Mécanique 4A OMI3 — Automne 2021

# Corrigé de l'examen du 10 Décembre 2021

**Correction de l'exercice 1.**

(1) Nous utilisons tout d'abord le résultat (2.22) du cours qui permet d'écrire :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Puis l'équation (2.27) du cours permet de conclure.

(2) Puisque

$$f(z) = f(x,y) = e^x\left(\cos y + i\sin y\right), \tag{1}$$

les dérivées partielles de $f$ valent respectivement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x\left(\cos y + i\sin y\right), \tag{2a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x\left(-\sin y + i\cos y\right), \tag{2b}$$

qui sont continues ; ainsi $f$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$. De plus, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont donc vérifiées et d'après la proposition 1.13 page 9 du cours $f$ est dérivable ; de plus, d'après l'équation (1.16) du cours et (2a), on a

$$f'(z) = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = f(z).$$

(3) Présentons deux variantes de correction.

(a) La première version, la plus longue, est la suivante :
Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ fixé et $H = h + ik \in \mathbb{C}$, on calcule

$$\alpha = f(z+H) - f(z).$$

Il vient, par définition,

$$\begin{aligned}
\alpha &= f(x+h, y+k) - f(x,y),\\
&= \left(f(x+h,y+k) - f(x,y+k)\right) + \left(f(x,y+k) - f(x,y)\right),\\
&= \left(e^{x+h} - e^x\right)\left(\cos(y+k) + i\sin(y+k)\right) + \left(\cos(y+k) - \cos(y) + i(\sin(y+k) - \sin y)\right)e^x.
\end{aligned}$$

En écrivant les développements limités des fonctions réelles exponentielle, cos et sinus au voisinage respectifs de $x$, $y$ et $y$, on obtient, en écrivant que $o(h)$ et $o(k)$ ne dépendent respectivement que de $h$ et $k$ (mais éventuellement de $x$ et de $y$) :

$$\begin{aligned}
e^{x+h} &= he^x + o(h),\\
\cos(y+k) - \cos(y) &= -k\sin(y) + o(k),\\
\sin(y+k) - \sin(y) &= k\cos(y) + o(k),
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\alpha &= (\cos(y+k)+i\sin(y+k))(he^x+o(h))+(-k\sin(y)+ik\cos(k)+o(k))e^x,\\ &= e^x\left(h(\cos(y+k)+i\sin(y+k))+ik(\cos(y)+i\sin(y))\right)+o(h)+o(k).\end{aligned}$$

On écrit aussi

$$\begin{aligned}\cos(y+k) &= \cos(y)+\varepsilon(k),\\ \sin(y+k) &= \sin(y)+\varepsilon(k),\end{aligned}$$

où $\varepsilon(k)$ (fonction générique, toujours notée ainsi) tend vers zéro quand $k$ tend vers zéro. On a donc

$$\begin{aligned}\alpha &= e^x\left(h(\cos(y)+i\sin(y))+ik(\cos(y)+i\sin(y))\right)+o(h)+o(k),\\ &= e^x(\cos(y)+i\sin(y))(h+ik)+o(h)+o(k),\end{aligned}$$

et donc

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=f(x,y)H+o(h)+o(k),$$

et donc, pour tout $H\neq 0$ :

$$\frac{f(z+H)-f(z)}{H}=f(z)+\frac{o(h)+o(k)}{H}. \tag{3}$$

On remplace $o(h)$ et $o(k)$ respectivement par $k\varepsilon(k)$ et $h\varepsilon(h)$ :

$$\left|\frac{k\varepsilon(k)+h\varepsilon(h)}{|H|}\right|\leq \max\left(|\varepsilon(k)|,|\varepsilon(h)|\right)\frac{|h|+|k|}{|H|},$$

et en écrivant l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}&\leq C\max\left(|\varepsilon(k)|,|\varepsilon(h)|\right)\frac{\sqrt{\left(|h|^2+|k|^2\right)}}{|H|},\\ &\leq C\max\left(|\varepsilon(k)|,|\varepsilon(h)|\right),\end{aligned}$$

qui tend vers zéro quand $H$ tend vers zéro. D'après (3), on a donc

$$\lim_{H\to 0}\frac{f(z+H)-f(z)}{H}=f(z). \tag{4}$$

Cela implique que $f$ est dérivable (au sens complexe), de dérivée égale à elle-même.

(b) La seconde version consiste à écrire : pour tout $z=x+iy\in\mathbb{C}$ fixé et $H=h+ik\in\mathbb{C}$, on calcule

$$\beta=\frac{f(z+H)-f(z)}{H}=\frac{e^{z+H}-e^z}{H}$$

et donc

$$\beta=\frac{e^{z+H}-e^z}{H}=e^z\frac{e^H-1}{H}=e^z\gamma,$$

où

$$\gamma=\frac{e^H-1}{H}. \tag{5}$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$\lim_{H\to 0}\gamma=1. \tag{6}$$

Pour cela, on peut écrire, comme dans la première variante :

$$\gamma=\frac{e^{h+ik}-1}{h+ik}=\frac{e^h\left(\cos k+i\sin k\right)-1}{h+ik}.$$

En utilisant les mêmes développements limités réels (écrits cette fois-ci en 0) que dans la première variante, on conclut de la même façon.

Plus rapidement, on peut aussi écrire la définition de l'exponentielle complexe : d'après (5)

$$\gamma = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k}{k!} - 1}{H} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H^k}{k!}}{H} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^{k+1}}{(k+1)!}}{H} = \frac{\displaystyle H\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k}{(k+1)!}}{H} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k}{(k+1)!}$$

La dernière expression est une série entière de rayon infini, égale à 1 en zéro, ce qui permet de conclure.

**Correction de l'exercice 2.**
Exercice issu de [Buc92, p. 117]
On cherche dans cet exercice à calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx.$$

(1) Pour tout complexe $z = \rho e^{i\theta}$, on a

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{\left|z e^{iz}\right|}{|1+z^2|}, \\ &= \frac{\rho e^{-\rho \sin\theta}}{|1+\rho^2 e^{2i\theta}|}, \end{aligned}$$

et on a bien

$$|f(z)| = \frac{\rho e^{-\rho \sin\theta}}{|1+\rho^2 e^{2i\theta}|}. \tag{7}$$

(2) (a) Rappelons l'inégalité triangulaire (la version "inhabituelle" !) :

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \quad |a-b| \geq |a| - |b|,$$

qui implique, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $R \geq 0$ :

$$\left|1 + R^2 e^{2i\theta}\right| \geq \left|R^2 e^{2i\theta}\right| - |1|,$$

et donc

$$\left|1 + R^2 e^{2i\theta}\right| \geq R^2 - 1. \tag{8}$$

D'après (7) et (8), on a donc, pour $z = Re^{i\theta}$ où $\theta$ décrit $[0, \pi]$, avec $R$ assez grand :

$$|f(z)| = \frac{Re^{-R\sin\theta}}{|1+R^2 e^{2i\theta}|} \leq \frac{Re^{-R\sin\theta}}{R^2-1}.$$

On a aussi $dz = iRe^{i\theta} d\theta$ et donc $|\gamma'(t)|$ et il vient, d'après le lemme 3.10 du cours,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz\right| &\leq \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} |f(\gamma(\theta))| \, |\gamma'(t)| \, d\theta, \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{Re^{-R\sin\theta}}{R^2-1} R d\theta, \\ &\leq \frac{R^2}{R^2-1} \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta, \end{aligned}$$

soit donc

$$\left|\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz\right| \leq \frac{R^2}{R^2-1} \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta. \tag{9}$$

(b) On a
$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta$$
Dans la seconde intégrale, on pose $\tau = \pi - \theta$ et donc, puisque $\sin(\pi - \tau) = \sin\tau$
$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta - \int_{\pi/2}^{0} e^{-R\sin\tau} d\tau,$$
soit
$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \tag{10}$$

(c) la fonction sinus, dont la dérivée seconde est égale à son opposée, est donc concave sur $[0, \pi/2]$, ce dont on déduit que la courbe est au dessus de sa corde, d'équation $y = 2\theta/\pi$, soit
$$\forall\theta \in [0, \pi/2], \quad \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta. \tag{11}$$

(d) On déduit donc finalement de (9), (10) et (11) que
$$\begin{aligned}
\left|\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz\right| &\leq \frac{R^2}{R^2-1}\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta,\\
&\leq \frac{2R^2}{R^2-1}\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} d\theta,\\
&= -\frac{2\pi}{2R}\frac{R^2}{R^2-1}\left[e^{-\frac{2}{\pi}\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2},\\
&= \frac{\pi}{R}\frac{R^2}{R^2-1}\left(-e^{-1}+1\right) \leq \frac{\pi R}{R^2-1}
\end{aligned}$$
dont on déduit donc, quand $R$ tend vers l'infini, que
$$\left|\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}, \tag{12a}$$
et que
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz = 0. \tag{12b}$$

(3) Le seul pôle de $f$ à l'intérieur du chemin $\gamma_R$ est $i$ (d'ordre 1) et en reprenant l'équation (5.19) de la preuve de la proposition 5.11 du cours, on a
$$\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2i\pi\,\text{Rés}(f, i).$$
soit donc par parité et imparité
$$\int_{\widetilde{\gamma}_R} f(z)dz + 2i\int_0^{R}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx = 2i\pi\,\text{Rés}(f, i).$$
Si on fait tendre $R$ vers l'infini, on a obtient donc l'existence de $I$ qui vérifie
$$I = \pi\,\text{Rés}(f, i). \tag{13}$$

(4) On détermine $\text{Rés}(f, i)$ en utilisant la formule (3.45) du cours
$$\begin{aligned}
\text{Rés}(f, i) &= ie^{-1}\left(\frac{1}{z+i}\right)'_{z=i},\\
&= \frac{ie^{-1}}{2i} = \frac{1}{2e}
\end{aligned}$$

l'on obtient donc grâce à (13)

$$I = \frac{\pi}{2e} \tag{14}$$

(5) (a) En choisissant $z = R$, c'est-à-dire $\theta = 0$ et $\rho = R$, on déduit de (7)

$$|zf(z)| = \frac{R^2}{|1+R^2|} = \frac{R^2}{1+R^2},$$

quantité qui tend vers 1 quand $R$ tend vers l'infini. Ainsi, $|zf(z)|$ ne peut tendre vers zéro quand $|z|$ tend vers l'infini.

(b) Pour appliquer la proposition 5.11 du cours à la fonction $f$, il faudrait que

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \operatorname{Im}(z)\geq 0}} |z\{(z)| = 0,$$

ce qui est n'a pas lieu, selon la question précédente.

**Correction de l'exercice 3.**

(1) (a) Par définition de $T_n$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \delta - \delta_{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\delta', \tag{15}$$

on a

$$\begin{aligned}
a_n &= \langle T_n, \phi\rangle, \\
&= \left\langle \delta - \delta_{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\delta', \phi \right\rangle, \\
&= \langle \delta, \phi\rangle - \left\langle \delta_{\frac{1}{n}}, \phi \right\rangle - \frac{1}{n}\langle \delta', \phi\rangle, \\
&= \phi(0) - \phi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\phi'(0)
\end{aligned}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \phi(0) - \phi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\phi'(0). \tag{16}$$

Puisque $\phi$ est continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \phi\left(\frac{1}{n}\right) = \phi(0),$$

et donc, d'après (16),

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0. \tag{17}$$

(b) Par définition, la suite de distribution $T_n$ tend vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(2) (a) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $\phi$ sur l'intervalle $[0, 1/n]$ à l'ordre deux fournit

$$\phi\left(\frac{1}{n}\right) = \phi(0) + \frac{1}{n}\phi'(0) + \frac{1}{2n^2}\phi''(\xi_n), \tag{18}$$

où $\xi_n$ appartient à $[0, 1/n]$. Puisque $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et à support compact sur $\mathbb{R}$, on peut poser

$$M = \frac{1}{2}\max_{x\in\mathbb{R}} |\phi''(x)|. \tag{19}$$

De (16) et (18), on déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = -\frac{1}{2n^2}\phi''(\xi_n),$$

et, donc grâce à (19), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |a_n| \leq \frac{M}{n^2}. \tag{20}$$

(b) Puisque la série de terme général $1/n^2$ est convergente, par comparaison, la série numérique de terme général $a_n$ est absolument convergente donc convergente.

(c) Ainsi pour tout $\phi$, la série de terme $\langle T_n, \phi \rangle$ est convergent et donc, la série de distribution de terme général $T_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

**Correction de l'exercice 4.**

(1) Pour tout $n$, on pose

$$I_n = n \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Dans cette intégrale, on fait le changement de variable $u = n(1-t)$, on obtient $t = 1 - u/n$ et $du = -ndt$ et donc

$$I_n = -\int_n^0 \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n f\left(1 - \frac{u}{n}\right) du,$$

soit encore

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n f\left(1 - \frac{u}{n}\right) du. \tag{21}$$

On a

$$\forall u \in [0, n], \quad 1 - \frac{u}{n} \geq 0, \tag{22}$$

et on a aussi

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = e^{-u}. \tag{23}$$

En effet, pour $n \geq 0$ et pour $n \geq u$, on écrit

$$\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = \exp\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{u}{n}\right)}{-\frac{u}{n}}(-u)\right). \tag{24}$$

Par ailleurs, on a aussi, puisque $f$ est continue en 1 :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n \to \infty} f\left(1 - \frac{u}{n}\right) = f(1). \tag{25}$$

On définit la fonction $G_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad G_n(u) = \begin{cases} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n f\left(1 - \frac{u}{n}\right), & \text{si } u \in [0, n], \\ 0, & \text{si } u \in ]n, +\infty[, \end{cases} \tag{26}$$

De sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^{+\infty} G_n(u) du. \tag{27}$$

Montrons que

$$\forall u \in [0, n], \quad 0 \leq \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}. \tag{28}$$

Pour cela, on utilise le fait que (par convexité ou Taylor-Lagrange)

$$\forall h > -1, \quad \ln(1 + h) \leq h. \tag{29}$$

Pour $u \in [0, n[$, on pose $h = -u/n$ qui est bien strictement supérieur à $-1$, on obient donc

$$\ln\left(1 - \frac{u}{n}\right) \leq -\frac{u}{n},$$

ce qui implique

$$-\ln\left(1 - \frac{u}{n}\right) \geq \frac{u}{n},$$

et donc

$$-n\ln\left(1-\frac{u}{n}\right)\geq u,$$

et

$$n\ln\left(1-\frac{u}{n}\right)\leq -u,$$

ce qui permet de conclure en prenant l'exponentielle. Si $n=u$, (28) est vrai. De (28), on déduit donc

$$\forall u\in\mathbb{R}_+,\quad |G_n(u)|\leq Me^{-u}, \tag{30}$$

où $M$ le maximum de $|f|$ sur $[0,1]$, qui existe car $f$ est continue. La fonction $u\mapsto Me^{-u}$ est dans $L^1(\mathbb{R}_+)$. De (23) et (25), on déduit donc

$$\forall u\in\mathbb{R}_+,\quad \lim_{n\to\infty} G_n(u)=g(u), \tag{31}$$

où $g(u)=f(1)e^{-u}$. Ainsi, d'après (30) et (31), les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue sont vérifiées et on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} G_n(u)du=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g(u)du=\int_0^{+\infty} f(1)e^{-u}du=f(1)\int_0^{+\infty} e^{-u}du=f(1),$$

et on retrouve donc (36).

(2) La fonction $g_n$ est dans $L^1(\mathbb{R}_+)$. Si on applique le résultat de la question 1 à toute fonction $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)\phi(t)=\phi(1),$$

soit encore, compte tenu de la définition de $g_n$ :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)\phi(t)=\delta_1(\phi),$$

ce qui traduit donc que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(t)=\delta_1.$$

(3) Oui, on peut mais c'est plus technique :

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $\eta>0$ tel que

$$\forall x\in[1-\eta,1],\quad |f(x)-f(1)|\leq\frac{\varepsilon}{4}. \tag{32}$$

Pour tout $n$, on a par ailleurs,

$$\left|n\int_0^1 t^nf(t)dt-f(1)\right|\leq\left|n\int_0^{1-\eta} t^nf(t)dt\right|+\left|n\int_{1-\eta}^1 t^nf(t)dt-f(1)\right|,$$

et donc en posant

$$\|f\|_\infty=\max_{y\in[0,1]}|f(y)|,$$

on a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \left|n\int_0^1 t^nf(t)dt-f(1)\right|\leq n\|f\|_\infty\int_0^{1-\eta} t^ndt+\left|n\int_{1-\eta}^1 t^nf(t)dt-f(1)\right|. \tag{33}$$

Le premier terme vaut

$$\|f\|_\infty\frac{n}{n+1}(1-\eta)^{n+1},$$

et donc, d'après (33),

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \left|n\int_0^1 t^nf(t)dt-f(1)\right|\leq\|f\|_\infty\frac{n}{n+1}(1-\eta)^{n+1}+\left|n\int_{1-\eta}^1 t^nf(t)dt-f(1)\right|. \tag{34}$$

Majorons maintenant le second terme : d'après (32), on a

$$\forall x \in [1-\eta, 1], \quad f(1) - \frac{\varepsilon}{4} \leq f(t) \leq f(1) + \frac{\varepsilon}{4},$$

et donc

$$nt^n \left(f(1) - \frac{\varepsilon}{4}\right) \leq nt^n f(t) \leq nt^n \left(f(1) + \frac{\varepsilon}{4}\right),$$

et en intégrant en $t \in [1-\eta, t]$, il vient

$$n \left(f(1) - \frac{\varepsilon}{4}\right) \int_{1-\eta}^1 t^n dt \leq n \int_{1-\eta}^1 t^n f(t) dt \leq n \left(f(1) + \frac{\varepsilon}{4}\right) \int_{1-\eta}^1 t^n dt,$$

ce qui implique après calcul de l'intégrale et en soustrayant $f(1)$

$$n \left(f(1) - \frac{\varepsilon}{4}\right) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1}\right) - f(1) \leq n \int_{1-\eta}^1 t^n f(t) dt - f(1) \leq n \left(f(1) + \frac{\varepsilon}{4}\right) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1}\right) - f(1),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} f(1) \left(\frac{n}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1} - 1\right) - \frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1}\right) &\leq n \int_{1-\eta}^1 t^n f(t) dt - f(1) \\ &\leq f(1) \left(\frac{n}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1} - 1\right) + \frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1}\right) \end{aligned} \tag{35}$$

À $\varepsilon$ et $\eta >$ fixés, puisque $1-\eta < 1$, la limite de $(1-\eta)^n$ est nulle quand $n$ tend vers l'infini. Ainsi, il existe $N_1$, $N_2$ et $N_3$ tel que

$$\begin{aligned} &\forall n \geq N_1, \quad \|f\|_\infty \frac{n}{n+1} (1-\eta)^{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ &\forall n \geq N_2, \quad \left| f(1) \left(\frac{n}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1} - 1\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ &\forall n \geq N_3, \quad \frac{\varepsilon}{4} \left| \frac{n}{n+1} - \frac{(1-\eta)^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (34), et (35), pour $n \geq \max(N_1, N_2, N_3)$, on a

$$\left| n \int_0^1 t^n f(t) dt - f(1) \right| \leq \varepsilon.$$

On a donc montré

$$\lim_{n \to +\infty} n \int_0^1 t^n f(t) dt = f(1). \tag{36}$$

*Remarque* 1. Un des étudiants de Mécanique 4A a fait la judicieuse remarque suivante (sans l'exploiter totalement !) : Si $f$ est dérivable, on peut écrire par intégration par partie : on intègre $t^n$ et on dérive $f(t)$

$$n \int_0^1 t^n f(t) dt = n \left(-\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} f'(t) dt + \left[\frac{t^n}{n+1} f(t)\right]_0^1\right),$$

et donc

$$n \int_0^1 t^n f(t) dt = -\frac{n}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt + \frac{n}{n+1} f(1).$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesque, on peut vérifier que

$$\int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt \to 0$$

ce qui permet de conclure :

$$n \int_0^1 t^n f(t) dt = -\frac{n}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt + \frac{n}{n+1} f(1) \to f(1).$$

Il faudrait finir complètement le raisonnement en exploitant la densité de l'ensemble des fonction dérivables dans $L^1(0,1)$ !

## Références

[Buc92] H. Buchwalter. *Variations sur l'analyse en maîtrise de mathématiques*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 515 BUC, 4 ième étage). Ellipses, 1992.