Mécanique 4A OMI3 — Automne 2022

Corrigé de l'examen du 17 janvier 2023

Correction de l'exercice 1.
Cet exercice correspond à l'exercice 7.1 de TD.
Issu de [Sau, Exercice 86].
Écrivons successivement les différentes définitions : soit ϕ une fonction test. On a alors :

$$\begin{aligned}\langle \delta_a * \delta_b, \phi \rangle &= \langle \delta_b, \langle \delta_a, \phi(. + x)\rangle \rangle,\\ &= \langle \delta_b, [\phi(. + x)]_{.=a} \rangle,\\ &= \langle \delta_b, \phi(a + x)\rangle,\\ &= [\phi(a + x)]_{x=b},\\ &= \phi(a + b),\\ &= \langle \delta_{a+b}, \phi \rangle.\end{aligned}$$

On a donc

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}.$$

Correction de l'exercice 2.
Cet exercice correspond à l'exercice 6.12 de TD.

(1) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, dont on suppose le support inclus dans $[A, B]$. Montrons que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty} f_n = f, \tag{1}$$

ce qui est encore équivalent à

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx. \tag{2}$$

D'après l'hypothèse (1) de l'énoncé, il existe n assez grand tel que $a_n > B$. Par ailleurs, il existe n' assez grand tel que $-n' + a_1 < A$. Si on pose $p = \max(n, n')$, on a donc, par croissance

$$\forall n \geq p, \quad a_n > B \text{ et } -n + a_0 < A \tag{3}$$

Par définition de f_n, on a donc pour tout $n \geq p$,

$$\forall x \in [A, B], \quad f_n(x) = f(x),$$

et donc puisque ϕ est nulle en debors de $[A, B]$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx &= \int_A^B f(x)\phi(x)dx,\\ &= \int_A^B f_n(x)\phi(x)dx,\\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi(x)dx,\end{aligned}$$

et donc, (2) a bien lieu.

Par la suite, pour éviter toute ambiguïté dans l'usage de la formule des sauts, on notera (1) sous la forme

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty} T_{f_n} = T_f. \tag{4}$$

(2) La fonction f_n vérifie les hypothèses de la formule des sauts (proposition 6.35) et possède, sur l'intervalle $[-n+a_1, a_n]$, des discontinuités σ_i aux points a_i, pour $1 \leq i \leq n-1$. En-deçà de $-n+a_1$, elle est nulle. Attention, à prendre en compte la discontinuité articiellement introduite en $-n+a_1$, puisque à gauche de ce point, f_n est nulle et à droite, elle vaut $f(-n+a_1+0) = f(-n+a_1)$, puisque f y est continue. Au-delà de a_n, elle est nulle. En a_n, f_n est nulle à droite et possède donc en ce point un saut égal à $-f(a_n-0)$. La formule des sauts donne donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T'_{f_n} = f'_n + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{a_i}\delta_{a_i} + f(-n+a_0)\delta_{-n+a_1} - f(a_n-0)\delta_{a_n}. \tag{5}$$

(3) ll ne reste plus qu'à passer à la limite $n \to +\infty$ dans (5) en précisant bien les détails.

(a) Exactement, comme pour l'égalité (1), on montre que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty} f'_n = f', \tag{6}$$

où ici f'_n désigne la dérivée usuelle de f'_n, c'est-à-dire, là où elle est dérivable.

(b) Soit une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, dont on suppose le support inclus dans $[A, B]$. On suppose aussi, quitte à l'agrandir, qu'il contient a_1. De plus, pour $n \geq N$, assez grand, on a $B \leq a_n$. Donc, pour $n \leq N$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} \langle \sigma_{a_i}\delta_{a_i}, \phi\rangle &= \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{a_i} \langle \delta_{a_i}, \phi\rangle, \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{a_i}\phi(a_i),\end{aligned}$$

et puisque ϕ est nulle aux a_j pour $j \geq n$

$$\begin{aligned}&= \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\phi(a_i), \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \langle \sigma_{a_i}\delta_{a_i}, \phi\rangle\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \langle \sigma_{a_i}\delta_{a_i}, \phi\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle \sigma_{a_i}\delta_{a_i}, \phi\rangle,$$

ce qui est équivalent à

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{a_i}\delta_{a_i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i}. \tag{7}$$

(c) Soit enfin une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, dont on suppose le support inclus dans $[A, B]$. Pour $n \geq N$, assez grand, on a $-n+a_1 \leq A$. Donc, pour $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned}\langle f(-n+a_1)\delta_{-n+a_1}, \phi\rangle &= f(-n+a_1)\phi(-n+a_1), \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty} f(-n+a_1)\delta_{-n+a_1} = 0. \tag{8}$$

On a de même

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty} f(a_n - 0)\delta_{a_n} = 0. \tag{9}$$

(d) D'après le lemme 6.47, la dérivation de (4) donne

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty} T'_{f_n} = T'_f. \tag{10}$$

(e) Bref, compte tenu de (4), (7), (8), (9) et (10) le passage à la limite de $n \to +\infty$ dans (5) donne

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T'_f = f' + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_{a_i}\delta_{a_i},$$

ce qui est le résultat attendu.

Remarque 1. La démontration de l'équation (6) de l'énoncé se fait exactement de la même façon.

Remarque 2. Cette façon de procéder est finalement pas très heureuse et une autre façon plus agréable vous sera bientôt présentée !

Correction de l'exercice 3.
Les résultats de cet exercice correspondent aux résultats des sections 8.1 et 8.2 du chapitre 8 du cours.
On renvoit aux deux annexes A et B qui reprennent l'ensemble des résultats théoriques de cet exercice.

Annexe A. Résolutions d'équations différentielles (ordinaires) d'ordre 1

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nous étudions l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY' + bY = \mathcal{F}. \tag{11}$$

L'"inconnue" est ici la distribution Y de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La notion de condition initiale n'a pas de sens au sens de distributions. Nous reviendrons dessus plus bas. La résolution de cette équation différentielle est très proche de la suivante, où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay'(t) + by(t) = f(t), \tag{12}$$

où l'"inconnue" est ici la fonction y, dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On renvoie à la [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf` dont on s'inspire pour résoudre (11).
Nous allons

- en section A.2, donner les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (11) ;
- en section A.3.1, donner les réponses impulsionnelles, c'est-à-dire les solutions de (11) avec un second membre égal à δ ;
- en section A.3.3, donner les solutions générales de l' 'équation différentielle (11) ;
- et enfin, en section A.4, retrouver la solution générale connue d'une équation différentielle ordinaire bien connue, comme cas particulier.

A.1. Un lemme sur la "variation de la constante"

Lemme 3 (Variation de la constante)**.** *La distribution Y de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle* (11) *si et seulement si la distribution C définie par*

$$C = e^{bt/a}Y, \tag{13}$$

vérifie

$$\textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = \frac{1}{a}e^{bt/a}\mathcal{F}. \tag{14}$$

Démonstration. Notons que l'équation (13) a un sens puisque l'on multiplie la fonction $\mathcal{C}^\infty$ $e^{bt/a}$ (qui devrait être notée en toute rigueur $e^{b./a}$) par la distribution C. Elle est équivalente à

$$Y = e^{-bt/a}C. \tag{15}$$

On a alors, en utilisant la proposition 6.53

$$\begin{aligned} aY' + bY &= = a\left(e^{-bt/a}C' - \frac{b}{a}e^{-bt/a}C\right) + be^{-bt/a}C, \\ &= ae^{-bt/a}C' + \underbrace{\left(-be^{-bt/a}C + be^{-bt/a}C\right)}_{\text{quantité nulle}}, \end{aligned}$$

et donc, en disivant par $ae^{-bt/a}$, non nul, on constate que (11) est équivalent à (14). □

A.2. Résolution générale de l'équation homogène associée (EHA)

Lemme 4 (Résolution générale de l'équation homogène associée)**.** *Y est solution de l'équation homogène associée*

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY' + bY = 0, \tag{16}$$

si et seulement si il existe une constante c telle que

$$Y = ce^{-bt/a}. \tag{17}$$

Dans ce cas, Y est une distribution-fonction.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 3 avec $\mathcal{F} = 0$, selon lequel y est solution de (16) ssi la fonction C définie par (13) vérifie

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = 0, \tag{18}$$

ce qui est donc équivalent, d'après la proposition 6.46, à l'existence d'une constante c telle que $C = c$, ce qui est équivalent à (16) en revenant à Y donné par (15). □

A.3. Résolution générale de l'équation avec second membre

Comme annoncé dans [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"], on peut soit chercher une solution particulière soit utiliser la méthode de la variation de la constante. Ici, nous utiliserons la recherche d'une solution particulière.

A.3.1. Recherche de la solution générale dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$ (réponse impulsionnelle).

La réponse impulsionnelle est la solution de (11) dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$: on considère donc l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY' + bY = \delta. \tag{19}$$

Proposition 5 (Réponses impulsionnelles)**.** *La distribution Y est solution de* (19) *ssi il existe une constante c telle que*

$$Y = ce^{-bt/a} + Y_0, \tag{20}$$

où la distribution-fonction Y_0 est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}e^{-bt/a}, & si\ t > 0, \\ 0, & si\ t < 0. \end{cases} \tag{21}$$

ce qui est équivalent à

$$Y_0 = \frac{1}{a}e^{-bt/a}H, \tag{22}$$

où H est la fonction de Heaviside.

Démonstration. Il suffit d'appliquer de nouveau le lemme 3 dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$ selon lequel y est solution de (16) ssi la fonction C définie par (13) vérifie

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = \frac{1}{a} e^{bt/a} \delta$$

ce qui est équivalent, d'après l'équation (6.75) de la proposition 6.51

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = \frac{1}{a} e^{b/a \times 0} \delta,$$

soit

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad C' = \frac{1}{a} \delta,$$

ce que l'on peut écrire encore sous la forme

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \left(C - \frac{1}{a} H\right)' = 0. \tag{23}$$

L'équation (23) est donc équivalente, d'après la proposition 6.46, à l'existence d'une constante c telle que

$$C - \frac{1}{a} H = c,$$

soit

$$C = c + \frac{1}{a} H,$$

ce qui est équivalent à (20) en revenant à Y donné par (15). □

A.3.2. Recherche d'une solution particulière dans le cas général.

Nous allons donc maintenant le résultat très important, spécifique aux distributions : une solution de la solution générale est le produit de convolution de la réponse impulsionnelle par le second membre.

Lemme 6 (Une solution particulière dans le cas général)**.** *Une solution de* (11) *est donnée par*

$$Y = \mathcal{F} * Y_0, \tag{24}$$

où Y_0 est donnée par (22)*. On admettra que ce produit existe*[1]*.*

Démonstration. Notons que d'après la proposition 5, en prenant $c = 0$ dans (20), une solution de (19) est donnée par $Y = Y_0$. On a donc

$$aY_0' + bY_0 = \delta. \tag{25}$$

Utilisons pour conclure les deux égalités fondamentales du cours : les équations (7.20) et (7.22) qui impliquent successivement, en considérant Y défini par (24) :

$$\begin{aligned} aY' + bY &= a(\mathcal{F} * Y_0)' + b(\mathcal{F} * Y_0), \\ &= a\mathcal{F} * Y_0' + b\mathcal{F} * Y_0, \\ &= \mathcal{F} * (aY_0' + bY_0), \\ &= \mathcal{F} * (aY_0' + bY_0), \end{aligned}$$

et d'après (25)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F} * \delta, \\ &= \mathcal{F}, \end{aligned}$$

□

Remarque 7. L'égalité (25) peut aussi se retrouver à la main. De deux façons différentes, on peut montrer

$$Y_0' = -\frac{b}{a} e^{-bt/a} H + \frac{1}{a} \delta. \tag{26}$$

1. Tout du moins, on fera si possible l'hypothèse qui assure l'existence ce produit de convolution. Voir la proposition 10.

(1) À partir de la définition (22), on a

$$\begin{aligned} Y_0' &= \left(\frac{1}{a}e^{-bt/a}H\right)', \\ &= -\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}e^{-bt/a}H', \\ &= -\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}e^{-bt/a}\delta, \\ &= -\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}e^{-b/a\times 0}\delta, \end{aligned}$$

ce qui implique (26).

(2) Si on utilise la formule des sauts (proposition 6.35) et la définition (21) de Y_0, dont la dérivée usuelle vaut

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_0'(t) = \begin{cases} -\frac{b}{a}e^{-bt/a}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{27}$$

et qui présente un saut égal à $1/a$ en zéro (voir figure 1). On a donc

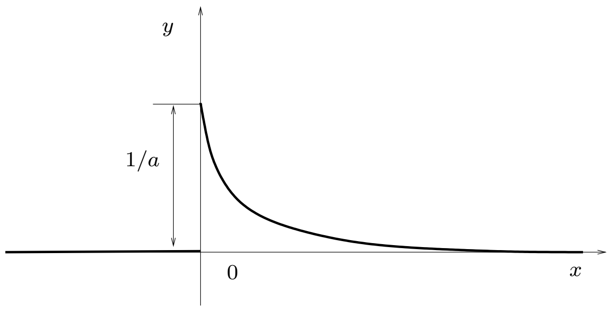


FIGURE 1. La distribution fonction Y_0.

$$Y_0' = y_0' + \frac{1}{a}\delta,$$

ce qui implique (26).

D'après (26), on a donc bien

$$\begin{aligned} aY_0' + bY_0 &= a\left(-\frac{b}{a}e^{-bt/a}H + \frac{1}{a}\delta\right) + be^{-bt/a}H, \\ &= -be^{-bt/a}H + \delta + be^{-bt/a}H, \\ &= \delta. \end{aligned}$$

♢

A.3.3. Résolution générale.

On peut enfin conclure, comme pour les équations différentielles usuelles, en utilisant le principe de superposition

Proposition 8 (Résolution générale)**.** *Les solutions de* (11) *sont données par : il existe une constante c telle que*

$$Y = \underbrace{\mathcal{F} * Y_0}_{\text{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{ce^{-bt/a}}_{\text{la solution générale de l'EHA}}. \tag{28}$$

Démonstration. Il suffit de considérer Y une solution quelconque de (11) et de poser $Z = Y - Y_p$, où $Y_p = \mathcal{F} * Y_0$, où Y_0 est définie par (22). On a alors, par linéarité

$$aZ' + bZ = aY' + bY - \left(aY_p' + bY_p\right)$$

qui vaut $\mathcal{F}-\mathcal{F}=0$ puisque Y et Y_p sont toutes les deux solutions de (11), d'après le lemme 6. D'après le lemme 4 appliqué à Z, on a, d'après (17)

$$Z = ce^{-bt/a},$$

et donc

$$Y - Y_p = ce^{-bt/a},$$

dont on déduit (28). □

On peut remplacer la proposition 8 par la suivante, qui donne une méthode de résolution, tout à finalement identique à celle des équations différentielles habituelles de fonctions :

Proposition 9 (Résolution générale (méthode alternative))**.** *Les solutions de* (11) *sont données par : il existe une constante c telle que*

$$Y = \underbrace{Y_p}_{\text{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{ce^{-bt/a}}_{\text{la solution générale de l'EHA}}. \tag{29}$$

où Y_p est donnée par

$$\mathcal{G} \text{ est une primitive de la distribution } e^{bt/a}\mathcal{F}, \text{ notée } \int e^{b\cdot/a}\mathcal{F}d.\,; \tag{30a}$$

$$Y_p = \frac{1}{a}e^{-bt/a}\mathcal{G} = \frac{1}{a}e^{-bt/a}\int e^{b\cdot/a}\mathcal{F}d. \tag{30b}$$

de sorte que (29) *s'écrit :*

$$Y = ce^{-bt/a} + \frac{1}{a}e^{-bt/a}\int e^{b\cdot/a}\mathcal{F}d. \tag{31}$$

Démonstration. Ce calcul est l'adaptation exacte de ce qui est fait dans [Bas22, Chapitre "Équations différentielles (ordinaires)", section "Équations différentielles d'ordre un" et annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2", section "Équations différentielles d'ordre 1"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf`. Il suffit de reprendre la preuve du lemme 3. D'après (14), C est égale à une primitive quelconque de $\frac{1}{a}e^{bt/a}\mathcal{F}$, dont on sait qu'elle existe, d'après l'annexe U. On conclut en écrivant, avec le formalisme (30), sur l'existence d'une constante c telle que

$$C = c + \frac{1}{a}\int e^{b\cdot/a}\mathcal{F}d.,$$

et en réutilisant (15) qui permet de conclure. □

◊

A.3.4. Traitement de la condition initiale.

Pour les distributions, la notion de condition initiale n'a *a priori* aucun sens car une distribution n'est pas nécessairement une distribution-fonction et donc la notion de valeur temporelle n'a pas lieu d'être.
Néanmoins, on peut donner une condition initiale grâce à la notion de support d'une distribution.
Nous dirons qu'un signal "vit dans $\mathbb{R}_+$" s'il est associé à une distribution de $\mathcal{D}'_+$. Si cette distribution est une distribution-fonction, être dans $\mathcal{D}'_+$ est équivalent à être nulle sur $\mathbb{R}_-$.

Proposition 10 (Résolution générale avec une condition initiale particulière)**.** *On suppose que $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{D}'_+$. Le produit de convolution $\mathcal{F}*Y_0$ existe et l'unique solution de* (11) *dans $\mathcal{D}'_+$ est donnée par*

$$Y = \mathcal{F} * Y_0, \tag{32}$$

où Y_0 est définie par (22).

Démonstration. D'après la proposition 7.10, le produit de convolution $\mathcal{F}*Y_0$ existe puisque $\mathcal{F}$ et Y_0 sont dans $\mathcal{D}'_+$. D'après la proposition 8, toutes les solutions de (11) sont données par (28). Si on impose que Y est dans $\mathcal{D}'_+$, alors nécessairement c est nul. En effet, pour toute fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support inclus dans $\mathbb{R}_-^*$, on a par définition (voir la définition 7.8)

$$0 = \langle Y, \phi\rangle = \langle F * Y_0, \phi\rangle + \left\langle ce^{-bt/a}, \phi\right\rangle.$$

on a $\langle F * Y_0, \phi\rangle = 0$ puisque F, Y_0 et $F * Y_0$ sont dans $\mathcal{D}'_+$ (voir remarque 7.13). On a donc

$$0 = \left\langle ce^{-bt/a}, \phi \right\rangle = c \int_{\mathbb{R}_-} e^{-bt/a}\phi(t)dt.$$

On peut choisir ϕ strictement positive sur son support et donc l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_-} e^{-bt/a}\phi(t)dt$ est strictement positive et donc c est nul. Ainsi, Y d'après (28), est unique est donnée par (32). □

A.3.5. Généralisation.

(1) Si au lieu de se placer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on souhaite se placer sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ où Ω est un intervalle quelconque, borné ou non de $\mathbb{R}$, la proposition 8 n'est plus valable parce qu'on ne peut pas définir la convolution sur un intervalle autre que $\mathbb{R}$. En, revanche, la propostion 9 reste tout à fait valable.

(2) Supposons, maintenant que a et b sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω est un intervalle quelconque, borné ou non de $\mathbb{R}$, a ne s'annulant pas. Au lieu de considérer l'équation différentielle (11), on considère l'équation différentielle

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad a(t)Y' + b(t)Y = \mathcal{F}, \tag{33}$$

où cette fois, $a(t)$ et $b(t)$ désignent (abusivement) les fonctions a et b. Dans ce cas, même dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}$, la proposition 8 n'est plus valable. En effet, elle est fondée sur le calcul fait dans la preuve du lemme 24 qui ne marche pas ici ! En effet, si on considère la réponse impulsionnelle Y_0 de

$$a(t)Y_0' + b(t)Y_0 = \delta, \tag{34}$$

(on sait la déterminer, comme on verra plus bas), alors si on calcule $a(t)Y' + b(t)Y$ en posant $Y = Y_0 * \mathcal{F}$, on a

$$\begin{aligned} a(t)Y' + b(t)Y &= a(t)(\mathcal{F} * Y_0)' + b(t)(\mathcal{F} * Y_0), \\ &= a(t)(\mathcal{F} * Y_0') + b(t)(\mathcal{F} * Y_0), \end{aligned}$$

mais on ne peut conclure, comme dans la preuve du lemme 24, car, en général (sauf si a est constant !), si S et T sont deux distributions,

$$a(t)(S * T) \neq (a(t)S) * T.$$

et on ne peut donc plus conclure en écrivant

$$\begin{aligned} a(t)Y' + b(t)Y &= \mathcal{F} * (a(t)Y_0' + b(t)Y_0), \\ &= \mathcal{F} * (a(t)Y_0' + b(t)Y_0), \end{aligned}$$

et d'après (25)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F} * \delta, \\ &= \mathcal{F}, \end{aligned}$$

Cependant, la proposition 9 demeure, quant à elle, tout à fait valable !

Nous en donnons la généralisation :

Proposition 11 (Résolution générale (méthode alternative, plus générale)). *Soient a et b deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur Ω intervalle quelconque, borné ou non de $\mathbb{R}$, a ne s'annulant pas. On considère α une primitive quelconque de b/a. Les solutions de* (33) *sont données par : il existe une constante c telle que*

$$Y = \underbrace{Y_p}_{\text{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{ce^{-\alpha(t)}}_{\text{la solution générale de l'EHA}}. \tag{35}$$

où Y_p est donnée par

$$\mathcal{G} \text{ est une primitive de la distribution } \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}, \text{ notée } \int \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}d.\,; \tag{36a}$$

$$Y_p = e^{-\alpha(t)}\mathcal{G} = e^{-\alpha(t)} \int \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}d. \tag{36b}$$

de sorte que (35) *s'écrit :*

$$Y = ce^{-\alpha(t)} + e^{-\alpha(t)} \int \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}d. \tag{37}$$

Démonstration. Cela se fait exactement comme dans la preuve de la proposition 9 et comme on a fait dans [Bas22, Chapitre "Équations différentielles (ordinaires)", section "Équations différentielles d'ordre un" et annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2", section "Équations différentielles d'ordre 1"]. C'est encore une méthode de variation de la constante ! Comme dans le lemme 3, on considère C défini de façon analogue à (13) :

$$C = e^{\alpha(t)}Y. \tag{38}$$

On a alors

$$Y = e^{-\alpha(t)}C \tag{39}$$

et donc

$$\begin{aligned}
a(t)Y' + b(t)Y = &= a(t)\left(-\alpha'(t)e^{-\alpha(t)}C + e^{-\alpha(t)}C'\right) + b(t)e^{-\alpha(t)}C,\\
&= -b(t)e^{-\alpha(t)}C + a(t)e^{-\alpha(t)}C' + b(t)e^{-\alpha(t)}C,\\
&= a(t)e^{-\alpha(t)}C'
\end{aligned}$$

et, on a, de façon analogue à (14),

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad C' = \frac{1}{a(t)}e^{\alpha(t)}\mathcal{F}. \tag{40}$$

Ainsi, C est égale à une primitive quelconque de $\frac{1}{a(t)}e^{\alpha(t)}\mathcal{F}$, dont on sait qu'elle existe, d'après l'annexe U. On conclut en écrivant, avec le formalisme (30), sur l'existence d'une constante c telle que

$$C = c + \int \frac{1}{a(.)}e^{\alpha(.)}\mathcal{F}d.$$

et en réutilisant (39) ce qui permet de conclure. □

◊

A.4. Retour sur la formule de Duhamel

Nous allons pouvoir aussi utiliser les calculs précédents pour déterminer la solution de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad ay'(t) + by(t) = f(t), \tag{41a}$$

$$y(0) = y_0. \tag{41b}$$

Si f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on sait (voir par exemple [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"]) que la solution est donnée par la formule de Duhamel :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) = y_0 e^{-\frac{b}{a}t} + \frac{1}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)}f(u)du. \tag{42}$$

On peut affaiblir l'hypothèse sur f que l'on suppose appartenir à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Dans ce cas, la formule (42) est encore valable.

Proposition 12 (Formule de Duhamel)**.** *On suppose que f appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. L'unique solution de* (41) *est donnée par* (42).

Démonstration.

(1) On introduit tout d'abord la notation suivante :

Notation 13. Si z est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, on la prolonge sur $\mathbb{R}$ en définissant $\widetilde{z}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{z}(x) = \begin{cases} z(x), & \text{si } x \geq 0,\\ 0, & \text{si } x < 0.\end{cases} \tag{43}$$

Si de plus z est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, alors $\widetilde{z}$ l'est aussi sur $\mathbb{R}$ (au sens usuel, sauf en zéro) et grâce à la formule des sauts (proposition 6.35), on a

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T'_{\widetilde{z}} = \widetilde{z}' + z(0)\delta. \tag{44}$$

En fait, si z n'est que dérivable presque partout sur $\mathbb{R}_+$, $\widetilde{z}$ n'est que dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$ et (44) est encore valable (voir proposition 6.48 de la version longue).

Enfin, on a

Lemme 14. *Soient v et w deux fonctions appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Alors, le produit de convolution $\widetilde{v}*\widetilde{w}$ existe et est donné par*

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (\widetilde{v}*\widetilde{w})(x)=\begin{cases}0, & si\ x\leq 0,\\[2ex] \displaystyle\int_0^x v(x-y)w(y)dy, & si\ x\geq 0.\end{cases}\tag{45}$$

La restriction de $\widetilde{v}*\widetilde{w}$ à $\mathbb{R}_+$ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. De plus, si v et w sont dans $L^1(\mathbb{R}_+)$, alors la restriction de $\widetilde{v}*\widetilde{w}$ à $\mathbb{R}_+$ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Démonstration. On se contente de calculer, pour $x\in\mathbb{R}$, le produit $\widetilde{v}*\widetilde{w}$ donné par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (\widetilde{v}*\widetilde{w})(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)du.\tag{46}$$

Remarquons que, pour tout u,x dans $\mathbb{R}$,

$$(u<0 \text{ ou } x<u)\Longrightarrow \widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)=0.\tag{47}$$

En effet, si $u<0$, alors $\widetilde{w}(u)=0$. Si $x<u$, alors $x-u<0$ et $\widetilde{v}(x-u)=0$.
Soit donc $x\in\mathbb{R}$ fixé. Si $x<0$, alors, pour tout $u\in\mathbb{R}$, on a $u<0$ ou $x<u$. En effet, si $u<x$, on a $u<x<0$. Si $u>x$, alors $x<u$. Donc, d'après (47), la fonction $u\mapsto\widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)$ est nulle et son intégrale égale à $(\widetilde{v}*\widetilde{w})(x)$ est nulle. Ainsi, $(\widetilde{v}*\widetilde{w})(x)=0$. Au contraire, si $x>0$, on a pour $u<0$, $\widetilde{w}(u)=0$ et pour $u>x$, on a $\widetilde{v}(x-u)=0$. Ainsi, la fonction $u\mapsto\widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)$ est nulle sur $]-\infty,0[\cup]x,+\infty[$ et son intégrale se réduit donc à

$$h(x)=\int\widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)du=\int_0^x\widetilde{v}(x-u)\widetilde{w}(u)du=\int_0^x v(x-u)v(u)du.$$

Les autres résultats sont admis. □

(2) Démontrons la proposition. Supposons donc que y vérifie (41). Transformons l'équation différentielle (41) en une équation du type (11). On définit $\widetilde{y}$ grâce à la notation (13). D'après (44) appliqué à y, on a

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\quad T'_{\widetilde{y}}=\widetilde{y}'+y(0)\delta.\tag{48}$$

et donc

$$\begin{aligned}aT'_{\widetilde{y}}+bT_{\widetilde{y}}&=a\left(\widetilde{y}'+y(0)\delta\right)+b\widetilde{y},\\&=a\widetilde{y}'+b\widetilde{y}+ay_0\delta,\end{aligned}$$

et puisque y vérifie (41), on a donc $a\widetilde{y}'+b\widetilde{y}=\widetilde{f}$ et donc

$$aT'_{\widetilde{y}}+bT_{\widetilde{y}}=\widetilde{f}+ay_0\delta.$$

On a donc (11) vérifiée par $T_{\widetilde{y}}$ avec

$$\mathcal{F}=\widetilde{f}+ay_0\delta.\tag{49}$$

Puisque $\widetilde{f}$ et $\widetilde{y}$ sont nulles sur $\mathbb{R}_-$, les distributions associées sont dans $\mathcal{D}'_+$ et d'après la proposition 10, l'unique solution de (11) (dans $\mathcal{D}'_+$) est donnée par

$$T_{\widetilde{y}}=\mathcal{F}*Y_0.$$

soit compte tenu de (49)

$$\begin{aligned}T_{\widetilde{y}}&=\left(\widetilde{f}+ay_0\delta\right)*Y_0,\\&=Y_0*\widetilde{f}+ay_0\delta*Y_0,\end{aligned}$$

et donc

$$T_{\widetilde{y}}=Y_0*\widetilde{f}+ay_0Y_0.\tag{50}$$

Puisque f appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, alors $\widetilde{f}$ appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et d'après le lemme 14, la restriction de $Y_0*\widetilde{f}$ appartient $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. D'après (45), l'équation (50) implique que pour tout [2] $t\geq 0$

$$\begin{aligned}y(t)&=\widetilde{y}(t),\\&=\frac{1}{a}\int_0^t e^{-b(t-y)/a}f(y)dy+y_0e^{-bt/a},\end{aligned}$$

ce qui est exaxtement (42).

□

2. en fait, cela est vrai presque partout sur $\mathbb{R}$.

Remarque 15.

(1) Ces résultats pourraient aussi être obtenus en utilisant les résultat de [Bas22, la Section "Équations différentielles d'ordre un" du chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants"], fondés sur la méthode de la variation de la constante.

(2) Une autre façon de faire est de d'utiliser les transformations de Laplace (voir votre cours de OMI2).

(3) On peut aussi partir de l'expression donnée par (42) et vérifier que c'est bien la solution de (41).

(a) En effet, si y est donnée par (42), on a

$$y(0) = y_0 e^{-\frac{b}{a}\times 0} + \frac{1}{a}\int_0^0 e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du = y_0.$$

(b) De plus, on vérifie que si g est dérivable, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left(\int_0^t g(u-t)f(u)du\right)' = -\int_0^t g'(u-t)f(u)du + g(0)f(t). \tag{51}$$

Ainsi, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left(\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du\right)' = -\frac{b}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du + f(t),$$

et donc finalement, si on dérive (42),

$$\begin{aligned} ay'(t) + by(t) &= -y_0 b e^{-\frac{b}{a}t} + y_0 b e^{-\frac{b}{a}t} - \frac{b}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du + f(t) + \frac{b}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du, \\ &= f(t). \end{aligned}$$

(4) On laisse au lecteur le soin de vérifier que la solution de l'équation

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad ay'(t) + by(t) = f(t), \tag{52a}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{52b}$$

est

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad y(t) = y_{t_0} e^{-\frac{b}{a}(t-t_0)} + \frac{1}{a}\int_{t_0}^t e^{\frac{b}{a}(u-t)} f(u)du. \tag{53}$$

♢

A.5. Deux exemples

Exemple 16.
Cet exemple est issu de [Pet98, p. 52].

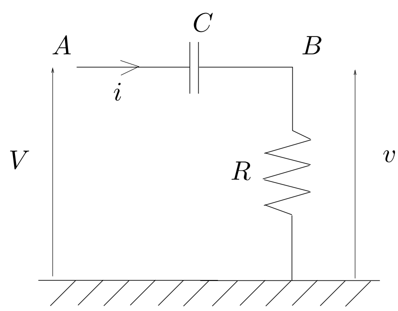


FIGURE 2. Le circuit dérivateur.

On étudie le circuit dérivateur représenté sur la figure 2. On pose $V = V_A$, $v = V_B$. En éliminant i entre

$$q = C(V - v),$$
$$v = Ri,$$
$$i = \dot{q},$$

on obtient

$$v = Ri = RC(\dot{V} - \dot{v}),$$

et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dot{v}(t) + \frac{v(t)}{\tau} = \dot{V}(t), \tag{54}$$

où

$$\tau = RC. \tag{55}$$

On suppose que pour $t \leq 0$, toute les tensions sont nulles. On a donc, en particulier,

$$\forall t \leq 0, \quad v(t) = V(t) = 0. \tag{56}$$

On suppose V connue et on cherche v.

(1) Écrire l'équation différentielle (54) sous la forme d'une équation différentielle de distribution et fournir la forme générale de la distribution T_v associée à v en fonction de la distribution V.

(2) Préciser l'expression de la solution $v = T_v$ si V est une distribution-fonction.

(3) Préciser la forme de v si $V(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

(1) Compte tenu de (54) et de (56), on est donc exactement dans le cadre de la proposition 10 avec $a = 1$, $b = 1/\tau$ et $\mathcal{F} = \dot{V}$. D'après (32), on a donc en notant $Y = T_v$:

$$\begin{aligned} T_v &= \mathcal{F} * Y_0, \\ &= \dot{V} * Y_0, \\ &= (V * Y_0)', \\ &= V * Y_0'. \end{aligned}$$

On sait que

$$Y_0' = \delta - 1/\tau Y_0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} T_v &= V * (\delta - 1/\tau Y_0), \\ &= V * \delta - 1/\tau V * Y_0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$T_v = V - 1/\tau V * Y_0.$$

(2) On suppose que V est une distribution-fonction, (notée v). D'après le lemme 14, on a donc, pour tout $t \geq 0$

$$v(t) = V(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^t V(u) e^{-(t-u)/\tau} du$$

(3) Si on a $V(t) = 1$ pour $t \geq 0$, alors

$$v(t) = 1 - \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \int_0^t e^{u/\tau} du = 1 - e^{-t/\tau}[e^{u/\tau}] = 1 - e^{-t/\tau}[e^{t/\tau} - 1] = 1 - 1 + e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau}.$$

On retrouve donc la réponse impulsionnelle, qui correspond bien à $y = \dot{H} = \delta$ et qui est une fonction discontinue en zéro.

Exemple 17. On s'intéresse à un circuit éléctrique constitué d'une inductance et d'une résistance et soumis à une tension $e(t)$:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad L\frac{di}{dt} + Ri = e. \tag{57}$$

On suppose que

$$\forall t \leq 0, \quad i(t) = 0, \tag{58}$$

et que $e(t)$ est un échelon de tension :

$$e(t) = E_0 H(t), \tag{59}$$

où E_0 est une constante.
On est encore exactement dans le cas de la proposition 10 avec $a = L$, $b = R$ et $\mathcal{F} = EH$. On alors

$$T_i = \mathcal{F} * Y_0 = E_0 H * Y_0.$$

De nouveau d'après le lemme (14)

$$\forall t \geq 0, \quad i(t) = \frac{E_0}{L}\int_0^t e^{-Ru/L} du = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right),$$

expression qui peut aussi être obtenue très rapidement à la main, comme c'est fait dans [Bas22, Chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants"] ! Cette fonction est continue en zéro.

Annexe B. Résolutions d'équations différentielles (ordinaires) d'ordre 2

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nous étudions l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY'' + bY' + cY = \mathcal{F}. \tag{60}$$

L'"inconnue" est ici la distribution Y de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La notion de conditions initiales n'a pas de sens au sens de distributions. Nous reviendrons dessus plus bas. La résolution de cette équation différentielle est très proche de la suivante, où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \tag{61}$$

où l'"inconnue" est ici la fonction y, deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On renvoie à la [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 2" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf` dont on s'inspire pour résoudre (60).
Le calcul est très proche de celui de la section 8.1 et, comme dans le cas des équations d'ordre un, la seule difficulté théorique est d'étudier l'équation homogène associée, dont le calcul est quasiment identique à celui des équations différentielles de fonctions. On s'inspire pour cela de la méthode élémentaire donnée dans le papier à la fois très complet et succinct de Daniel Perrin, disponible sur `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/CAPES/analyse/inte%CC%81grales-e%CC%81qua-diff/equadiff2010.pdf`
Nous allons

- en section B.2, donner les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (60) ;
- en section B.3.1, donner une réponse impulsionnelle, c'est-à-dire une solution de (60) avec un second membre égal à δ ;
- en section B.3.3, donner les solution générales de l' 'équation différentielle (60) ;
- et enfin, en section B.4, retrouver la solution générale connue d'une équation différentielle ordinaire bien connue, comme cas particulier.

B.1. Un lemme sur la "variation de la constante"

Lemme 18. *Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et b, c et $r \in \mathbb{R}$. On considère une distribution Z et une distribution Y donnée par*

$$Y = e^{rt} Z. \tag{62}$$

On a alors dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$aY'' + bY' + cY = e^{rt}\left(aZ'' + (2ar + b)Z' + (ar^2 + br + c)Z.\right). \tag{63}$$

Démonstration. Il suffit de calculer successivement dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, Y, Y' et Y'', en utilisant (62). On a respectivement

$$\begin{aligned} Y &= e^{rt}Z, \\ Y' &= re^{rt}Z + e^{rt}Z', \\ Y'' &= r^2e^{rt}Z + re^{rt}Z' + re^{rt}Z' + e^{rt}Z'', \\ &= r^2e^{rt}Z + 2re^{rt}Z' + e^{rt}Z''. \end{aligned}$$

On a donc

$$aY'' + bY' + cY = e^{rt}\left(ar^2Z + 2arZ' + aZ'' + brZ + bZ' + cZ\right)$$

dont on déduit, après réarangement des termes, (63). □

♢

B.2. Résolution générale de l'équation homogène associée (EHA)

Comme dans le lemme 4, où intervient la distribution-fonction définie par (17) (et une constante quelconque) solution de (74), nous allons tout d'abord définir une fonction définie par deux constantes quelconques et qui sera solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{64}$$

Le calcul est très ensuite proche de la résolution des équations différentielles de fonctions, pour l'équation homogène associée, donnée dans la [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 2" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] et rappelé dans le lemme 20.

Définition 19 (Définition de la fonction ξ)**.** L'équation caractéristique associée à (64) est

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{65}$$

qui admet *a priori* deux solutions complexes r_1 et r_2. On considère alors les différents cas suivants selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

(1) Si $\Delta \neq 0$: on a deux racines complexes distinctes r_1 et r_2.

  (a) Si $\Delta > 0$, r_1 et r_2 sont réelles données par

$$r_k = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{66}$$

  On définit alors, pour C_1 et C_2 deux constantes données, la fonction ξ par

$$\xi(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}. \tag{67}$$

  (b) Si $\Delta < 0$, r_1 et r_2 sont complexes conjuguées ; on considère $(\omega, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ définis par

$$r_k = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha \pm i\omega. \tag{68}$$

  On définit [3] alors, pour A et B deux constantes données, la fonction ξ par

$$\xi(t) = e^{\alpha t}\big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big). \tag{70}$$

(2) Si $\Delta = 0$: on a deux racines réelles confondues, égales à

$$r = -\frac{b}{2a}. \tag{71}$$

On définit alors, pour A et B deux constantes données, la fonction ξ par

$$\xi(t) = e^{rt}(At + B). \tag{72}$$

3. On peut aussi la mettre sous une autre forme équivalente :

$$\xi(t) = e^{\alpha t}A\cos(\omega t + \phi), \tag{69}$$

Lemme 20.
On reprend les notations de la définition 19.

(1) *La solution générale de* (64) *est la fonction* ξ *donnée dans la définition 19, définie par deux constantes, notées* (C_1, C_2) *ou* (A, B) *selon les différents cas.*

(2) *Pour tout couple de réel* (y_0, y'_0) *il existe (respectivement selon les cas 1a, 1b et 2) un unique couple respectivement noté* (C_1, C_2) *ou* (A, B) *tel que l'unique solution* ξ *définie donnée dans la définition 19, associée à ces constantes, vérifie les conditions initiales*

$$y(t_0) = y_0, \tag{73a}$$

$$y'(t_0) = y'_0. \tag{73b}$$

Démonstration.

(1) Voir [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 2" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"].

(2) Calcul simple laissé au lecteur. Chaque couple est donné par un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui admet une unique solution.

□

♢

Le lemme 21 n'est que la copie du point 1 du lemme 20, adapté aux distributions.

Lemme 21 (Résolution générale de l'équation homogène associée)**.** *Y est solution de l'équation homogène associée*

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY'' + bY' + cY = 0, \tag{74}$$

ssi Y est la distribution-fonction solution de l'équation différentielle (64) *et est égale à ξ, fournie par la définition 19.*

Démonstration.

(1) Premier cas : $\Delta = 0$. La racine unique r de l'équation caractéristique (65) est donnée par (71) et vérifie donc aussi

$$2ar + b = 0. \tag{75}$$

On considère Y solution de l'equation homogène associée et Z donnée par (62). D'après le lemme 63, on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= aY'' + bY' + cY, \\ &= \left(aZ'' + (2ar + b)Z' + (ar^2 + br + c)Z.\right), \end{aligned}$$

et d'après (65) et (75)

$$= aZ'',$$

et puisque $a \neq 0$, on a donc $Z'' = 0$. D'après la proposition 6.46, la distribution Z' est constante et il existe donc une constante A telle que

$$Z' = A = (At)'.$$

Puisque $(Z - At)' = 0$, en utilisant de nouveau la proposition 6.46, cela implique qu'il existe une constante B telle que

$$Z - At = B,$$

et donc

$$Z = At + B,$$

et, en revenant à Y grâce à (62), on en déduit (72).

(2) Deuxième cas : $\Delta > 0$.
Nous avons deux racines r_1 et r_2 données par (66), dont on déduit (ce qui provient aussi de résultats plus généraux sur la somme de racines de polynôme)

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}. \tag{76}$$

On considère Y solution de l'equation homogène associée et, cette fois-ci, Z donnée par (62) où

$$r = r_1. \tag{77}$$

D'après le lemme 63, on a donc

$$\begin{aligned}0 &= aY'' + bY' + cY,\\ &= \left(aZ'' + (2ar_1 + b)Z' + (ar_1^2 + br_1 + c)Z.\right),\end{aligned}$$

et donc, d'après l'équation caractéristique (65), on a

$$aZ'' + (2ar_1 + b)Z' = 0.$$

soit

$$a(Z')' + (2ar_1 + b)Z' = 0.$$

ou encore

$$Z'' + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right) Z' = 0.$$

D'après le lemme 4, il existe une constante K telle que

$$Z' = Ke^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t}.$$

Puisque $\Delta \neq 0$, on vérifie que

$$2r_1 + \frac{b}{a} \neq 0.$$

On en déduit

$$Z' = \left(-\frac{K}{2r_1 + \frac{b}{a}} e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t}\right)'$$

et, donc, d'après la proposition 6.46, qu'il existe une constante C_1 telle que

$$Z = -\frac{K}{2r_1 + \frac{b}{a}} e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t} + C_1.$$

soit, en notant

$$C_2 = -\frac{K}{2r_1 + \frac{b}{a}},$$

on a

$$Z = C_2 e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t} + C_1.$$

En revenant à Y grâce à (62) (avec (77)), on en déduit

$$\begin{aligned}Y &= e^{r_1 t}\left(C_2 e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)t} + C_1\right),\\ &= C_2 e^{\left(-2r_1-\frac{b}{a}+r_1\right)t} + C_1 e^{r_1 t},\\ &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{\left(-r_1-\frac{b}{a}\right)t},\end{aligned}$$

et d'après (76), on a $-r_1 - \frac{b}{a} = r_2$ et donc

$$= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

ce qui montre (67).

(3) Troisième cas : $\Delta < 0$.

Ici, on utilise une méthode légèrement différente de celle utilisée dans `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/CAPES/analyse/inte%CC%81grales-e%CC%81qua-diff/equadiff2010.pdf` afin de pouvoir l'adapter aux distributions.

Il suffit de reprendre les calculs du cas 2 en supposant cette fois-ci que les racines r_1 et r_2 sont complexes, données par (66). Il existe donc des complexes C_1 et C_2 tels que (67) ait lieu. Avec les notations (68), on a donc

$$Y = C_1 e^{(\alpha+i\omega)t} + C_2 e^{(\alpha-i\omega)t},$$

et donc

$$Y = e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) \tag{78}$$

On écrit ensuite que la distribution-fonction Y est à valeurs réelles. On la note désormais sous la forme $Y = y$. D'après (78), on a

$$\overline{y(t)} = \overline{(e^{\alpha t})}\left(\overline{C_1}\,\overline{(e^{i\omega t})} + \overline{C_2}\,\overline{(e^{-i\omega t})}\right)$$

et donc, puisque α et ω sont réels, on a

$$\overline{y(t)} = e^{\alpha t}\left(\overline{C_1} e^{-i\omega t} + \overline{C_2} e^{i\omega t}\right) \tag{79}$$

De (78) et (79), on déduit

$$y(t) - \overline{y(t)} = e^{\alpha t}\left(\left(C_1 - \overline{C_2}\right) e^{i\omega t} + \left(C_2 - \overline{C_1}\right) e^{-i\omega t}\right). \tag{80}$$

On a donc, pour tout t, puisque $y(t)$ est réel

$$0 = y(t) - \overline{y(t)}$$

et donc, d'après (80),

$$\left(C_1 - \overline{C_2}\right) e^{i\omega t} + \left(C_2 - \overline{C_1}\right) e^{-i\omega t} = 0.$$

Puisque cela est vrai pour tout t, on peut prendre deux valeurs différentes de t et vérifier que cela implique

$$C_1 = \overline{C_2} \text{ et } C_2 = \overline{C_1}$$

Si on remplace cela dans (78), on a donc

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\omega t} + \overline{C_1} e^{-i\omega t}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\omega t} + \overline{C_1 e^{i\omega t}}\right), \\ &= 2e^{\alpha t}\,\mathrm{Re}\left(C_1 e^{i\omega t}\right). \end{aligned}$$

Si on écrit $C_1 = K + iK'$, avec K et K' réels, o a donc

$$\begin{aligned} C_1 e^{i\omega t} &= (K + iK')e^{i\omega t}, \\ &= (K + iK')\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right), \\ &= K\cos(\omega t) - K'\sin(\omega t) + i\left(K\sin(\omega t) + K'\cos(\omega t)\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{Re}(y(t)) = K\cos(\omega t) - K'\sin(\omega t),$$

et, d'après ce qui précède

$$y(t) = 2e^{\alpha t}\left(K\cos(\omega t) - K'\sin(\omega t)\right)$$

ce qui permet de montrer (66), en posant $A = 2K$ et $B = -2K'$.

□

◇

La suite du calcul est très proche de celui de la section 8.1.

B.3. Résolution générale de l'équation avec second membre

Comme annoncé dans [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre deux" du chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants"], on peut soit chercher une solution particulière soit utiliser la méthode de la variation de la constante. Ici, nous utiliserons la recherche d'une solution particulière.

B.3.1. Recherche d'une solution particulière le cas où $\mathcal{F} = \delta$.

La réponse impulsionnelle est la solution de (60) dans le cas où $\mathcal{F} = \delta$: on considère donc l'équation différentielle :

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad aY'' + bY' + cY = \delta. \tag{81}$$

La technique est légèrement différente de celle du lemme 5 mais le résultat en est assez proche. À la différence de ce lemme, on ne cherche pas toutes les solutions de (81) mais une solution (voir le lemme 23). Néanmoins, on montrera *a priori* dans la section B.3.5 (voir proposition 28) qu'en fait on obtient bien toutes les solutions de (81).

Grâce au lemme 20, on définit tout d'abord la fonction ξ_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

Définition 22. Il existe une unique fonction ξ_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \tag{82a}$$

$$y(0) = 0, \tag{82b}$$

$$y'(0) = \frac{1}{a}. \tag{82c}$$

Elle est donnée par (en utilisant les notations du lemme 20) :

$$\text{si } \Delta > 0, \quad \xi_0(t) = \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{a(r_1 - r_2)}., \tag{83a}$$

$$\text{si } \Delta < 0, \quad \xi_0(t) = \frac{e^{\alpha t} \sin(\omega t)}{a\omega},, \tag{83b}$$

$$\text{si } \Delta = 0, \quad \xi_0(t) = \frac{e^{rt} t}{a}. \tag{83c}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser les différentes équations le lemme 20. Les différentes constantes intervenant dans ces fonctions sont données par (82b) et (82c) et qui fournissent les différents cas (selon les cas 1a, 1b et 2), données ici :

$$C_1 + C_2 = 0, \quad r_1 C_1 + r_2 C_2 = 1/a,$$

ou

$$A = 0, \quad B\omega + A\alpha = 1/a,$$

ou

$$B = 0, \quad rB + A = 1/a.$$

dont on déduit successivement

$$C_1 = \frac{1}{a(r_1 - r_2)}, \quad C_2 = -\frac{1}{a(r_1 - r_2}, \\ A = 0, \quad B = \frac{1}{a\omega}, \\ A = \frac{1}{a}, \quad B = 0,$$

dont on déduit (83). □

◇

Lemme 23 (Une réponse impulsionnelle)**.** *Une solution particulière de* (81) *est donnée par la distribution-fonction Y_0 définie de la façon suivante :*

(1) On considère l'unique fonction ξ_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ fournie par la définition 22 ;

(2) On considère alors la distribution-fonction Y_0 donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = \begin{cases} \xi_0(t), & si\ t > 0, \\ 0, & si\ t < 0. \end{cases} \tag{84}$$

ce qui est équivalent à

$$Y_0 = \xi_0 H, \tag{85}$$

où H est la fonction de Heaviside.

Démonstration. On cherche Y une solution particulière de (81) sous la forme

$$Y = yH, \tag{86}$$

où y est une fonction classe $\mathcal{C}^\infty$ ce qui est légitime comme le produit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ par la distribution H. On calcule dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ successivement en utilisant la proposition 6.53 et l'équation (6.75) de la proposition 6.51

$$Y_0 = yH,$$

puis

$$\begin{aligned}
Y_0' &= (yH)', \\
&= y'H + yH', \\
&= y'H + y\delta, \\
&= y'H + y(0)\delta,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
Y_0'' &= \left(y'H + y(0)\delta\right)', \\
&= \left(y'H\right)' + \left(y(0)\delta\right)', \\
&= y''H + y'H' + y(0)\delta', \\
&= y''H + y'\delta + y(0)\delta', \\
&= y''H + y'(0)\delta + y(0)\delta',
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
aY'' + bY' + cY &= a\left(y''H + y'(0)\delta + y(0)\delta'\right) + b\left(y'H + y(0)\delta\right) + c\left(yH\right), \\
&= ay''H + ay'(0)\delta + ay(0)\delta' + by'H + by(0)\delta + cyH, \\
&= \left(ay'' + by' + cy\right)H + \left(ay'(0) + by(0)\delta\right)\delta + ay(0)\delta',
\end{aligned}$$

et puisque Y doit être solution de (81), on a donc (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)

$$\left(ay'' + by' + cy\right)H + \left(ay'(0) + by(0)\delta\right)\delta + ay(0)\delta' = \delta,$$

soit

$$\left(ay'' + by' + cy\right)H + \left(ay'(0) + by(0) - \delta\right)\delta + ay(0)\delta' = 0.$$

Pour cela, il suffit que

$$\left(ay'' + by' + cy\right)H = 0, \tag{87a}$$

$$ay'(0) + by(0) - 1 = 0, \tag{87b}$$

$$ay(0) = 0. \tag{87c}$$

L'équation (87a) est vraie ssi

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0,$$

ce qui est fait en vrai si (64) a lieu. Notons que (87b) et (87c) sont équivalentes à

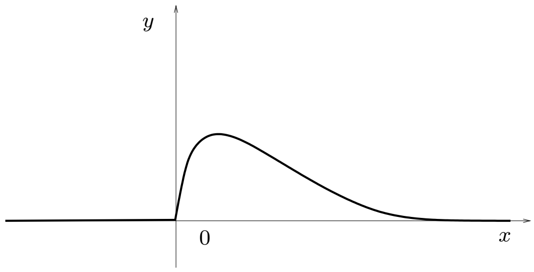
$$y(0) = 0, \tag{88a}$$

$$y'(0) = \frac{1}{a}. \tag{88b}$$

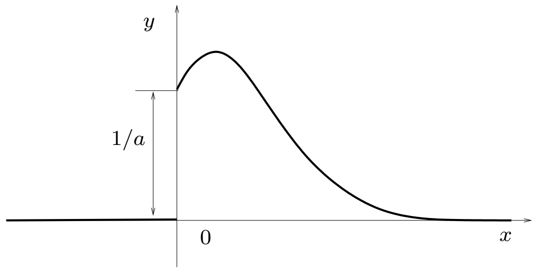
Choisissons y comme solution de l'équation différentielle (64) avec les conditions initiales (88). D'après la définition 22, alors est nécessairement y égale à ξ_0, ce qui permet de conclure, d'après (86) qui implique (85). □

Remarque 24. En fait, d'après (85), les valeurs de y pour $t < 0$ n'interviennent pas. De façon analogue à la figure (1), on peut tracer la distribution-fonction Y_0 et sa dérivée usuelle : voir figure 3.

◊



(a) la fonction



(b) sa dérivée usuelle

FIGURE 3. La distribution-fonction Y_0.

B.3.2. Recherche d'une solution particulière dans le cas général.
Le lemme suivant est l'analogue du lemme 6.

Lemme 25 (Une solution particulière dans le cas général)**.** *Une solution de* (60) *est donnée par*

$$Y = \mathcal{F} * Y_0, \tag{89}$$

où Y_0 *est donnée par* (85)*. On admettra que ce produit existe*[4]*.*

Démonstration. Notons que d'après le lemme 23, une solution de (81) est donnée par $Y = Y_0$. On a donc

$$aY_0'' + bY_0' + bY_0 = \delta. \tag{90}$$

Utilisons pour conclure les deux égalités fondamentales du cours : les équations (7.20), (7.22) et (7.26) pour $n = 2$, qui impliquent successivement, en considérant Y défini par (89) :

$$\begin{aligned} aY'' + bY' + cY &= a(\mathcal{F} * Y_0)'' + b(\mathcal{F} * Y_0)' + c(\mathcal{F} * Y_0), \\ &= a\mathcal{F} * Y_0'' + b\mathcal{F} * Y_0' + c\mathcal{F} * Y_0, \\ &= \mathcal{F} * (aY_0'' + b'Y_0 + cY_0), \end{aligned}$$

et d'après (90)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F} * \delta, \\ &= \mathcal{F}, \end{aligned}$$

□

B.3.3. Résolution générale.
On conclut enfin exactement comme pour la proposition (8).

Proposition 26 (Résolution générale)**.** *Les solutions de* (60) *sont données par : il existe une distribution-fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, notée* ξ*, donnée dans la définition 19 (et donc définie par deux constantes) et une unique distribution* Y_0 *définie par* (85) *telles que*

$$Y = \underbrace{\mathcal{F} * Y_0}_{\textit{une solution particulière de l'équation générale}} + \underbrace{\xi}_{\textit{la solution générale de l'EHA}}. \tag{91}$$

Démonstration. Il suffit de considérer Y une solution quelconque de (81) et de poser $Z = Y - Y_p$, où $Y_p = \mathcal{F} * Y_0$, où Y_0 est définie par (85). On a alors, par linéarité

$$aZ'' + bZ' + cZ = aY' + bY' + cZ - \left(aY_p'' + bY_p\right)$$

4. Tout du moins, on fera implicitement l'hypothèse qui assure l'existence ce produit de convolution.

qui vaut $\mathcal{F}-\mathcal{F}=0$ puisque Y et Y_p sont toutes les deux solutions de (81). D'après le lemme 21 appliqué à Z, on a donc $Z=\xi$. Il vient donc $Y-Y_p=\xi$, dont on déduit (91). □

B.3.4. *Traitement de la condition initiale.*

Proposition 27 (Résolution générale avec une condition initiale particulière)**.** *On suppose que $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{D}'_+$. L'unique solution de* (60) *dans $\mathcal{D}'_+$ est donnée par*

$$Y=\mathcal{F}*Y_0, \tag{92}$$

où Y_0 est définie par (85)

Démonstration. D'après la proposition 26, toutes les solutions de (11) sont données par (91). Si on impose que Y est dans $\mathcal{D}'_+$, alors nécessairement ξ est nul. En effet, pour toute fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support inclus dans $\mathbb{R}_-^*$, on a par définition (voir la définition 7.8)

$$0=\langle Y,\phi\rangle=\langle F*Y_0,\phi\rangle+\langle\xi,\phi\rangle.$$

on a $\langle F*Y_0,\phi\rangle=0$ puisque F, Y_0 et $F*Y_0$ sont dans $\mathcal{D}'_+$ (voir remarque 7.13). On a donc

$$0=\langle\xi,\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}_-}\xi(t)\phi(t)dt. \tag{93}$$

Puisque (93) a lieu pour toute fonction test à support inclus dans $\mathbb{R}_-^*$, cela signifie que la fonction ξ est nulle. En effet, on peut considérer $\widetilde{\xi}$, la restriction de ξ à $\mathbb{R}_-$. D'après (93), on peut donc écrire, en considérant $T_{\widetilde{\xi}}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-)$

$$\forall\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}_-),\quad \left\langle T_{\widetilde{\xi}},\phi\right\rangle=0,$$

ce qui signifie d'après le théorème 6.16, que $T_{\widetilde{\xi}}$ est nulle, et $\widetilde{\xi}$ est donc (presque partout) nulle sur $\mathbb{R}_-$ et par continuité, nulle sur $\mathbb{R}_-$. Vue la forme de $\widetilde{\xi}$ comme restriction sur $\mathbb{R}_-$ de la fonction donnée dans la définition 19, et donc définie par deux constantes, on laisse au lecteur vérifier que, dans tous les cas, ces constantes sont nulles, ce qui implique la nullité de ξ. Ainsi, Y est unique et est donnée par (92). □

B.3.5. *Retour sur la recherche de toutes les solutions dans le cas où $\mathcal{F}=\delta$ (réponse impulsionnelle).*

En fait le lemme 23 permet d'obtenir toutes les réponses impulsionnelles, comme dans le lemme 5.

Proposition 28 (Réponses impulsionnelles)**.** *Les solutions de* (81) *sont données par : il existe une distribution-fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée ξ, donnée dans la définition 19 (et donc définie par deux constantes) telle que*

$$Y=\xi+Y_0, \tag{94}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition 26 avec $\mathcal{F}=\delta$. Dans ce cas, $\mathcal{F}*Y_0=\delta*Y_0=Y_0$ et (91) implique (94). □

◇

B.4. Retour sur la formule de Duhamel

Nous allons pouvoir aussi utiliser les calculs précédents pour déterminer la solution de l'équation différentielle

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad ay''(t)+by'(t)+cy(t)=f(t), \tag{95a}$$
$$y(0)=y_0, \tag{95b}$$
$$y'(0)=y'_0, \tag{95c}$$

et obtenir une formule proche de la formule de Duhamel (42).

Proposition 29 (Formule de Duhamel)**.** *On suppose que f appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. L'unique solution de (95) est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) = \int_0^t \xi_0(t-y)f(y)dy + ay_0\xi_0'(t) + (ay_0' + by_0)\xi_0(t). \tag{96}$$

Plus précisement, en uilisant la définition 22, on a

$$\textit{si } \Delta > 0, \quad y(t) = \frac{1}{a(r_1-r_2)}\int_0^t \left(e^{r_1(t-y)} - e^{r_2(t-y)}\right) f(y)dy + \frac{y_0}{r_1-r_2}\left(r_1e^{r_1t} - r_2e^{r_2t}\right) + \frac{ay_0'+by_0}{a(r_1-r_2)}\left(e^{r_1t}-e^{r_2t}\right), \tag{97a}$$

$$\textit{si } \Delta < 0, \quad y(t) = \frac{1}{a\omega}\int_0^t e^{\alpha(t-y)}\sin(\omega(t-y))f(y)dy + \frac{y_0}{\omega}\left(\alpha e^{\alpha t}\sin(\omega t) + \omega e^{\alpha t}\cos(\omega t)\right) + \frac{ay_0'+by_0}{a\omega}e^{\alpha t}\sin(\omega t), \tag{97b}$$

$$\textit{si } \Delta = 0, \quad y(t) = \frac{1}{a}\int_0^t e^{r(t-y)}(t-y)f(y)dy + ry_0e^{rt}(rt+1) + \frac{(ay_0'+by_0)}{a}e^{rt}t. \tag{97c}$$

Démonstration. On raisonne comme dans la proposition 12.
Supposons donc que y vérifie (95). On supposera que y admet une dérivée seconde. Transformons l'équation différentielle (95) en une équation du type (60). On définit $\widetilde{y}$ grâce à la notation (13). Puisque y admet une dérivée seconde, $\widetilde{y}$ admet une dérivée seconde usuelle[5] sur $\mathbb{R}^*$. On a tout d'abord (48), que l'on peut dériver de nouveau sous la forme

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T_{\widetilde{y}}'' = \left(\widetilde{y}'\right)' + y(0)\delta'. \tag{98}$$

Puisque $\widetilde{y}'$ admet un saut égal à $y'(0)$ en zéro et que sa dérivée usuelle vaut $\widetilde{y}''$, on a donc d'après la formule de sauts (proposition 6.35)

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \left(\widetilde{y}'\right)' = \left(T_{\widetilde{y}'}\right)' = \widetilde{y}'' + y'(0)\delta.$$

et donc, d'après (98)

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad T_{\widetilde{y}}'' = \widetilde{y}'' + y'(0)\delta + y(0)\delta'. \tag{99}$$

On a donc, d'après (48) et (99) :

$$\begin{aligned} aT_{\widetilde{y}}'' + bT_{\widetilde{y}}' + cT_{\widetilde{y}} &= a\left(\widetilde{y}'' + y'(0)\delta + y(0)\delta'\right) + b\left(\widetilde{y}' + y(0)\delta\right) + c\widetilde{y}, \\ &= \left(a\widetilde{y}'' + b\widetilde{y}' + c\widetilde{y}\right) + ay(0)\delta' + \left(ay'(0) + by(0)\right)\delta, \end{aligned}$$

et donc, d'après les conditions initiales (95b) et (95c), on a

$$aT_{\widetilde{y}}'' + bT_{\widetilde{y}}' + cT_{\widetilde{y}} = \left(a\widetilde{y}'' + b\widetilde{y}' + c\widetilde{y}\right) + ay_0\delta' + \left(ay_0' + by_0\right)\delta.$$

Puisque y vérifie (95), on a donc $a\widetilde{y}'' + b\widetilde{y}' + c\widetilde{y} = \widetilde{f}$ et donc

$$aT_{\widetilde{y}}'' + bT_{\widetilde{y}}' + cT_{\widetilde{y}} = \widetilde{f} + ay_0\delta' + \left(ay_0' + by_0\right)\delta. \tag{100}$$

On a donc (60) vérifiée par $T_{\widetilde{y}}$ avec

$$\mathcal{F} = \widetilde{f} + ay_0\delta' + \left(ay_0' + by_0\right)\delta. \tag{101}$$

Puisque $\widetilde{f}$ et $\widetilde{y}$ sont nulles sur $\mathbb{R}_-$, les distributions associées sont dans $\mathcal{D}'_+$ et d'après la proposition 27, l'unique solution de (81) (dans $\mathcal{D}'_+$) est donnée par

$$T_{\widetilde{y}} = \mathcal{F} * Y_0.$$

soit compte tenu de (101)

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{y}} &= \left(\widetilde{f} + ay_0\delta' + \left(ay_0' + by_0\right)\delta\right) * Y_0, \\ &= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0\delta' * Y_0 + \left(ay_0' + by_0\right)\delta * Y_0, \\ &= \widetilde{f} * Y_0 + ay_0Y_0' + \left(ay_0' + by_0\right)Y_0, \end{aligned}$$

5. en toute rigueur définie presque partout sur $\mathbb{R}$.

et d'après (85)

$$
\begin{aligned}
&= \widetilde{f} * Y_0 + a y_0 \left(\xi_0 H\right)' + \left(a y_0' + b y_0\right) \xi_0 H, \\
&= \widetilde{f} * Y_0 + a y_0 \left(\xi_0' H + \xi_0 H'\right) + \left(a y_0' + b y_0\right) \xi_0 H, \\
&= \widetilde{f} * Y_0 + a y_0 \xi_0 \delta + \left(a y_0' + b y_0\right) \xi_0 H + a y_0 \xi_0' H, \\
&= \widetilde{f} * Y_0 + a y_0 \xi_0(0) \delta + \left(a y_0' + b y_0\right) \xi_0 H + a y_0 \xi_0' H,
\end{aligned}
$$

et d'après (82b)

$$
= \widetilde{f} * Y_0 + 0 \times \delta + \left(a y_0' + b y_0\right) \xi_0 H + a y_0 \xi_0' H,
$$

et donc

$$
T_{\widetilde{y}} = \widetilde{f} * Y_0 + \left(a y_0' + b y_0\right) \xi_0 H + a y_0 \xi_0' H. \tag{102}
$$

On conclue enfin en utilisant (45) et (102) : pour tout [6] $t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \widetilde{y}(t), \\
&= \int_0^t \xi_0(t-y) f(y) dy + \left(a y_0' + b y_0\right) \xi_0(t) + a y_0 \xi_0'(t),
\end{aligned}
$$

ce qui est exactement (96). □

Remarque 30.

(1) Ces résultats pourraient aussi être obtenus en utilisant les résultat de [Bas22, la Section "Équations différentielles d'ordre deux" du chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants"]. fondés sur la méthode de la double variation de la constante.

(2) Une autre façon de faire est de d'utiliser les transformations de Laplace (voir votre cours de OMI2).

(3) On peut aussi partirde l'expression donnée par (96) et vérifier que c'est bien la solution de (95), comme c'est fait dans la remarque 15. On peut remarquer que y est la somme de y_1 et y_2 (qui sont en fait respectivement une solution de l'équation particulière de (95a) la solution générale de l'équation homogène associée (64)) donnée par

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= \int_0^t \xi_0(t-y) f(y) dy, \\
y_2(t) &= a y_0 \xi_0'(t) + (a y_0' + b y_0) \xi_0(t).
\end{aligned}
$$

Puisque ξ_0 (et donc ξ_0') sont solutions de (64)), par linéarité y_2 l'est aussi. Vérifions que y_1 est solution de (95a). D'après (51), on a successivement (grâce à (82b) et (82c)) :

$$
\begin{aligned}
y_1'(t) &= \left(\int_0^t \xi_0(t-y) f(y) dy\right)', \\
&= \int_0^t \xi_0'(t-y) f(y) dy + \xi_0(0) f(t), \\
&= \int_0^t \xi_0'(t-y) f(y) dy,
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
y_1''(t) &= \left(\int_0^t \xi_0(t-y) f(y) dy\right)'', \\
&= \left(\int_0^t \xi_0'(t-y) f(y) dy\right)', \\
&= \int_0^t \xi_0''(t-y) f(y) dy + \xi_0'(0) f(t), \\
&= \int_0^t \xi_0''(t-y) f(y) dy + \frac{1}{a} f(t).
\end{aligned}
$$

On a donc puisque ξ_0 est solution de (64)

$$
\begin{aligned}
a y_1''(t) + b y_1'(t) + c y_1(t) &= \int_0^t \left(a \xi_0''(t-y) + b \xi_0'(t-y) + c \xi_0(t-y)\right) f(t) dt + f(t), \\
&= f(t).
\end{aligned}
$$

6. en fait, cela est vrai presque partout sur $\mathbb{R}$.

et par linéarité, on a donc

$$ay''(t) + by(t) + cy(t) = f(t).$$

Vérifions enfin les conditions initiales (95b) et (95c). D'après (82b) et (82c), on a donc

$$\begin{aligned} y(0) &= \int_0^0 \xi_0(0-y)f(y)dy + ay_0\xi_0'(0) + (ay_0' + by_0)\xi_0(0), \\ &= y_0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y'(0) &= \int_0^0 \xi_0'(0-y)f(y)dy + \xi_0(0)f(0) + ay_0\xi_0''(0) + (ay_0' + by_0)\xi_0'(0), \\ &= y_0(-b\xi_0'(0) - c\xi_0(0)) + (ay_0' + by_0)\xi_0'(0), \\ &= (-by_0 + ay_0' + by_0)\xi_0'(0) - cy_0\xi_0(0), \\ &= y_0', \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure (par unicité de la solution).

♢

B.5. Exemples

Exemple 31 (Une équation de distribution particulière)**.** Chercher toutes les distributions $Y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad Y'' + Y = \delta, \tag{103}$$

et déterminer celles qui appartiennentà $\mathcal{D}'_+$.
D'après la proposition 26, il existe une distribution-fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée ξ, donnée dans la définition 19 (et donc définie par deux constantes) et une unique distribution Y_0 définie par (85) telles que Y est donnée par (91). L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (103) est $r^2 + 1 = 0$ dont les racines sont $\pm i$. Ainsi, d'après la définition 19 et l'équation (85), on a

$$Y = \delta * Y_0 + \xi = Y_0 + \xi,$$

et on laisse au lecteur le soin de vérifier que

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A\cos t + B\sin t, \\ \xi_0(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$

où A et B sont deux constantes quelconques et donc

$$Y = H\sin t + A\cos t + B\sin t. \tag{104}$$

Si, on impose que Y appartient à $\mathcal{D}'_+$, alors, d'après la proposition 92, la seule solution est donnée par

$$Y = H\sin t. \tag{105}$$

Exemple 32 (Une équation de distribution particulière)**.** Chercher toutes les distributions $Y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad Y'' - 3Y' + 2Y = \delta, \tag{106}$$

et déterminer celles qui appartiennentà $\mathcal{D}'_+$.
L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$, c'est-à-dire $(r-1)(r-2) = 0$, dont les racines sont 1 et 2. Comme dans l'exemple 31, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$Y = H\left(e^t - e^{2t}\right) + C_1e^t + C_2e^{2t}. \tag{107}$$

Si, on impose que Y appartient à $\mathcal{D}'_+$, alors, d'après la proposition 92, la seule solution est donnée par

$$Y = H\left(e^t - e^{2t}\right). \tag{108}$$

Exemple 33 (Choc en mécanique)**.** On considère un point matériel de masse m, soumis à un ressort linéaire de raideur k et à un amortissement visqueux C, dont le mouvement est donc gouverné par l'équation différentielle

$$\forall t, \quad mx''(t) + kx(t) + Cx'(t) = f(t), \tag{109}$$

où f est l'unique force extérieure appliquée. Si le solide est initialement au repos et que l'on commence appliquer une force f continue à partir de $t = 0$, la fonction x étant de classe C^2, $x(0)$ et $x'(0)$ sont nuls. Il est des cas où si on applique une force f non continue, on peut avoir une discontinuité de la vitesse initiale.
On suppose que le solide est initialement au repos et qu'on le soumet à un choc, appelé percussion, souvent considérée comme une grandeur infiniment grande appliquée sur un intervalle infiniment petit (autour de zéro, par exemple). Le bon cadre est celui des distribution, de prendre $f = F\delta$ et de considérer (109) au sens des distributions sur $\mathbb{R}$. La distribution $F\delta$ peut être considérée, comme la limite, au sens des disributions, quand ε tend vers zéro de la fonction valant $F\varepsilon$ sur $[-F\varepsilon/2, -F\varepsilon/2]$ comme nous le montrent l'exemple 6.29, l'exercice 6.2 de TD (avec $n = 1/\varepsilon$) ou le TP 2.1. On cherche donc la distribution $X \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'_+$ telle que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = F\delta, \tag{110}$$

où F est une constante, ce qui est exactement le cadre de la proposition 27 (puisque $F\delta$ est dans $\mathcal{D}'_+$) avec $\mathcal{F} = F\delta$. On a donc, grâce à (92) :

$$X = \mathcal{F} * Y_0 = F\delta * Y_0 = FY_0,$$

Ainsi, d'après (85), X est une distribution-fonction, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et égale à $F\xi_0$ sur $\mathbb{R}_+$ où ξ_0 est donnée dans la définition 22 (avec $a = m$, $b = C$ et $c = k$). Bref, on a donc

$$\forall t \geq 0, \quad X(t) = FY_0(t) = F\xi_0(t)H(t). \tag{111}$$

Ainsi, X est une distribution-fonction (voir figure 3), nulle sur $\mathbb{R}_-$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, continue en zéro, dont la dérivée admet une discontinuité en zéro.

Exemple 34 (Infinités de chocs successifs en mécanique)**.**
Traitons cet exemple sous la forme d'un exercice corrigé (donnée en examen à l'automne 2022).
Énoncé
Soient $\tau > 0$ et (F_n) une suite quelconque de réels.

(1) On cherche toutes les distributions $X \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'_+$ telles que

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \delta_{\tau n}. \tag{112}$$

et celles qui appartiennent à $\mathcal{D}'_+$.

(a) Montrer que la distribution suivante existe

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \delta_{\tau n}. \tag{113}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chercher tout d'abord une solution particulière de

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \delta_{\tau n}. \tag{114}$$

(c) Par linéarité, trouver une solution particulière de (112) et conclure.

(2) Chercher une situation physique correspondant à $k = 0$ et $C > 0$?

Corrigé

(1) (a) Nous avons déjà vu (voir remarque 6.5 page 102 des corrections de TD) que la distribution définie par

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \delta_{\tau n}. \tag{115}$$

existe ; il suffit pour cela de considérer la suite définie par $a_i = i\tau$ et de remplacer σ_{a_i} par F_i.

(b) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Cherchons tout d'abord une solution particulière de

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \delta_{\tau n}. \tag{116}$$

D'après le lemme 23, Y_n, une solution particulière de (60) avec

$$a = m, \quad b = C, \quad c = K \tag{117}$$

et

$$\mathcal{F} = \delta_{nT}, \tag{118}$$

est donnée par (84) (où ξ_0 est fournie par la définition 22). Ainsi, d'après le lemme (25), $\widetilde{Y}_n$, une solution particulière de (116) est donnée par

$$\widetilde{Y}_n = \delta_{\tau n} * Y_n.$$

D'après (85), on a donc

$$\widetilde{Y}_n = \delta_{\tau n} * (\xi_0 H) \tag{119}$$

D'après ce que l'on a déjà vu , on sait que si f est une distribution-fonction, on a

$$\delta_{\tau n} * f = f(. - \tau n), \tag{120}$$

et d'après (119), on a donc

$$\widetilde{Y}_n = (\xi_0 H)(. - \tau n), \tag{121}$$

c'est-à-dire (on rappelle que ξ_0 est donnée par la définition 22 avec (117)) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{Y}_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0\tau n, \\ \xi_0(t - \tau n), & \text{si } x \geq \tau n. \end{cases} \tag{122}$$

qui appartient donc à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

(c) Il suffit de sommer ensuite toute les solutions données par (en les multipliant par F_i) (121).

- Tout d'abord, montrons qu'existe la somme suivante :

$$\widetilde{Y} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n (\xi_0 H)(. - \tau n). \tag{123}$$

Prenons une fonction test ϕ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support inclus dans $[A, B]$. On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{n=0}^{p} F_n (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \right\rangle &= \sum_{n=0}^{p} F_n \langle (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \rangle, \\
&= \sum_{n=0}^{p} F_n \int_{\mathbb{R}} (\xi_0 H)(t - \tau n)\phi(t)dt,
\end{aligned}$$

on pose de nouveau $u = t - \tau n$ dans chaque intégrale

$$= \sum_{n=0}^{p} F_n \int_{\mathbb{R}} (\xi_0 H)(u)\phi(u + \tau n)du,$$

et donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \left\langle \sum_{n=0}^{p} (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \right\rangle = \sum_{n=0}^{p} F_n \int_0^{+\infty} \xi_0(u)\phi(u + \tau n) du. \tag{124}$$

Puisque $n\tau$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq N, \quad \tau p \geq B. \tag{125}$$

Soit $p \geq N$, alors d'après (125), pour tout $n \geq p$, pour tout $u \geq 0$, on a $u + \tau n \geq \tau p \geq B$ et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \xi_0(u)\phi(u + \tau n)du$ est nulle. Ainsi, d'après (124)

$$\forall p \geq N, \quad \left\langle \sum_{n=0}^{p} F_n (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \right\rangle = \sum_{n=0}^{N} F_n \int_0^{+\infty} \xi_0(u)\phi(u + \tau n) du,$$

qui est une somme finie, indépendante de p. On peut donc faire tendre p vers l'infini et donc

$$\left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} (\xi_0 H)(. - \tau n), \phi \right\rangle = \sum_{n=0}^{N} F_n \int_0^{+\infty} \xi_0(u)\phi(u + \tau n) du,$$

ce qui nous montre que la distribution définie par (123) est définie.

- Grâce au lemme 6.55 page 87, on a donc (par linéarité de la somme "infinie" en fait)

$$\begin{aligned}
m\left(\widetilde{Y}\right)'' + k\widetilde{Y} + C\left(\widetilde{Y}\right)' &= m\left(\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n\right)'' + k\left(\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n\right) + C\left(\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n\right)', \\
&= m\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n'' + k\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n' + C\sum_{n=0}^{+\infty} F_n \widetilde{Y}_n', \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \left(m\widetilde{Y}_n'' + k\widetilde{Y}_n + C\widetilde{Y}_n'\right),
\end{aligned}$$

et puisque $\widetilde{Y}_n$ est définie comme la solution de (116)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \delta_{nT},$$

et on a donc bien trouvé une solution notée $\widetilde{Y}$ de

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad mX'' + kX + CX' = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \delta_{\tau n}. \tag{126}$$

- Enfin, comme dans la preuve de la proposition 26, on montre que toute les solutions de (126) sont la somme d'une solution particulière de (126) et de l'équation homogène associée, c'est-à-dire,

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n (\xi_0 H)(. - \tau n) + \xi, \tag{127}$$

où ξ, est fournie par la définition 19 (avec (117)).
Celles qui appartiennent à $\mathcal{D}'_+$ sont données, d'après la proposition 27, par

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n (\xi_0 H)(. - \tau n). \tag{128}$$

(2) En cours de rédaction

REPRENDRE (voir latex)

Références

[Bas22] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2022. 270 pages.

[Pet98] R. Petit. *L'outil mathématique pour la physique.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 530.15 PET, 4[e] étage). Dunod, 1998.

[Sau] T. Saumtally. "Exercices d'Analyse". Exercices de l'École Nationale des Travaux Publics de l'État.