Mécanique 4A OMI3 — Automne 2023

Examen CC du 15 novembre 2023

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.

(1) En utilisant l'équation (2.28) du cours et/ou les formules d'Euler du cours (2.29) rappelées ici :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \tag{1}$$

et pour tout réel θ

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right), \tag{2a}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right). \tag{2b}$$

montrer les formules suivantes : pour tout θ, θ' réels,

$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta', \tag{3a}$$

$$\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta. \tag{3b}$$

(2) Les formules (3) sont-elles valables pour θ et θ' complexes ? Si oui, démontrez-les !

(3) Les formules de l'exemple A.5 page 125 et (A.24) du cours (voir dans l'annexe A) rappelées ici :

$$\cos^4\theta = \frac{1}{8}\big(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\big). \tag{4}$$

et

$$\cos(4\theta) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta, \tag{5a}$$

$$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \tag{5b}$$

valables pour tout θ réel, le sont-elles pour θ complexe ? Si oui, démontrez-les !

Exercice 2.
En utilisant la proposition du cours 5.1, calculer, pout tout réel $a > 1$
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}.$$

Exercice 3.
Soit $a \in]0, 1[$. On considère la fonction f définie par
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}. \tag{6}$$

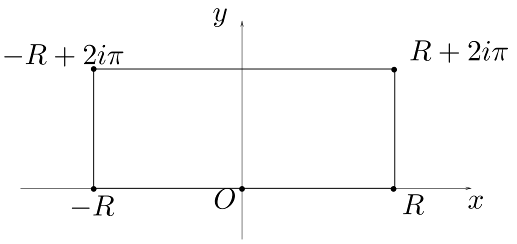

FIGURE 1. le rectangle γ_R.

Soit $R \geq 1$. On note γ_R le rectangle de sommets $-R$, R, $R + 2i\pi$, $-R + 2i\pi$, que l'on oriente dans le sens trigonométrique, comme représenté sur la figure 1.

(1) (a) Montrer que le seul pôle de f à l 'intérieur de γ_R est donné par $\alpha = i\pi$ et qu'il est simple.

(b) Calculer le résidu de f en α.

(2) (a) Que donne le théorème 3.44 (Formule des résidus) appliqué à la fonction f sur le chemin γ_R ?

(b) En admettant que
$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = (1 - e^{2ia\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx,$$
en déduire la valeur de l'intégrale
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx.$$

Exercice 4.
Cet exercice, suggéré par Arie Biesheuvel, est issu des exemples 5.6.5 et 5.6.6 de [AF03] et servira lors du TP 1.
Il s'agit d'étudier un cas particulier de la fameuse transformation de Schwarz-Christoffel, évoquée dans [AF03, théorème 5.6.1], et qui permet de transformer un domaine à bord polygonal.

(1) (a) Montrer que la fonction $z \mapsto z^{1/2}$ est une bijection du plan fendu $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ vers le demi plan complexe Q, défini par
$$Q = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in] - \pi/2, \pi/2[\right\}. \tag{7}$$
On notera $\sqrt{}$, cette fonction.

(b) Quelle est sa réciproque ?

(c) Conclure.

(2) *Attention*, contrairement au choix du cours, la fonction $\sqrt{\ }$ utilisée dans [AF03] est définie avec la coupure $\mathbb{R}_+$ de $\mathbb{C}$ (voir [AF03, p. 47]). Cela correspond au même choix pour le logarithme complexe (voir [AF03, p. 49]).

Comment modifier les résultats de la question 1 pour respecter ce choix ?

Pour toute la suite de cet exercice, cette convention est désormais adoptée.

(3) (a) Soient $s \in \mathbb{R}_+^*$ et le demi plan complexe Q, défini par

$$Q = \left\{ z \in Ce, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in]0, \pi[\right\}. \tag{8}$$

Montrer que la fonction définie par

$$w = F(z) = s\sqrt{z^2 - 1}, \tag{9}$$

est une bijection de Q sur lui-même.

(b) Quelle est la réciproque de la fonction F ?

(c) Si z est un réel négatif, quelle est la définition de $\sqrt{-z}$?

(d) En déduire les images respectives par F
— de 0 ?
— de 1 ?
— du segment $[0, 1]$?
— de l'intervalle $[1, \infty[$?
— de l'intérieur de Q (Q sans les axes ni la coupure) ?

(e) Quelles sont les images respectives par F
— du segment $[-1, 0]$;
— de l'intervalle $]-\infty, -1]$.

(f) Est-ce que la partie $\mathbb{R}_-$ a un antécédent par F ?

(4) (a) En utilisant les notations de la section 5.2.1.3 de la version longue du cours, considérer l'écoulement laminaire défini par l'équation (5.32a) du cours avec $\alpha = 0$ et la transformation conforme F mise en évidence dans ce qui précède. Quel est l'expression du potentiel complexe g sur $\mathcal{D}$ dans le plan w ?

(b) Quel sens physique donner aux parties $[0, is]$ et $\mathbb{R}_+$ dans le plan w pour cet écoulement ?

(c) En utilisant les équations (5.60) de la version longue du cours, déterminer les équations des lignes de courant et des équipotentielles dans la plan w.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Références

[AF03] M. J. Ablowitz et A. S. Fokas. *Complex variables : introduction and applications*. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 30 ABLOWITZ, niveau -1). Cambridge University Press, 2003.