Mécanique 4A OMI3 Automne 2022

# Examen du 05 janvier 2023

Durée : 1,5 heure(s)

**Documents autorisés** : OUI ☒ NON ☐
*Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits*

**Calculatrice autorisée** : OUI ☒ NON ☐
*Tout type*

**Exercice 1.**

(1) Déterminer $\mathrm{Ln}(e^{ix})$ pour $x$ réel, appartenant à $]-\pi,\pi[$.

(2) Donner une condition suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que $\ln(e^{iz}) = iz$.

**Exercice 2.**
On rappelle que $U$ désigne le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(1) Comment définiriez-vous $\displaystyle\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in U}} \mathrm{Ln}(z)$ ?

(2) Comment définiriez-vous $\displaystyle\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in \mathbb{C}^*}} \mathrm{Ln}(z)$ ?

**Exercice 3.**

(1) En raisonnant comme dans l'exemple 3.29 du cours, mettre la fonction $f(z) = e^z/z$ sous la forme de la somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction non continue en zéro.

(2) Conclure sur l'ordre du pôle 0 de la fonction $f$.

(3) Retrouver la valeur du coefficient devant $1/z$ en utilisant un calcul de résidu.

**Exercice 4.**
On considère la fonction $\psi$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \psi(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

Déterminez le résidu de $\psi$ en 0.

**Exercice 5.**
On considère la fraction rationnelle $R(X,Y)$ définie par

$$R(X,Y) = \frac{X}{X-3}.$$

Déterminer l'intégrale suivante
$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt.$$

**Exercice 6.**
*Attention*, dans cet exercice, où est présenté un paradoxe connu, on utilise la notion de série entière sur $\mathbb{R}$ qui est absolument identique à celle de $\mathbb{C}$ (excepté le disque de convergence qui est remplacé par un intervalle de convergence).

(1) On tient le raisonnement suivant.

(a) Posons
$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ....$$
On écrit
$$-A = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$
et en ajoutant 1
$$1 - A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... = A.$$
Ainsi, $1 - A = A$ et donc
$$A = \frac{1}{2}.$$

(b) Posons
$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ....$$
On a d'après la définition de $A$
$$\begin{aligned} B - A &= (1-1) + (-2+1) + (3-1) + (-4+1) + (5-1) + (-6+1) + ..., \\ &= 0 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + ..., \\ &= -B. \end{aligned}$$
Ainsi $B - A = -B$ et $B = A/2$ et donc, d'après ce qui précède
$$B = \frac{1}{4}.$$

(c) Enfin, posons
$$C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ....$$
On a
$$\begin{aligned} C - B &= (1-1) + (2+2) + (3-3) + (4+4) + (5-5) + (6+6) + ..., \\ &= 4\,(1 + 2 + 3 + ....)\,, \\ &= 4C. \end{aligned}$$
Ainsi, $C - B = 4C$ et $C = -B/3$ et donc, d'après ce qui précède
$$C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + .... = -\frac{1}{12}.$$

*Montrer pourquoi ce raisonnement n'est pas correct.*

*Attention, hormis la propriété* (1)*, les techniques de cet exercice, utilisées pour expliquer un paradoxe, ne doivent pas être utilisées dans un contexte "académique".*

(2) (a) En adaptant le calcul présenté *et, si possible, sans calculer explicitement les série entières suivantes*, déterminez-les :

$$\text{on pose pour tout } x \in ]-1,1[,\ A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$
$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n,$$
$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n,$$

et donner un sens aux sommes définies ci-dessus.

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série absolument convergente. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{1a}$$

Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $(a_n x^n)$ est supérieur à 1, que $f$ est définie et continue sur $[-1,1]$ et en particulier que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\leq 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{1b}$$

(c) On suppose maintenant que la série de terme général $a_n$ n'est plus nécessairement convergente, mais que la fonction $f$ définie par (1a) sur tout l'intervalle $[-1,1]$ est définie et continue.

*La méthode de sommation d'Abel consiste a écrire que la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est alors formellement définie grâce à l'égalité* (1b).

Conclure sur les valeurs de sommes $A$, $B$ et $C$ données dans le raisonnement problématique de la question (1).

## Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`