Mécanique 4A OMI3 — Automne 2022

Corrigé de l'examen du 05 janvier 2023

Correction de l'exercice 1.

(1) Par définition du logarithme complexe, on a

$$\mathrm{Ln}(e^{ix}) = \ln|e^{ix}| + i\arg(e^{ix}),$$

et puisque x est réel :

$$= \ln 1 + i\arg(e^{ix}),$$
$$= i\arg(e^{ix}),$$

et puisque $x \in]-\pi,\pi[$:

$$= ix,$$

et finalement

$$\forall x \in]-\pi,\pi[, \quad \mathrm{Ln}(e^{ix}) = ix. \tag{1}$$

(2) Notons $z = x+iy$ avec x et y réels. D'après la proposition 2.36 page 24 du cours, le cas 5 appliqué à $Z = iz = -y+ix$, une condition suffisante pour que $\ln(e^Z) = Z$ est donnée par

$$x \not\equiv 0\,[\pi] \text{ ou } \cos(x) > 0,$$

et

$$-\pi < x < \pi$$

qui peut se traduire par

$$x \not\equiv 0\,[\pi] \text{ ou } \cos(x) > 0, \tag{2a}$$

et

$$-\pi < x < \pi \tag{2b}$$

Correction de l'exercice 2.

On renvoie à la remarque 2.35 page 23, rappelée ci-dessous.
On rappelle que dans le cas réel

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty. \tag{3}$$

Posons $z = re^{i\theta}$ avec $\theta = \arg(z)$ pour $z \in U$ (et donc $r > 0$ et $\theta \in]-\pi,\pi]$) et étudions si la limite de $\mathrm{Ln}\, z$ existe quand z tend vers zéro (en restant dans U) ce qui est équivalent à $r \to 0$ avec $r > 0$. D'après la définition (2.48) du cours, on a donc

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln r + i\arg(z). \tag{4}$$

et donc, d'après (3)

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in U}} \mathrm{Re}(\mathrm{Ln}(z)) = -\infty, \tag{5a}$$

tandis que

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in U}} \operatorname{Im}(\operatorname{Ln}(z)) \text{ n'existe pas,} \tag{5b}$$

mais

$$\operatorname{Im}\operatorname{Ln}(z) \in]-\pi,\pi[. \tag{5c}$$

Au vu de (5), nous dirons, comme dans le cas réel, que "$-\infty$ l'emporte sur la partie bornée" et on posera donc, pat convention

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in U}} \operatorname{Ln}(z) = -\infty. \tag{6}$$

Si on étend l'argument sur $\mathbb{C}^*$ tout entier grâce à la remarque 2.30 page 22 du cours, ou (ce qui revient au même) le logarithme complexe grâce à la remarque 2.34 page 23 du cours, le raisonnement est identique, sauf que (5c) est remplacé par

$$\operatorname{Im}\operatorname{Ln}(z) \in]-\pi,\pi],$$

ce qui ne change rien. On peut donc écrire, avec cette convention :

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in \mathbb{C}^*}} \operatorname{Ln}(z) = -\infty. \tag{7}$$

Correction de l'exercice 3.

(1) Nous avions deux façon de procéder :

(a) Comme dit dans l'énoncé, en utilisant la définition de l'exponentielle (2.20) du cours, et on raisonnant comme dans l'exemple 3.29 du cours, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n,\\ &= \frac{1}{z}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n\right),\\ &= \frac{1}{z}+\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n,\\ &= \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^{n-1}, \end{aligned}$$

soit en posant $n' = n-1$

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\quad f(z) = \frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}z^n. \tag{8}$$

En raisonnant comme dans l'exemple 3.29 du cours, on montre que la fonction g définie par

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}z^n \tag{9}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et prolongeable par continuité en zéro de sorte que

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}z^n \tag{10}$$

et

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\quad f(z) = \frac{1}{z}+g(z). \tag{11}$$

(b) On pouvait aussi remarquer que f n'est pas continue en zéro et que $G(z) = zf(z) = e^z$ est holomorphe. D'après le théorème 3.33 du cours, 0 est donc un pôle d'ordre 1 de f. f se met donc sous la forme donnée par l'équation (3.22) du cours, avec les équations (3.25) et (3.26) du cours, avec G définie par (3.21) du cours. On écrit, en utilisant la définition de l'exponentielle (2.20) du cours

$$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

et donc

$$f(z) = \frac{1}{z} + g(z),$$

où g est définie par (10).

(2) D'après le théorème 3.34 du cours, l'ordre du pôle 0 de la fonction f vaut 1.

(3) La valeur du coefficient devant $1/z$, qui est le résidu de f en zéro est donnée par le lemme 3.47 du cours. Avec les notations de ce lemme, on a $\alpha = 0$, $g = e^z$ et $\phi(z) = z$, de sorte que $g(\alpha) = e^0 = 1$ et $\phi'(\alpha) = 1$, de sorte que

$$\text{Rés}(f, \alpha) = 1, \tag{12}$$

en on retrouve bien le coefficient 1 devant $1/z$.

Remarque 1. Si on utilise la fonction `residu.m` et que l'on tape

```
[res,m]=residu('exp(z)','z',0)
```

on obtient bien $\text{Rés}(f, \alpha) = 1$ avec un ordre $m = 1$.

Correction de l'exercice 4.
Proposons deux méthodes.

(1) En utilisant la définition du sinus (2.36b) et on raisonnant comme dans l'exemple 3.29 du cours, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
&= \frac{1}{z^2} \left(z + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right), \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{z^2} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!},
\end{aligned}$$

soit

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \psi(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)}! \tag{13}$$

En raisonnant comme dans l'exemple 3.29 du cours, on montre que la fonction g définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)}! \tag{14}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et prolongeable par continuité en zéro de sorte que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)}! \tag{15}$$

et

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \psi(z) = \frac{1}{z} + g(z).$$

D'après le théorème 3.34 du cours, l'ordre du pôle 0 de la fonction f vaut 1. D'après la définition 3.41 du cours, on a donc

$$\text{Rés}(f, 0) = 1. \tag{16}$$

On pouvait aussi raisonner comme dans le cas 1b page précédente du corrigé de l'exercice de TD 3.4.

(2) Deux facons sont proposées en utilisant les calculs habituels de résidus.

(a) On peut utiliser le lemme 3.47 du cours en écrivant

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \psi(z) = \frac{\frac{\sin z}{z}}{z}, \tag{17}$$

et, avec les notations du lemme 3.47

$$g(z) = \frac{\sin z}{z},$$

qui est bien holomorphe sur $\mathbb{C}$ d'après l'exemple 3.29 du cours avec

$$g(0) = 1,$$
$$\phi(z) = z.$$

On a alors un pôle d'ordre 1 et d'après le lemme 3.47 du cours

$$\text{Rés}(\psi, \alpha) = \frac{g(0)}{\phi'(0)} = 1$$

et on retrouve donc (16).

(b) Si on n'avait pas saisi cette astuce, on pouvait se "tromper" et considérer le pôle d'ordre 2 et utiliser la formule (3.52b) avec $m = 2$. On pose

$$g(z) = \sin z,$$
$$\phi(z) = z^2,$$
$$F(z) = 1.$$

D'après (3.52b), on a donc

$$\text{Rés}(\psi, \alpha) = \left(\frac{\sin z}{1}\right)'_{z=0} = \cos 0$$

et on retrouve donc (16).

Remarque 2. Si on utilise la fonction `residu.m` et que l'on tape

```
[res,m]=residu('sin(z)','z^2',0)
```

la fonction renvoie un message d'erreur puisqu'elle détecte que $\sin(z) = 0$ pour $z = 0$. En revanche, si l'on tape

```
[res,m]=residu('sin(z)/z','z',0)
```

on obtient bien $\text{Rés}(f, \alpha) = 1$ avec un ordre $m = 1$.

Correction de l'exercice 5.
Il suffit d'utiliser la proposition 5.1 page 51 du cours.

(1) On définit la fonction f à partir de l'équation (5.2) du cours. On obtient après calculs :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{-i\left(z^2+1\right)}{z\left(z^2+1-6\,z\right)}.$$

Les pôles de f correspondent aux zéros du dénominateur d de f défini par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad d(z) = z\left(z^2+1-6\,z\right).$$

Après calculs, on vérifie que les pôles de f sont donnés par :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0\,; \\ \beta_2 &= 3-2\,\sqrt{2}\,; \\ \beta_3 &= 3+2\,\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(2) On peut vérifier *a posteriori* que l'hypothèse (5.1) du cours est vérifiée. En effet, aucun des pôles de f n'est de module 1. On applique ensuite la remarque 5.2 du cours.

(3) Après calculs, on montre que les pôles de f de module strictement inférieur à 1 sont donnés par :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0\,; \\ \alpha_2 &= 3-2\,\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Après calculs, on montre que les ordres respectifs des pôles $(\alpha_k)_{1\leq k\leq 2}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} m_1 &= 1\,; \\ m_2 &= 1; \end{aligned}$$

et que les résidus de f en ces pôles sont donnés par :

$$\begin{aligned} \text{Rés}\,(f,\alpha_1) &= -i\,; \\ \text{Rés}\,(f,\alpha_2) &= 3/4\,i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tous les résidus de f en ses pôles tous d'ordre 1 peuvent être calculé grâce au lemme 3.47 page 43 du cours. On pourra aussi utiliser la fonction fournie sur le site habituel `residu.m`.

(4) Après calculs, on montre que

$$\sum_k \text{Rés}(f,\alpha_k) = -i + 3/4\,i\sqrt{2}.$$

On en déduit finalement que l'intégrale I de l'énoncé, qui correspond exactement à l'équation (5.3) du cours, vaut, selon l'équation (5.4) du cours :

$$I = 2\,\pi - 3/2\,\pi\,\sqrt{2}.$$

Correction de l'exercice 6.
Consulter la section D.4 de l'annexe D du cours.