Initialisation : Si $n = 0$, on a $(\phi\psi)^{(0)} = 1$ et $\binom{0}{0}\phi^{(0)}\psi^{(0)} = 1$ et la propriété est donc bien initialisée.

— Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang $n$. On a alors successivement

$$(\phi\psi)^{(n+1)} = \left((\phi\psi)^{(n)}\right)',$$

et d'après la propriété au rang $n$ :

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k)} \psi^{(n-k)}\right)',\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\phi^{(k)} \psi^{(n-k)}\right)',
\end{aligned}$$

et d'après la propriété $(fg)' = f'g + fg'$, cela donne

$$
\begin{aligned}
(\phi\psi)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left( \left(\phi^{(k)}\right)' \psi^{(n-k)} + \phi^{(k)} \left(\psi^{(n-k)}\right)' \right), \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k+1)} \psi^{(n-k)} + \phi^{(k+1)} \psi^{(n+1-k)}, \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k+1)} \psi^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k+1)} \psi^{(n+1-k)},
\end{aligned}
$$

on pose alors $k' = k + 1$ dans la première somme

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} \phi^{(k')} \psi^{(n-k'+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k+1)} \psi^{(n+1-k)}, \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \phi^{(k)} \psi^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k+1)} \psi^{(n+1-k)}, \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \phi^{(k)} \psi^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} \phi^{(n+1)} \psi^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k)} \psi^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} \phi^{(0)} \psi^{(n+1)}, \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \phi^{(k)} \psi^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \phi^{(k)} \psi^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} \phi^{(n+1)} \psi^{(0)} + \binom{n+1}{0} \phi^{(0)} \psi^{(n+1)}, \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \phi^{(k)} \psi^{(n+1-k)} \binom{n}{k} \phi^{(k)} \psi^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} \phi^{(n+1)} \psi^{(0)} + \binom{n+1}{0} \phi^{(0)} \psi^{(n+1)}, \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \phi^{(k)} \psi^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} \phi^{(n+1)} \psi^{(0)} + \binom{n+1}{0} \phi^{(0)} \psi^{(n+1)},
\end{aligned}
$$

on utilise la relation $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ pour $k \in \{1, ..., n\}$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \phi^{(k)} \psi^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} \phi^{(n+1)} \psi^{(0)} + \binom{n+1}{0} \phi^{(0)} \psi^{(n+1)}, \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \phi^{(k)} \psi^{(n+1-k)},
\end{aligned}
$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

(ii) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a successivement, en utilisant la définition (6.73) du cours :

$$
\left\langle (x-a)\delta_a^{(n)}, \phi \right\rangle = \left\langle \delta_a^{(n)}, (x-a)\phi \right\rangle
$$

et donc d'après la propriété (6.46) sur la dérivée $n$-ième du Dirac du cours

$$
= (-1)^n \left[ \left((x-a)\phi(x)\right)^{(n)} \right]_{[x=a]}.
$$

Or, d'après la formule de Leibniz, on a donc

$$
\left((x-a)\phi(x)\right)^{(n)} = \left(\phi(x)(x-a)\right)^{(n)} = \phi^{(n)}(x)(x-a) + n\phi^{(n-1)}(x)
$$

puisque les dérivées $k$-ième de $(x - a)$ sont nulles pour $k \geq 2$ et donc

$$
\left\langle (x-a)\delta_a^{(n)}, \phi \right\rangle = (-1)^n n\phi^{n-1}(a),
$$

ce qui donne

$$\left\langle (x-a)\delta_a^{(n)}, \phi \right\rangle = -n\left\langle \delta_a^{(n-1)}, \phi \right\rangle,$$

et on a donc (28).

(b) (i) La preuve est en fait l'analogue exacte de celle faite dans la question 3(a)i, où $\phi$ et $\psi$ sont remplacées respectivement par $g$ et $T$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $g$ une fonction indéfiniment dérivable et une distribution $T$. On note $g^{(0)} = g$ et $T^{(0)} = T$. Alors, au sens des distributions, on a,

$$(gT)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} T^{(n-k)}.$$

Montrons cela par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ .

— Initialisation : Si $n = 0$, on a $(gT)^{(0)} = 1$ et $\binom{0}{0} g^{(0)} T^{(0)} = 1$ et la propriété est donc bien initialisée.

— Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang $n$. On a alors successivement

$$(gT)^{(n+1)} = \left((gT)^{(n)}\right)',$$

et d'après la propriété au rang $n$ :

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} T^{(n-k)}\right)', \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(g^{(k)} T^{(n-k)}\right)',
\end{aligned}$$

et d'après la propriété 6.51 page 103 du cours, cela donne

$$\begin{aligned}
(gT)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\left(g^{(k)}\right)' T^{(n-k)} + g^{(k)} \left(T^{(n-k)}\right)'\right), \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k+1)} T^{(n-k)} + g^{(k+1)} T^{(n+1-k)}, \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k+1)} T^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k+1)} T^{(n+1-k)},
\end{aligned}$$

on pose alors $k' = k+1$ dans la première somme

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} g^{(k')} T^{(n-k'+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k+1)} T^{(n+1-k)},\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} g^{(k)} T^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k+1)} T^{(n+1-k)},\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} g^{(k)} T^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} g^{(n+1)} T^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} T^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} g^{(0)} T^{(n+1)},\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} g^{(k)} T^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} T^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} g^{(n+1)} T^{(0)} + \binom{n+1}{0} g^{(0)} T^{(n+1)},\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} g^{(k)} T^{(n+1-k)} \binom{n}{k} g^{(k)} T^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} g^{(n+1)} T^{(0)} + \binom{n+1}{0} g^{(0)} T^{(n+1)},\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) g^{(k)} T^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} g^{(n+1)} T^{(0)} + \binom{n+1}{0} g^{(0)} T^{(n+1)},
\end{aligned}
$$

on utilise la relation $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ pour $k \in \{1, ..., n\}$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} g^{(k)} T^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} g^{(n+1)} T^{(0)} + \binom{n+1}{0} g^{(0)} T^{(n+1)},\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} g^{(k)} T^{(n+1-k)},
\end{aligned}
$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.

(ii) Proposons maintenant une preuve plus concise et plus élégante de (28).
Dérivons $n$ fois au sens des distributions l'égalité (25a) : il vient

$$((x-a)\delta_a)^{(n)} = 0,$$

ce qui donne d'après le résultat de la question 3(b)i, appliqué à $g = x - a$ et $T = \delta_a$ :

$$(x-a)\delta_a^{(n)} + n\delta_a^{(n-1)} = 0,$$

puisque les dérivées $k$-ième de $(x-a)$ sont nulles pour $k \geq 2$ et on retrouve donc (28).

(c) Généralisons maintenant (28).

(i) Calculons dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $(x-a)^k \delta_a^{(n)}$ pour tout entier $k \in \{0, ..., n\}$. Soit donc $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a successivement, grâce aux définitions et propriétés du cours déjà utilisées :

$$
\begin{aligned}
\left\langle (x-a)^k \delta_a^{(n)}, \phi \right\rangle &= \left\langle \delta_a^{(n)}, (x-a)^k \phi \right\rangle,\\
&= (-1)^n \left[ (x-a)^k \phi \right]'_{x=a},
\end{aligned}
$$

et d'après le résultat de la question 3(a)i :

$$= (-1)^n \sum_{l=0}^{n} \binom{l}{n} \left[ \left( (x-a)^k \right)^{(l)} \right]_{x=a} \phi^{(n-l)}(a),$$

Si $l > k$, la dérivée $l$-ième de $(x-a)^k$ est nulle ; si $l < k$, la dérivée $l$-ième de $(x-a)^k$, proportionnelle à $(x-a)^{k-l}$ est nulle en $a$. Dans la somme ci-dessous, ne subsiste donc que le terme correspondant à $l = k$ :

$$\begin{aligned}
\left\langle (x-a)^k \delta_a^{(n)}, \phi \right\rangle &= (-1)^n \binom{n}{k} \left[ \left( (x-a)^k \right)^{(k)} \right]_{x=a} \phi^{(n-k)}(a), \\
&= (-1)^n \binom{n}{k} k(k-1)... \times 3 \times 2 \times 1 \phi^{(n-k)}(a), \\
&= (-1)^n \frac{n!}{k!(n-k)!} k! \phi^{(n-k)}(a), \\
&= (-1)^n \frac{n!}{(n-k)!} \phi^{(n-k)}(a), \\
&= (-1)^n \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{n-k} \left\langle \delta_a^{(n-k)}, \phi \right\rangle, \\
&= (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \left\langle \delta_a^{(n-k)}, \phi \right\rangle, \\
&= (-1)^n n(n-1)....(n-k+1) \left\langle \delta_a^{(n-k)}, \phi \right\rangle,
\end{aligned}$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \{0, ..., n\}, \quad (x-a)^k \delta_a^{(n)} = (-1)^n n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \delta_a^{(n-k)} \tag{30}$$

Par exemple, pour $k = 1$, on a

$$(x-a)\delta_a^{(n)} = (-1)^n n \delta_a^{(n-1)},$$

ce qui est (28).

(ii) Pour tout polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $n$, on rappelle la formule de Taylor pour les polynômes :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

dont on déduit au sens des distributions

$$P\delta_a^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \delta_a^{(n)},$$

et donc, d'après (30),

$$P\delta_a^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (-1)^n n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \delta_a^{(n-k)},$$

soit encore

$$P\delta_a^{(n)} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \delta_a^{(n-k)},$$

et donc

$$P\delta_a^{(n)} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)}(a) \delta_a^{(n-k)}. \tag{31}$$

Par exemple, pour $P = (x-a)$, on a

$$(x-a)\delta_a^{(n)} = (-1)^n n \delta_a^{(n-1)},$$

ce qui est (28).

## Références

[Bas19] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Notes de cours de l'UV MFI de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2019. 107 pages.