Mécanique 4A OMI3 Automne 2023

Corrigé de l'examen du 11 janvier 2024

Correction de l'exercice 1.
On pourra consulter les pages `https://fr.wikipedia.org/wiki/Singularit%C3%A9_isol%C3%A9e` et `https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Laurent` dont est très fortement inspiré ce qui suit.
On peut montrer que, si f est une fonction holomorphe sur D le disque de centre a et de rayon r, privé de a, il existe une unique suite de complexes $(a_n)_{\mathbb{Z}}$ telle que sur D ait lieu la relation (3.29) du cours, où la série converge normalement sur tout compact de D.
De façon plus générale, on considère une couronne du plan complexe $\mathbb{C}$ délimité par deux cercle de centre a. Pour toute fonction holomorphe f sur une couronne C centrée en a, il existe une unique suite de complexes $(a_n)_{\mathbb{Z}}$ telle que sur C ait lieu la relation (3.29) du cours.
Naïvement, on peut décomposer la somme de droite de la relation (3.29), sous la forme

$$f(z) = f_+(z) + f_-(z), \tag{1}$$

où

$$f_+(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k, \tag{2a}$$

$$f_-(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} \left(\frac{1}{z-a}\right)^k. \tag{2b}$$

$$\tag{2c}$$

et on a donc deux séries entieres, l'une exprimée en z, définie si $|z-a| < R_1 \leq +\infty$ et l'autre définie pour $1/|z-a| < R_2 \leq +\infty$ soit pour $|z-a| > 1/R_2 \geq 0$.
Cette notion sera reprise par exemple dans la transformation en Z (voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation_en_Z` ou [Bas24, Chapitre intitulé "Transformation en Z"]).
Reprenons l'exemple 3.39 du cours

Exemple 1. Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = e^{(1/z)} + e^z. \tag{3}$$

Il suffit d'utiliser l'expression (2.20) du cours, appliqué respectivement à $z \in \mathbb{C}$ et $1/z$ pour z non nul, ce qui donne

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n,$$

et

$$e^{(1/z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n,$$

dont on déduit, successivement, pour tout z non nul :

$$\begin{aligned} e^{(1/z)} + e^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}, \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} + 2, \end{aligned}$$

et en posant $n' = -n$ dans la seconde somme

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n + \sum_{n'=-1}^{-\infty} \frac{1}{(-n')!} z^{n'} + 2, \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{|n|!} z^{n'} + 2, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \end{aligned}$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{|n|!}, & \text{si } n \neq 0, \\ 2, & \text{si } n = 0. \end{cases} \tag{4}$$

On retrouve donc, dans ce cas, le développement en série de Laurent donné par l'équation

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-a)^k,$$

avec $a = 0$, vu dans la remarque 3.38 du cours.

Correction de l'exercice 2.

(1) (a) La figure représente l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible irrotationnel puisque les lignes de courant et les équipotentielles semblent être perpendiculaires.

(b) Cette figure a été réalisée avec la fonction f définie par

$$f(z) = e^z$$

Les dérivées partielles de f existent et sont continues et donc l'aspect dérivable de f est équivalent aux conditions de Cauchy-Riemann, qui traduit l'aspect incompressible et irrotationnel. Voir section 5.2.1 page 52 du cours.

(c) Les équation des lignes de courant sont données par

$$\psi = \operatorname{Im} f = C,$$

où C est une constante. Ici, on a, pour $z = x + iy$,

$$f(z) = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

et les équations de lignes de courant sont donc

$$e^x \sin y = C.$$

(2) La figure ne représente pas l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible irrotationnel puisque les lignes de courant et les équipotentielles ne semblent pas perpendiculaires. La fonction f utilisée est définie par $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ qui n'est pas dérivable. Voir exercice de TD 1.4.

Correction de l'exercice 3.

(1) On obtient

$$y(t)=\frac{\alpha+tx(t)}{at+1}, \tag{5}$$

t décrivant un intervalle du type $]-R,R[$.

(2) (a) On obtient

$$x(t)=\frac{t}{(t-1)^2}, \tag{6}$$

(b) On a

$$y(t)=\frac{\alpha}{1+at}+\frac{t^2}{(1+at)(t-1)^2},$$

(c) puis, si $a\neq -1$,

$$y(t)=\frac{\alpha+A}{1+at}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{(t-1)^2},$$

où A, B et C sont donnés dans l'énoncé et si $a=-1$,

$$y(t)=-\frac{\alpha+1}{1-t}-\frac{2}{(t-1)^2}-\frac{1}{(t-1)^3}.$$

(d) On en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad y_n=\begin{cases}(\alpha+A)(-1)^n a^n-B+C(n-1), & \text{si } a\neq -1,\\ \alpha+\frac{1}{2}n(n-1), & \text{si } a=-1.\end{cases}$$

(3) Dans ce cas,

$$y_n=\left(\alpha-\frac{b}{a+1}\right)(-1)^n a^n+\frac{b}{a+1}.$$

Voir correction manuscrite provisoire détaillée sur
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/complementscannes/corresolequadifference02.pdf`

Correction de l'exercice 4.

(1) Sur chaque intervalle $[n,n+1[$, où $n\in\mathbb{Z}$, E est constante et égale à n, soit

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad \forall x\in[n,n+1[,\quad E(x)=n. \tag{7}$$

(2) La fonction E est donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. En chaque entier n, $n\in\mathbb{Z}$, elle présente un saut de hauteur 1. Si la formule des sauts était vraie pour un ensemble infini (discret) de discontinuité, on pourrait écrire directement

$$E'=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_n.$$

Cela est vrai, mais il faut le montrer.

Proposons deux preuves.

(a) Considérons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction E_n égale à E sur $[-n,n]$ et nulle sinon. La fonction E_n tend simplement sur $\mathbb{R}$ vers E quand n tend vers l'infini. Cette limite a aussi lieu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet, si $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et si n est assez grand pour que le support de ϕ (borné) soit inclus dans $[-n,n]$. On a donc, à partir de $n\geq N$,

$$\langle E_n,\phi\rangle=\langle E,\phi\rangle$$

et donc la limite quand n tend vers l'infini de $\langle E_n,\phi\rangle$ existe et vaut $\langle E,\phi\rangle$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}E_n=E,\ \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

ce qui implique aussi

$$\lim_{n\to+\infty}E_n'=E',\ \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{8}$$

Par ailleurs, à n fixé, la formule des sauts donne

$$E'_n = \sum_{|k|<n} \delta_k \tag{9}$$

Comme précédemment, on vérifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{|k|<n} \delta_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{10}$$

Compte tenu de (8), (9), (10), on a donc

$$E' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k.$$

(b) On considère la fonction de Heaviside H dont on rappelle ici la définition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Le fait que $H(0) = 1$ n'a en principe pas d'incidence sur les calculs de distributions fait presque partout, mais c'est important de le spécifier dans cet exercice sur la partie entière. Montrons que l'on peut écrire (7) sous la forme d'une somme faisant intervenir H.

Supposons tout d'abord $x \geq 0$. Posons

$$F(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} H(x-k).$$

Cette somme est finie et vaut $E(x)$. En effet, d'après (11) $H(x-k)$ est non nul et vaut 1 ssi $x-k \geq 0$ et $k \geq 1$ soit $1 \leq k$ et $k \leq x$ soit encore $1 \leq k$ et $k \leq E(x)$. On a donc

$$F(x) = \sum_{1\leq k\leq E(x)} H(x-k) = \sum_{1\leq k\leq E(x)} 1 = E(x).$$

Notons aussi que si on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_+(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} H(x-k), \tag{12}$$

alors cette somme est finie pour tout x et nulle si $x < 0$. On a déjà vu le cas $x \geq 0$. Si $x < 0$, alors pour tout $k \geq 1$, $x - k < -k < 0$ et donc cette somme est nulle. Finalement, on a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_+(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Supposons maintenant que $x < 0$ et que x est non entier. Soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq -1$. Si $x \in]p, p+1[$, alors $E(x) = p$. On a aussi $-x \in] - p - 1, -p[$ et donc $E(-x) = -p - 1$. Ainsi,

$$E(x) = p = -(E(x-) + 1) = -E(-x) - 1,$$

et d'après (13)

$$E(x) = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} -H(-x-k)\right) - 1.$$

Remarquons aussi que

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \quad -H(-y) + 1 = H(y),$$

et donc, puisque x est non entier

$$E(x) = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} H(x+k) - 1\right) - 1,$$

cette somme étant finie. On peut aussi l'écrire

$$E(x) = \left(\sum_{k\in -\mathbb{N}^*} H(x-k) - 1\right) - 1,$$

ou encore

$$E(x) = \sum_{k\in -\mathbb{N}} H(x-k) - 1,$$

puisque pour $x < 0$, $H(x) = 0$. Comme précédemment, on montre que si l'on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_-(x) = \sum_{k\in -\mathbb{N}} H(x-k) - 1, \tag{14}$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E_-(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{15}$$

Si x est entier, on peut vérifier que cette équation n'est plus vraie mais, au sens des distributions, cela nous est égal. Compte tenu de (13) et (15), on a donc

$$E(x) = E_+(x) + E_-(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} H(x-k) + \sum_{k\in -\mathbb{N}} H(x-k) - 1, \text{ p.p sur } \mathbb{R}. \tag{16}$$

On ne peut pas écrire

$$E(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} H(x-k) + \sum_{k\in -\mathbb{N}} H(x-k) - \sum_{k\in -\mathbb{N}} 1,$$

car la somme $\sum_{k\in -\mathbb{N}} 1$ est infinie. Les sommes intervenant dans (16) sont finies et on peut montrer, comme dans la preuve du point 2a, que cette égalité a lieu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, comme série de distributions :

$$E = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} H(.-k) + \sum_{k\in -\mathbb{N}} H(.-k) - 1, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{17}$$

Puisque

$$H'(.-k) = \delta_k, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

on peut dériver terme à terme pour obtenir :

$$E' = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \delta_k + \sum_{k\in -\mathbb{N}} \delta_k, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

et donc

$$E' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{18}$$

Correction de l'exercice 5.

On considère le problème suivant : chercher u de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad -u''(x) + u(x) = f(x), \tag{19a}$$

$$u'(0) = u'(1) = 0. \tag{19b}$$

(1) Pour que l'équation différentielle ait un sens, il suffit que u admette une dérivée seconde et donc supposer f continue.

(2) On raisonne comme dans la section 8.5.1 page 115 du cours ou dans l'exercice 8.5 de TD.

— Posons $\Omega =]0,1[$. On part de la formulation (19a) que l'on multiplie par une fonction v et que l'on intègre sur $[0,1]$. On supposera pour cela que u est dans $H^2(\Omega)$ et f et v sont dans $L^2(\Omega)$. On obtient donc
$$-\int_0^1 u''(x)\phi(x)dx + \int_0^1 u(x)\phi(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx. \tag{20}$$
Si ϕ est dérivable, de dérivée dans L^2, une intégration par partie donne
$$-\int_0^1 u''(x)\phi(x)dx = \int_0^1 u'(x)\phi'(x)dx + u'(1)\phi(1) - u'(0)\phi(0). \tag{21}$$
On a donc, selon (20), (21) et (19b) :
$$\int_0^1 u'(x)\phi'(x)dx + \int_0^1 u(x)\phi(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$
Pour que ces intégrales soient définies, il suffit que u et v soient dans $H^1(\Omega)$ et que f soit dans $L^2(\Omega)$. Bref, on se donne $f \in L^2(\Omega)$ et on défini l'ensemble de fonctions V par
$$V = H^1(\Omega). \tag{22}$$
Remarquons que V est inclus dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ (voir annexe R).On cherche donc $u \in V$ tel que
$$\forall v \in V, \quad a(u,v) = l(v), \tag{23}$$
où a est définie par
$$\forall u, v \in V, \quad a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx. \tag{24}$$
et $\mathcal{L}$ par
$$\forall v \in V, \quad \mathcal{L}(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{25}$$
Ces définitions sont très proches des définitions du cours.

— Supposons maintenant que (22) ait lieu. On l'applique à $v = \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$: pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a donc
$$\int_0^1 u'(x)\phi'(x)dx + \int_0^1 u(x)\phi(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx. \tag{26}$$
et donc, en considérant $f, u' \in L^2(\Omega)$ comme des distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on a donc
$$\langle u', \phi' \rangle + \langle u, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle,$$
soit encore, d'après la définition de la dérivée de la distribution u'
$$-\langle u'', \phi \rangle + \langle u, \phi \rangle - \langle f, \phi \rangle = 0,$$
soit encore
$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle -u'' + u - f, \phi \rangle = 0,$$
ce qui signifie exactement que
$$-u'' + u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{27}$$
Puisque f est dans L^2, u est dans H^2 et donc (voir annexe R) u est de classe C^1. On a donc
$$-u'' + u = f \text{ p.p. sur } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{28}$$
Il reste à montrer qu'ont lieux les conditions aux limites (19b). Pour cela, on applique (22) à $v \in V$: on obtient (26). Puisque u'' est intégrable, une intégration par partie fournit alors
$$-\int_0^1 u''(x)\phi(x)dx + [u'\phi]_0^1 + \int_0^1 u(x)\phi(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

et donc
$$\int_0^1 (-u''(x) + u(x) - f(x))\phi(x) + u'(1)\phi(1) - u'(0)\phi(0) = 0$$
et, d'après (28), on a
$$u'(1)\phi(1) - u'(0)\phi(0) = 0$$
Si on choisit $\phi(x) = x$, on en déduit $u'(1) = 0$ et si $\phi(x) = 1 - x$, on en déduit $u'(0) = 0$
Bref, on a montré que si u est solution de (23) alors elle est dans $H^2 \cap C^1$, les conditions aux limites limites (19b) sont vraies et l'équation (19a) est vraie presque partout sur Ω.

(3) Il suffit maintenant initialement que u soit dans H^1 et f dans L^2. Le raisonnement précédent montre alors que u est de classe C^1.

Références

[Bas24] J. Bastien. *Mathématiques Pour l'Ingénieur*. Notes de cours de l'UV MPI (Département SIR) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html` En cours de rédaction. 2024. 0 pages.