

**Corrigé de l'examen CC du 15 novembre  
2023****Correction de l'exercice 1.**

(1) Nous proposons deux façons de faire.

(a) On raisonne exactement comme dans l'annexe A du cours.

En effet, on utilise l'équation (1) de l'énoncé et on remplace dans

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'},$$

- $e^{i(\theta+\theta')}$  par  $\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$ ,
- $e^{i\theta}$  par  $\cos \theta + i \sin \theta$
- et  $e^{i\theta'}$  par  $\cos \theta' + i \sin \theta'$ .

On obtient donc

$$\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

et, puisque,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta), \quad (1)$$

on a donc

$$\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta),$$

En séparant partie réelle et imaginaire, on obtient donc les équations (3a) et (3b) de l'énoncé.

(b) On peut aussi, plus longuement, utiliser les formules (1) et (2) de l'énoncé qui nous donnent successivement

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \theta') &= \frac{1}{2} \left( e^{i(\theta+\theta')} + e^{-i(\theta+\theta')} \right), \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{i\theta} e^{i\theta'} + e^{-i\theta} e^{-i\theta'} \right), \\ &= \frac{1}{2} \left( (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') + (\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta' - i \sin \theta') \right), \end{aligned}$$

ce qui donne, grâce à (1) et la même égalité appliquée à  $-\theta$  et  $-\theta'$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta) + \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' - i(\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta)), \\ &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta', \end{aligned}$$

ce qui fournit l'équation (3a) de l'énoncé. On a, de même

$$\begin{aligned}
& \sin(\theta + \theta'), \\
&= \frac{1}{2i} \left( e^{i(\theta+\theta')} - e^{-i(\theta+\theta')} \right), \\
&= \frac{1}{2i} \left( e^{i\theta} e^{i\theta'} - e^{-i\theta} e^{-i\theta'} \right), \\
&= \frac{1}{2i} \left( (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \theta' + i \sin \theta') - (\cos \theta - i \sin \theta) (\cos \theta' - i \sin \theta') \right), \\
&= \frac{1}{2i} (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i (\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta) - \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i (\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta)), \\
&= \cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta,
\end{aligned}$$

ce qui fournit l'équation (3b) de l'énoncé.

(2) Naturellement, les formules (3) de l'énoncé sont valables pour  $\theta$  et  $\theta'$  complexes. Démontrons-les. Nous proposons là encore deux façons de faire. Remarquons tout d'abord que les formules (1) et (2) de l'énoncé sont encore valables pour  $\theta$  complexes. En effet, (2) n'est autre que la définition du cosinus et du sinus complexes donnés dans la proposition 2.27 du cours, dont (1) découle.

- (a) On ne peut utiliser la preuve du point 1a, fondée sur le fait que  $\theta$  et  $\theta'$  sont réels, puisque l'on a séparé la partie réelle et la partie imaginaire. En revanche, cet aspect n'a pas été utilisé dans la preuve du point 1b que l'on peut écrire pour  $\theta$  et  $\theta'$  complexes et qui utilise les équations (1) et (2) de l'énoncé, valables pour  $\theta$  complexes.
- (b) Plus subtilement, on peut raisonner de la façon suivante, en utilisant la preuve uniquement du point 1a. Fixons tout d'abord  $\theta'$  dans  $\mathbb{R}$ . Considérons les fonctions  $F$  et  $G$  définies sur  $\mathbb{C}$  par : pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$F(z) = \cos(z + \theta') - (\cos z \cos \theta' - \sin z \sin \theta'), \quad (2a)$$

$$G(z) = \sin(z + \theta') - (\cos z \sin \theta' + \cos \theta' \sin z). \quad (2b)$$

Il est clair que  $F$  et  $G$  sont développables en série entière sur  $\mathbb{C}$ , en zéro, de rayon de convergence égal à  $+\infty$ . On a donc pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad (3a)$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n, \quad (3b)$$

où  $a_n$  et  $b_n$  sont complexes. D'après ce qu'on a démontré dans le point 1a,  $F$  et  $G$  sont nulles sur  $\mathbb{R}$ . Leur développement en série entière réel (de rayon de convergence aussi égal à  $+\infty$ ) est donc nul et, par unicité du développement en série entière, les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont donc tous nuls. D'après (3),  $F$  et  $G$  sont donc nulles sur  $\mathbb{C}$ . On fixe maintenant  $z \in \mathbb{C}$  et on considère  $\tilde{F}$  et  $\tilde{G}$  définies par pour tout  $z' \in \mathbb{C}$  :

$$\tilde{F}(z') = \cos(z + z') - (\cos z \cos z' - \sin z \sin z'), \quad (4a)$$

$$\tilde{G}(z') = \sin(z + z') - (\cos z \sin z' + \cos z' \sin z). \quad (4b)$$

On raisonne de la même façon en montrant que l'on a pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\tilde{F}(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n(z')^n, \quad (5a)$$

$$\tilde{G}(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{b}_n(z')^n, \quad (5b)$$

où  $a_n$  et  $b_n$  sont complexes. Pour tout  $z$  complexe fixé,  $\tilde{F}$  et  $\tilde{G}$  sont cette fois-ci nulles sur  $\mathbb{C}$ . On a donc montré que, pour tout  $z$  et  $z'$  complexes :

$$\cos(z + z') - (\cos z \cos z' - \sin z \sin z') = 0, \quad (6)$$

$$\sin(z + z') - (\cos z \sin z' + \cos z' \sin z) = 0, \quad (7)$$

ce qui nous permet de conclure.

*Remarque 1.* Notons que, dans cette façon de faire, nous avons démontré en fait la propriété suivante :

*Proposition 2.* Soit  $\mathcal{F}$  une fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , développable en série entière à l'origine et de rayon de convergence  $R > 0$ . Si  $\mathcal{F}$  est nulle sur la segment  $] -R, R[$ , alors elle est nulle à l'intérieur de son disque de convergence.

Ce résultat est proche du principe du prolongement analytique. Voir par exemple [https://fr.wikipedia.org/wiki/Prolongement\\_analytique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Prolongement_analytique).

- (3) Naturellement, les deux formules (4) et (5) démontrées dans les exemples A.5 page 125 et A.6 page 126 du cours dans le cas réel sont aussi vrai dans le cas complexe. On les démontrera en raisonnant comme dans les points 2a et 2b.

### Correction de l'exercice 2.

Exercice issu de <https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/analyse/vc/residus&type=fexo>

Notons que cet exercice est très proche de l'exercice de TD 5.1.

Appliquons la proposition 5.1 du cours. Pour cela, on considère la fonction de deux variables  $R$  définie par

$$R(X, Y) = \frac{1}{a + Y}.$$

Comme dans l'équation (5.2) du cours, on considère  $f$  la fonction définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

qui vaut donc ici

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{iz} \frac{1}{a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)}, \\ &= \frac{2}{2iaz + z^2 - 1} \end{aligned}$$

et donc

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}. \quad (8)$$

On cherche les pôles de  $f$  qui sont les zéros de  $P(z) = z^2 + 2iaz - 1$ , qui sont données par (voir [Bas22, Annexe "Rappels sur les racines d'un polynôme de degré 2"] disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf>) : le discriminant réduit  $\Delta'$  est donné par

$$\Delta' = (ia)^2 - (-1) = 1 - a^2,$$

qui est strictement négatif car  $a > 1$ . Les deux racine de  $P$  valent donc

$$z = -ia \pm i\sqrt{a^2 - 1} = i(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

de module

$$|z| = \left| -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \right|.$$

La module de la première racine,  $z_1$  vaut

$$|z_1| = \left| -a - \sqrt{a^2 - 1} \right| = a + \sqrt{a^2 - 1},$$

dont on vérifie qu'il est strictement plus grand que 1 tandis que le module de la seconde racine,  $z_2$  vaut

$$|z_2| = \left| -a + \sqrt{a^2 - 1} \right| = a - \sqrt{a^2 - 1},$$

puisque  $a - \sqrt{a^2 - 1} > 0$ . On vérifie que ce module est strictement plus petit que 1. Le seul pôle de  $f$  de module strictement plus petit que 1 vaut donc

$$z_2 = i(-a + \sqrt{a^2 - 1})$$

C'est un pôle d'ordre 1 (puisque les deux racines de  $P$  sont distinctes) et d'après le lemme 3.47 du cours, on a donc

$$\begin{aligned} \text{Rés}(f, z_2) &= \frac{2}{2z_2 + 2ia}, \\ &= \frac{2}{-2ia + 2i\sqrt{a^2 - 1} + 2ia} \end{aligned}$$

et donc

$$\text{Rés}(f, z_2) = -\frac{i}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad (9)$$

D'après (8) et (9), la proposition 5.1 du cours nous permet donc d'affirmer que l'intégrale  $I$  définie par

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt, \quad (10)$$

est égale à

$$I = -2i\pi \times \frac{i}{\sqrt{a^2 - 1}},$$

et donc finalement

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

### Correction de l'exercice 3.

Exercice issu de <https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/analyse/vc/residus&type=fexo>

- (1) (a) Montrons que le seul pôle de  $f$  est donné par  $\alpha = i\pi$  et qu'il est simple.  $z$  est un pôle de  $f$  s'il est un zéro du dénominateur de  $f$ , c'est-à-dire  $1 + e^z = 0$  soit

$$e^z = -1.$$

On pose  $z = x + iy$  et on a donc

$$e^x e^{iy} = -1 = e^{i\pi},$$

et on a donc en identifiant module et argument :

$$e^x = 1,$$

$$y = \pi + 2k\pi, \text{ où } k \text{ appartient à } \mathbb{Z}.$$

et donc

$$\begin{aligned}x &= \ln(1) = 0, \\y &= \pi + 2k\pi, \text{ où } k \text{ appartient à } \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

On vérifie que le seul de ces nombres à l'intérieur de  $\gamma_R$  correspond à  $k = 0$  et on a donc trouvé le seul pôle de  $f$  à l'intérieur de  $\gamma_R$  donné par

$$\alpha = i\pi. \quad (11)$$

La fonction  $Q = e^z + 1$  est nulle en  $\alpha$  et sa dérivée est non nulle en  $\alpha$ . Ainsi, en utilisant par exemple le lemme 3.47 du cours, on en déduit que

$$\alpha \text{ est un pôle d'ordre un.} \quad (12)$$

(b) D'après (12) et le lemme 3.47 du cours, on a

$$\begin{aligned}\text{Rés}(f, \alpha) &= \left[ \frac{e^{az}}{1 + e^z} \right]'_{z=i\pi}, \\&= \left[ \frac{e^{az}}{e^z} \right]'_{z=i\pi}, \\&= \frac{e^{ai\pi}}{e^{i\pi}},\end{aligned}$$

et donc

$$\text{Rés}(f, \alpha) = -e^{ai\pi}. \quad (13)$$

(2) (a) La Formule des résidus 3.44 appliquée à la fonction  $f$  sur le chemin  $\gamma_R$  donne, puisque  $f$ , restreinte à un ouvert "juste un peu plus grand" que  $\gamma_R$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ ,

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = -2i\pi e^{ai\pi}, \quad (14)$$

(b) Admettons que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = (1 - e^{2ia\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx. \quad (15)$$

Cela sera démontré dans la remarque 3. D'après (14) et (15), on a en faisant tendre  $R$  vers l'infini :

$$(1 - e^{2ia\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = -2i\pi e^{ai\pi}, \quad (16)$$

On remarque que

$$\begin{aligned}1 - e^{2ia\pi} &= e^{ia\pi} (e^{-a\pi} - e^{a\pi}), \\&= -2i \sin(a\pi) e^{ia\pi}\end{aligned}$$

ce qui implique d'après (16)

$$\sin(a\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \pi,$$

et donc ( $\sin(a\pi)$  est non nul puisque  $a \in ]0, 1[$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

*Remarque 3.* Démontrons (15). On découpe l'intégrale  $J = \int_{\gamma_R} f(z) dz$  en quatre morceaux, le premier correspond au segment  $[-R, R]$ , le second au segment  $[R, R + 2i\pi]$ , le troisième au segment  $[R + 2i\pi, -R + 2i\pi]$  et le quatrième au segment  $[-R + 2i\pi, -R]$ .

- Sur  $[-R, R]$ , on paramètre par  $z = x$  où  $x$  appartient à  $[-R, R]$ , de sorte que

$$\int_{[-R, R]} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx. \quad (17)$$

- De même, sur  $[R + 2i\pi, -R + 2i\pi]$ , on paramètre par  $z = x + 2i\pi$  où  $x$  appartient à  $[R, -R]$ , de sorte que

$$\int_{[R+2i\pi, -R+2i\pi]} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2i\pi)}}{1 + e^{x+2i\pi}} dx.$$

et donc

$$\int_{[R+2i\pi, -R+2i\pi]} f(z) dz = -e^{2i\pi a} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx. \quad (18)$$

- Sur  $[R, R + 2i\pi]$ , on paramètre par  $z = R + it$  où  $t$  appartient à  $[0, 2\pi]$ , de sorte que

$$\int_{[R, R+2i\pi]} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+it)}}{1 + e^{R+it}} dt.$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned} \left| \int_{[R, R+2i\pi]} f(z) dz \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{a(R+it)}}{1 + e^{R+it}} \right| dt, \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{|1 + e^{R+it}|} dt, \\ &= e^{aR} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1 + e^{R+it}|} dt, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité triangulaire, on a  $|1 + e^{R+it}| \geq |e^{R+it}| - 1 = e^R - 1$  et donc

$$\begin{aligned} &\leq e^{aR} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^R - 1} dt, \\ &= \frac{2\pi e^{aR}}{e^R - 1}, \\ &= \frac{2\pi e^{R(a-1)}}{1 - e^{-R}}, \end{aligned}$$

et en choisissant par exemple  $R \geq 2$ , on a  $1 - e^{-R} \geq 1 - e^{-2}$  et donc

$$\left| \int_{[R, R+2i\pi]} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi e^{R(a-1)}}{1 - e^{-2}}.$$

ce qui implique, puisque  $a - 1 < 0$  :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[R, R+2i\pi]} f(z) dz = 0. \quad (19)$$

- On montrerait de même que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R+2i\pi, -R]} f(z) dz = 0. \quad (20)$$

- Il est clair que

$$\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx \text{ existe.} \quad (21)$$

Grâce à (17), (18), (19), (20) et (21), on a, en faisant tendre  $R$  vers l'infini, le résultat (15).

◇

#### Correction de l'exercice 4.

On renvoie à la correction de l'exercice 5.18, rappelée ci-dessous.

- (1) (a) Si  $z$  appartient au plan fendu  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , par définition

$$z = re^{i\theta}, \text{ où } (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[. \quad (22)$$

et donc, par définition (voir équation (2.65) du cours)

$$\begin{aligned} z^{1/2} &= e^{1/2 \operatorname{Ln}(z)}, \\ &= e^{1/2(\ln|z| + i \arg z)}, \\ &= e^{1/2(\ln r + i\theta)}, \\ &= e^{(\ln r)/2} e^{i\theta/2}, \\ &= \sqrt{r} e^{i\theta/2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall z = re^{i\theta} \in U, \quad z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2}. \quad (23)$$

Si  $r$  décrit  $\mathbb{R}_+^*$ , alors  $\sqrt{r}$  décrit  $\mathbb{R}_+^*$  et si  $\theta$  décrit  $] -\pi, \pi[$ , alors  $\theta/2$  décrit  $] -\pi/2, \pi/2[$  et  $z^{1/2}$  décrit bien le demi plan complexe  $Q$ , défini par

$$Q = \{z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in ] -\pi/2, \pi/2[ \}. \quad (24)$$

Ainsi, la fonction  $z \mapsto z^{1/2}$  est une application surjective de  $U$  vers  $Q$ . Nous vérifierons au point 1b qu'elle est injective.

Notons  $\sqrt{\cdot}$  cette fonction. Ainsi, selon (23), on a

$$\forall z = re^{i\theta} \in U, \quad \sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\theta/2}. \quad (25)$$

(b) Soit  $Z = \rho e^{i\alpha} \in Q$ . Cherchons  $z = re^{i\theta} \in U$  tel que

$$\sqrt{z} = Z.$$

C'est donc équivalent à

$$\sqrt{r} e^{i\theta/2} = \rho e^{i\alpha}$$

et donc

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{r}, \\ \theta/2 - \alpha &= 2k\pi \text{ où } k \text{ est un entier.} \end{aligned}$$

Par définition,  $\theta/2$  et  $\alpha$  appartiennent à  $] -\pi/2, \pi/2[$  et sont donc égaux. On a donc

$$\begin{aligned} r &= \rho^2, \\ \theta &= 2\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$z = re^{i\theta} = \rho^2 e^{2i\theta} = Z^2$$

et  $z$  est unique, la fonction  $z \mapsto \sqrt{z}$  est bien injective. Bref, la fonction  $z \mapsto \sqrt{z}$  est une bijection de  $Q$  vers  $U$ , de fonction réciproque  $z \mapsto z^2$ .

(c)

Voir figure 1 page suivante. Puisque la fonction  $\sqrt{\cdot}$  est holomorphe sur le plan fendu  $U$ , de dérivée non nulle, le théorème M.3 nous dit que c'est une transformation conforme. On a aussi

$$\forall (z, Z) \in U \times Q, \quad \sqrt{z} = Z \iff z = Z^2. \quad (26)$$

*Remarque 4.* Attention, l'équation (26) n'est plus vraie si on ne suppose pas  $(z, Z) \in U \times Q$  ! Si  $Z$  décrit  $\mathbb{C}$  tout entier, l'équation  $z = Z^2$  a deux solutions opposées ! Attention, donc à la notation  $\sqrt{\cdot}$  !

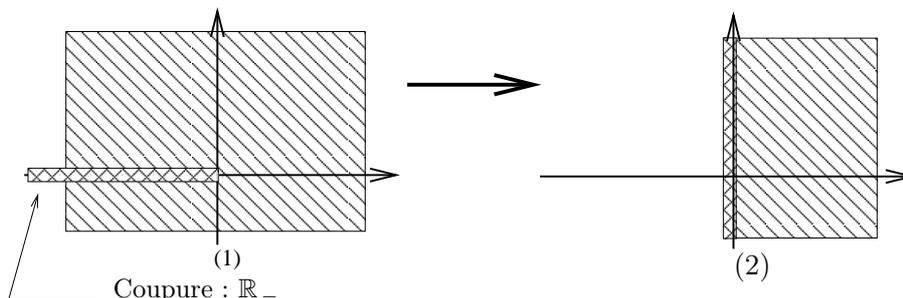


FIGURE 1. La transformation du plan fendu  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  par  $z \mapsto \sqrt{z}$ .

- (2) On utilise la remarque 2.33 du cours. On pose  $\alpha = 2\pi$  et on peut définir une détermination continue de l'argument sur le plan fendu  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  vers  $]0, 2\pi[$ . On modifie les résultats de la question 1 de la façon suivante :

Si  $z$  appartient au plan fendu  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ , par définition

$$z = re^{i\theta}, \text{ où } (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[. \quad (27)$$

On utilise alors

$$z^{1/2} = e^{1/2 \text{Ln}(z)} = e^{1/2(\ln |z| + i \arg z)} \quad (28)$$

où l'argument appartient à  $]0, 2\pi[$ . Il vient donc

$$\begin{aligned} z^{1/2} &= e^{1/2(\ln r + i\theta)}, \\ &= e^{(\ln r)/2} e^{i\theta/2}, \\ &= \sqrt{r} e^{i\theta/2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall z = re^{i\theta} \in U, \quad z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2}. \quad (29)$$

Si  $r$  décrit  $\mathbb{R}_+^*$ , alors  $\sqrt{r}$  décrit  $\mathbb{R}_+^*$  et si  $\theta$  décrit  $]0, 2\pi[$ , alors  $\theta/2$  décrit  $]0, \pi[$  et  $z^{1/2}$  décrit bien le demi plan complexe  $Q$ , défini par

$$Q = \{z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in ]0, \pi[ \}. \quad (30)$$

Ainsi, la fonction  $z \mapsto z^{1/2}$  est une application surjective de  $U$  vers  $Q$ . Soit  $Z = \rho e^{i\alpha} \in Q$ . Cherchons  $z = re^{i\theta} \in U$  tel que

$$\sqrt{z} = Z.$$

C'est donc équivalent à

$$\sqrt{r} e^{i\theta/2} = \rho e^{i\alpha}$$

et donc

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{r}, \\ \theta/2 - \alpha &= 2k\pi \text{ où } k \text{ est un entier.} \end{aligned}$$

Par définition,  $\theta/2$  et  $\alpha$  appartiennent à  $]0, \pi[$  et sont donc égaux. On a donc

$$\begin{aligned} r &= \rho^2, \\ \theta &= 2\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$z = re^{i\theta} = \rho^2 e^{2i\alpha} = Z^2$$

et  $z$  est unique, la fonction  $z \mapsto \sqrt{z}$  est bien injective. Bref, la fonction  $z \mapsto \sqrt{z}$  est une bijection de  $U$  vers  $Q$ , de fonction réciproque  $z \mapsto z^2$ .

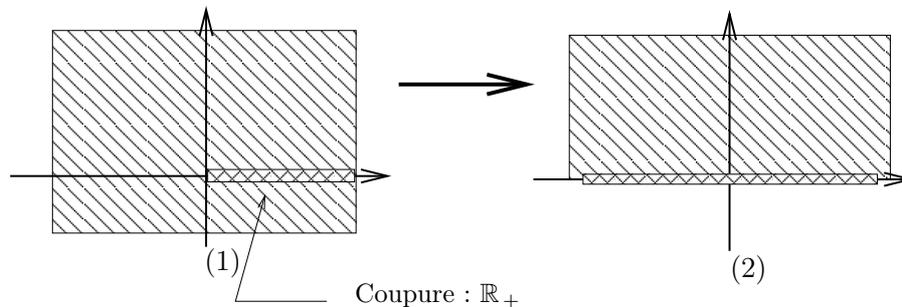


FIGURE 2. La transformation du plan fendu  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  par  $z \mapsto \sqrt{z}$ .

Voir figure 2. Puisque la fonction  $\sqrt{\cdot}$  est holomorphe sur le plan fendu  $U$ , de dérivée non nulle, le théorème M.3 nous dit que c'est une transformation conforme. On a aussi

$$\forall (z, Z) \in U \times Q, \quad \sqrt{z} = Z \iff z = Z^2. \quad (31)$$

*Remarque 5.* Attention, l'équation (31) n'est plus vraie si on ne suppose pas  $(z, Z) \in U \times Q$  ! Si  $Z$  décrit  $\mathbb{C}$  tout entier, l'équation  $z = Z^2$  a deux solutions opposées ! Attention, donc à la notation  $\sqrt{\cdot}$  !

*Remarque 6.* Attention, la fonction  $z \mapsto z^2$  utilisée pour tout la suite est définie comme la fonction réciproque de  $\sqrt{\cdot}$  et n'est définie en toute rigueur *que* sur  $Q$  !

*Remarque 7.* Dans ce cas, les réels positifs n'ont alors plus de carré (au sens de la fonction  $z \mapsto z^2$ ) ! Pour palier cet inconvénient, on procède de la façon suivante : on étend l'argument défini sur le plan fendu  $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{C}$  tout entier, de telle sorte que l'argument appartient à  $[0, 2\pi[$ . Ce choix sera le choix de la fonction matlab `logcoupe` donnée en TP ! Ainsi, si  $z$  appartient à  $\mathbb{C}$ , on remplace (27) par

$$z = r e^{i\theta}, \quad \text{où } (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[. \quad (32)$$

de telle sorte que (28) peut être remplacé par

$$z^{1/2} = e^{1/2 \text{Ln}(z)} = e^{1/2(\ln|z| + i \arg z)} \quad (33)$$

où l'argument appartient à  $[0, 2\pi[$ . Dans ce cas, on peut étendre la fonction  $z \mapsto z^2$  de la façon suivante : ainsi modifiée, la fonction  $\sqrt{\cdot}$  réalise une bijection de  $\mathbb{C}$  non plus vers le plan fendu  $U$  mais vers la partie  $Q$  du plan complexe dont la définition (30) est désormais remplacée par

$$\tilde{Q} = \{z \in \mathbb{C}, \quad z = r e^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, \pi[ \}. \quad (34)$$

Pour toute la suite, on supposera donc

$$\text{la fonction } \sqrt{\cdot} \text{ définit une bijection de } \mathbb{C} \text{ vers } \tilde{Q}, \quad (35)$$

et que

$$\text{la fonction } z \mapsto z^2 \text{ désigne sa fonction réciproque, bijection de } \tilde{Q} \text{ vers } \mathbb{C}. \quad (36)$$

Ainsi, les réels positifs ont enfin un carré, au sens de cette fonction. Les réels négatifs n'en ont toujours pas, puisque la fonction  $z \mapsto z^2$  n'est *pas* définie sur  $\mathbb{R}_-$ .

Sinon, en effet,  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{R}_-$  auraient tous les deux  $\mathbb{R}_+$  par image par  $z \mapsto z^2$ , ce qui contredirait son aspect bijectif ! *Pour toute la suite de cet exercice*, les fonctions  $\sqrt{\cdot}$  et  $z \mapsto z^2$  sont donc définies par (35)

et (36). *Attention*, ainsi définie la fonction  $z \mapsto \sqrt{z}$  n'est *pas* continue ni holomorphe au voisinage de  $\mathbb{R}_+$ . Naturellement, il faut remplacer (26) par

$$\forall (z, Z) \in \mathbb{C} \times \tilde{Q}, \quad \sqrt{z} = Z \iff z = Z^2. \quad (37)$$

*Remarque 8.* Pour simplifier l'énoncé, seul  $Q$  (et non pas  $\tilde{Q}$ ) est introduit ! Le lecteur pourra, pour simplifier, conserver  $Q$  pour la suite !

(3) (a)

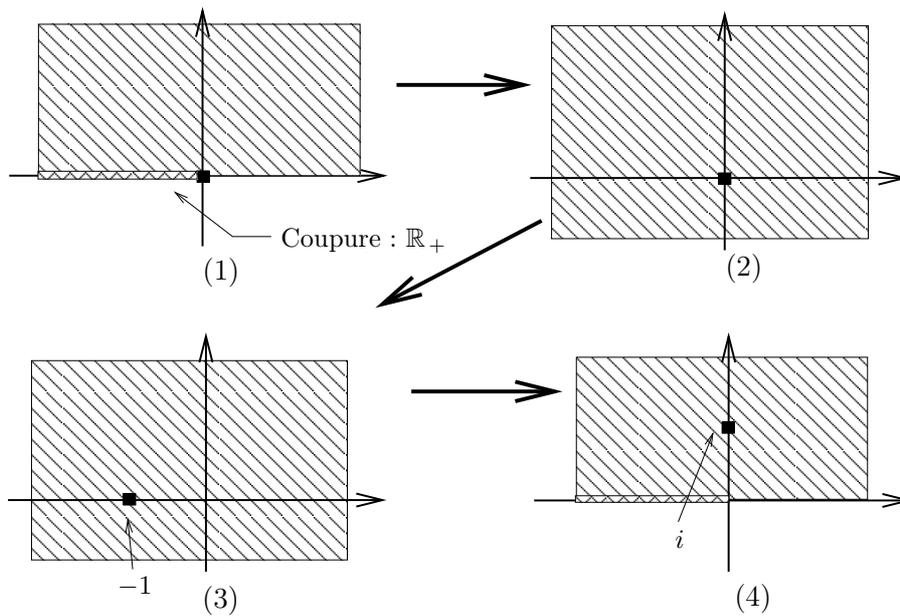


FIGURE 3. Les transformations successives du demi plan  $\tilde{Q}$  par  $z \mapsto s\sqrt{z^2 - 1}$ .

Une figure valant mieux qu'un long discours, le lecteur vérifiera que l'on passe de  $\tilde{Q}$  à lui-même par les différentes transformations indiquées sur la figure 3 :

- on passe de  $\tilde{Q} = (1)$  à  $(2)$  par la transformation  $z \mapsto z^2$  ;
- on passe de  $(2)$  à  $(3)$  par la transformation  $z \mapsto z - 1$  ;
- on passe de  $(3)$  à  $\tilde{Q} = (4)$  par la transformation  $z \mapsto s\sqrt{z}$ .

Sur chacune de ces figures, l'image initiale de l'origine est indiquée par un petit carré noir.

Composant toutes ces applications, on passe donc de  $\tilde{Q}$  à lui-même par la transformation définie par

$$w = F(z) = s\sqrt{z^2 - 1}, \quad (38)$$

D'après les résultats précédents, cette fonction est bien une transformation conforme. Le lecteur pourra faire tourner la fonction `trace_complexe`, disponible sur le site habituel et vérifier graphiquement cette assertion. *Attention*, il ne faut pas utiliser la fonction `sqrt` de matlab, qui correspond à la coupure usuelle du cours, utilisée dans la question 1 !! Il faut, en revanche utiliser la définition (28) de  $\sqrt{\cdot}$ . On utilisera alors la fonction `logcoupe`, disponible sur le site habituel. Ainsi, sous matlab, la fonction  $\sqrt{\cdot}$  est définie, par exemple, par

```
f=@(z) exp((logcoupe(z.^2-1,2*pi))/2)
```

Il faudra donc taper par exemple

trace\_complexe(-2,2,20,0,2,20,1000,@(z) exp((logcoupe(z.^2-1,2\*pi))/2))

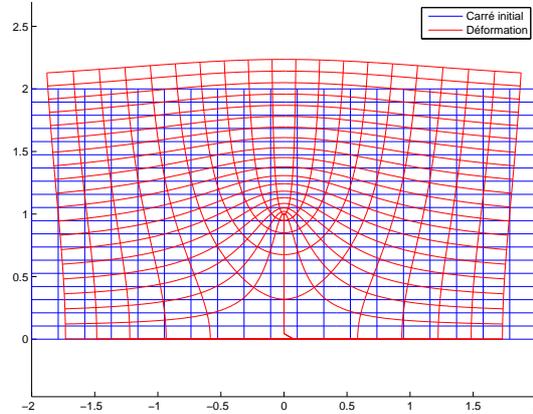


FIGURE 4. L'application  $z \mapsto \sqrt{z^2 - 1}$ .

On obtiendra la figure 4.

(b) Soit  $w \in \tilde{Q}$ . Cherchons  $z \in \tilde{Q}$  tel que

$$w = F(z) = s\sqrt{z^2 - 1},$$

équivalent à

$$\frac{w}{s} = \sqrt{z^2 - 1},$$

Puisque  $w/s \in \tilde{Q}$ , d'après (37), cela est équivalent à

$$z^2 - 1 = \left(\frac{w}{s}\right)^2,$$

dont on laisse vérifier que c'est équivalent à

$$z = \sqrt{\left(\frac{w}{s}\right)^2 + 1}.$$

Bref,  $F^{-1}$  est donnée par

$$\forall w \in \tilde{Q}, \quad F^{-1}(w) = \sqrt{\left(\frac{w}{s}\right)^2 + 1}. \quad (39)$$

*Remarque 9.* Montrons dans cette remarque, la *nécessité* de choisir la fonction  $\sqrt{\cdot}$  définie dans la question 2 avec une coupure égale à  $\mathbb{R}_+$ , plutôt que la méthode la question 1, utilisant la coupure  $\mathbb{R}_-$  usuelle du cours.

En effet, si on reprend le passage de  $Q$  à lui-même via la transformation  $F$  comme dans la question 3a, mais en prenant la définition de la fonction racine de la question 1, on passe de  $\tilde{Q}$  à son image par les différentes transformation indiquée sur la figure 5 :

- on passe de  $\tilde{Q} = (1)$  à  $(2)$  par la transformation  $z \mapsto z^2$ ;
- on passe de  $(2)$  à  $(3)$  par la transformation  $z \mapsto z - 1$ ;
- on passe de  $(3)$  à  $\tilde{Q} = (4)$  par la transformation  $z \mapsto s\sqrt{z}$ .

Le domaine final n'est plus le même! Plus grave, si on refait la construction inverse comme le montre la figure 6, partant du domaine final, on ne revient plus sur le domaine initial :

- on passe de  $(1)$  à  $(2)$  par la transformation  $z \mapsto (z/s)^2$ ;
- on passe de  $(2)$  à  $(3)$  par la transformation  $z \mapsto z + 1$ ;

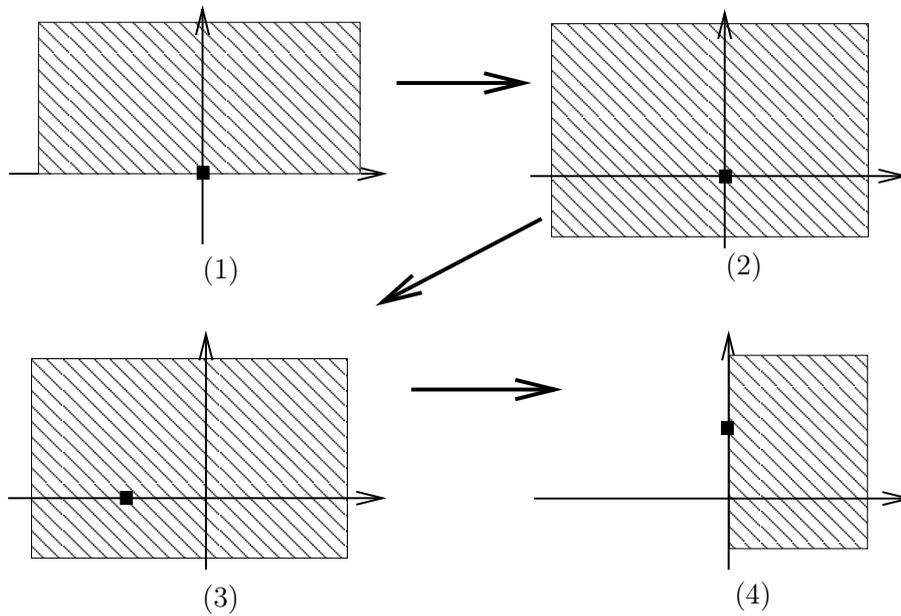


FIGURE 5. Les transformations successives du demi plan  $\tilde{Q}$  par  $z \mapsto s\sqrt{z^2 - 1}$  avec la racine carrée usuelle.

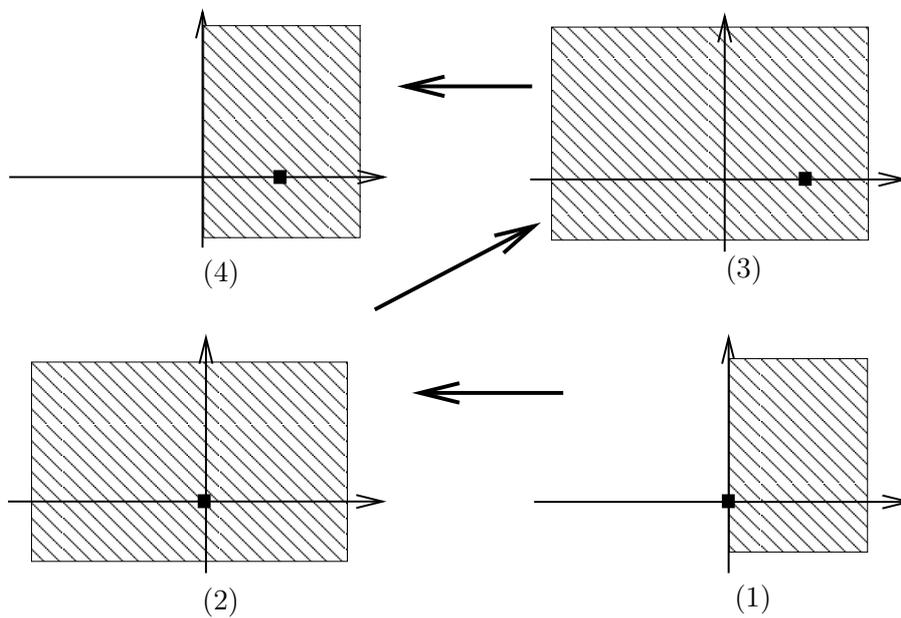


FIGURE 6. Les transformations successives de l'image demi plan  $Q$  par la transformation inverse.

— on passe de (3) à (4) par la transformation  $z \mapsto \sqrt{z}$ .

(c) Si  $z$  appartient à  $\mathbb{R}_-$ , cherchons  $\sqrt{z}$ . Par définition (33), on a

$$\sqrt{z} = e^{1/2(\ln |z| + i \arg z)}$$

où l'argument appartient à  $[0, 2\pi[$ . Il est clair que  $\arg z = \pi$  et donc

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\pi/2} = i\sqrt{-z}.$$

On a donc

$$\forall z \in \mathbb{R}_-, \quad \sqrt{z} = i\sqrt{-z}. \quad (40)$$

(d) On en déduit les images respectives par  $F$  suivantes :

$$\begin{aligned} F(0) &= is, \\ F(1) &= 0, \\ F([0, 1]) &= [0, is], \\ F([1, +\infty]) &= \mathbb{R}_+, \\ F(\text{Int}(Q)) &= \text{Int}(Q), \end{aligned}$$

où  $\text{Int}(Q)$  désigne l'intérieur de  $Q$ .

(e) Le lecteur sera tenté d'écrire

$$\begin{aligned} F([-1, 0]) &= [0, is], \\ F(]-\infty, -1]) &= \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Mais, avec les conventions de la remarque 7, le lecteur aura compris que les parties  $[-1, 0]$  et  $]-\infty, -1]$  qui ne sont pas incluses dans  $\tilde{Q}$  n'ont pas d'image par  $F$ ! Cela est parfois écrit, de façon abusive, notamment dans [AF03], ce qui est gênant en toute rigueur car  $[-1, 0]$  et  $]-\infty, -1]$  et  $[0, 1]$  et  $[1, +\infty[$  ont les mêmes images par  $F$  qui est censée être une bijection!

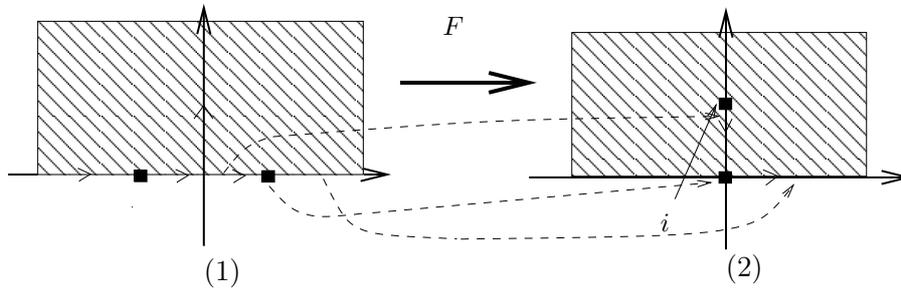


FIGURE 7. Des images particulières par  $z \mapsto s\sqrt{z^2 - 1}$ .

Voir la figure 7.

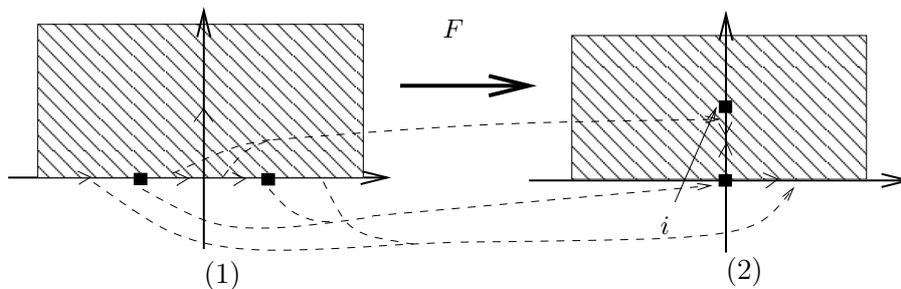


FIGURE 8. Des images particulières par  $z \mapsto s\sqrt{z^2 - 1}$ .

Attention, La figure [AF03, fig. 5.6.8 p. 355] est reproduite en figure 8 si on considère que les parties  $[-1, 0]$  et  $]-\infty, -1]$  de  $\tilde{Q}$  ont une image.

- (f) La partie  $\mathbb{R}_-$  n'est pas incluse dans  $\tilde{Q}$  et n'a donc pas d'antécédent pas  $F$ ! Cependant, on peut montrer que si  $z \in \tilde{Q}$  est « proche » de  $\mathbb{R}_-$ , alors  $F(z)$  est « proche » de  $\mathbb{R}_-$  ou de  $[0, is]$ . Soit en effet  $z \in \tilde{Q}$ . On peut écrire  $z$  sous la forme

$$z = re^{i\theta} \quad (41)$$

où  $r > 0$  et  $\theta \in [0, \pi[$ . Considérer que  $z$  est « proche » de  $\mathbb{R}_-$  revient à fixer  $r$  et considérer  $\theta = \pi - t$  où  $t \in ]0, \pi]$  avec  $t \rightarrow 0$ . On a alors

$$z = re^{i(\pi-t)} = -re^{-it}.$$

On en déduit l'expression de  $z^2 - 1$  ainsi qu'un développement limité à l'ordre un de  $z^2 - 1$  :

$$z^2 - 1 = r^2 - 1 - 2ir^2t + o(t)$$

Si  $r > 1$ , on en déduit

$$z^2 - 1 = Re^{i\phi} + o(t) \quad (42)$$

où

$$\phi = \sin(\phi) + o(\phi) = \tan(t) + o(t) = 2\pi - \frac{2r^2t}{r^2 - 1} + o(t) \quad (43)$$

et

$$R^2 = (r^2 - 1)^2 + 4r^4t^2 + o(t^2) \quad (44)$$

donc

$$R = \sqrt{r^2 - 1} + o(1)$$

Ainsi, d'après (28)

$$(z^2 - 1)^{1/2} = (\sqrt{r^2 - 1} + o(1))e^{\pi - \frac{ir^2t}{r^2 - 1} + o(t)} = -\sqrt{r^2 - 1}e^{-\frac{ir^2t}{r^2 - 1}} + o(1) \quad (45)$$

qui est un complexe « proche » de  $\mathbb{R}_-$ , en étant « au dessus ». Si, au contraire  $r < 1$ , on écrit

$$z^2 - 1 = -(-r^2 + 1 + 2ir^2t + o(t)),$$

et (42)-(43) a toujours lieu mais (43) remplacé par

$$\phi = \pi + \frac{2r^2t}{1 - r^2} + o(t).$$

Ainsi, (45) est remplacé par

$$(z^2 - 1)^{1/2} = i\sqrt{1 - r^2}e^{\frac{ir^2t}{1 - r^2}} + o(1),$$

qui est complexe proche de  $[0, i]$ , en étant à « gauche ». Bref, les éléments « proches » de  $]-\infty, -1]$ , au dessus, sont envoyés par  $F$  sur des complexes « proches » de  $\mathbb{R}_-$ , au dessus tandis que les complexes « proches » de  $[-1, 0]$ , au dessus, sont envoyés par  $F$  sur des complexes « proches » de  $[0, si]$ , en étant à « gauche ».

Cela peut être confirmé en traçant l'image par  $F$  de la droite d'équation  $z = x + \varepsilon$  où  $x$  décrit  $]-\infty, 0]$  et  $\varepsilon > 0$ , « petit », comme le montre la figure 9.

On peut aussi tracer l'image par  $F$  d'un rectangle, légèrement au dessus de  $\mathbb{R}_-$  comme le montre la figure 10(a). Si on englobe  $\mathbb{R}_-$ , comme le montre la figure 10(b), on voit que l'on atteint des points de  $[0, i]$  et de  $\mathbb{R}_+$ .

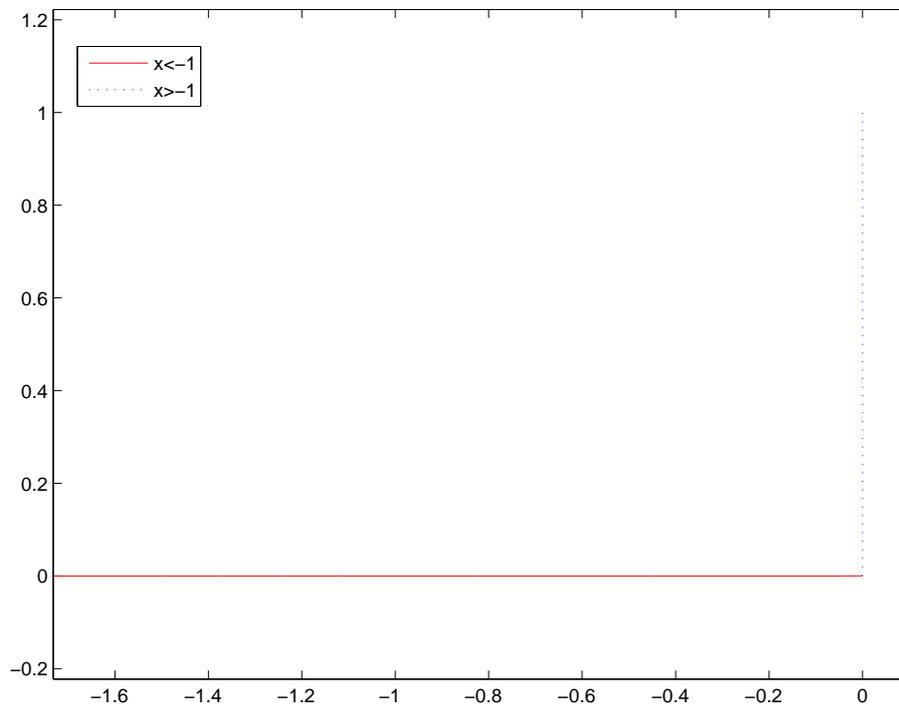


FIGURE 9. L'image de la droite d'équation  $z = x + \varepsilon$  avec  $\varepsilon = 1.0 \cdot 10^{-7}$  par  $z \mapsto s\sqrt{z^2 - 1}$ .

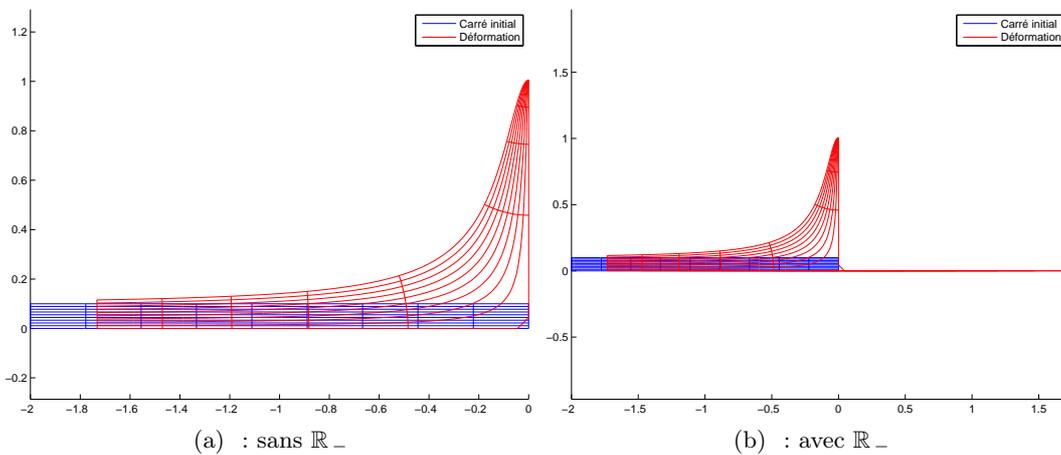


FIGURE 10. Image par  $F$  d'un rectangle, au dessus de  $\mathbb{R}_-$ .

- (4) (a) En utilisant les notations de la section 5.2.1.3 de la version longue du cours, l'équation (5.32a) du cours avec  $\alpha = 0$  donne

$$f(z) = Uz. \quad (46)$$

Ainsi le potentiel complexe  $g$  sur  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire dans le plan  $w$  est donné par

$$g(w) = f(F^{-1}(w)),$$

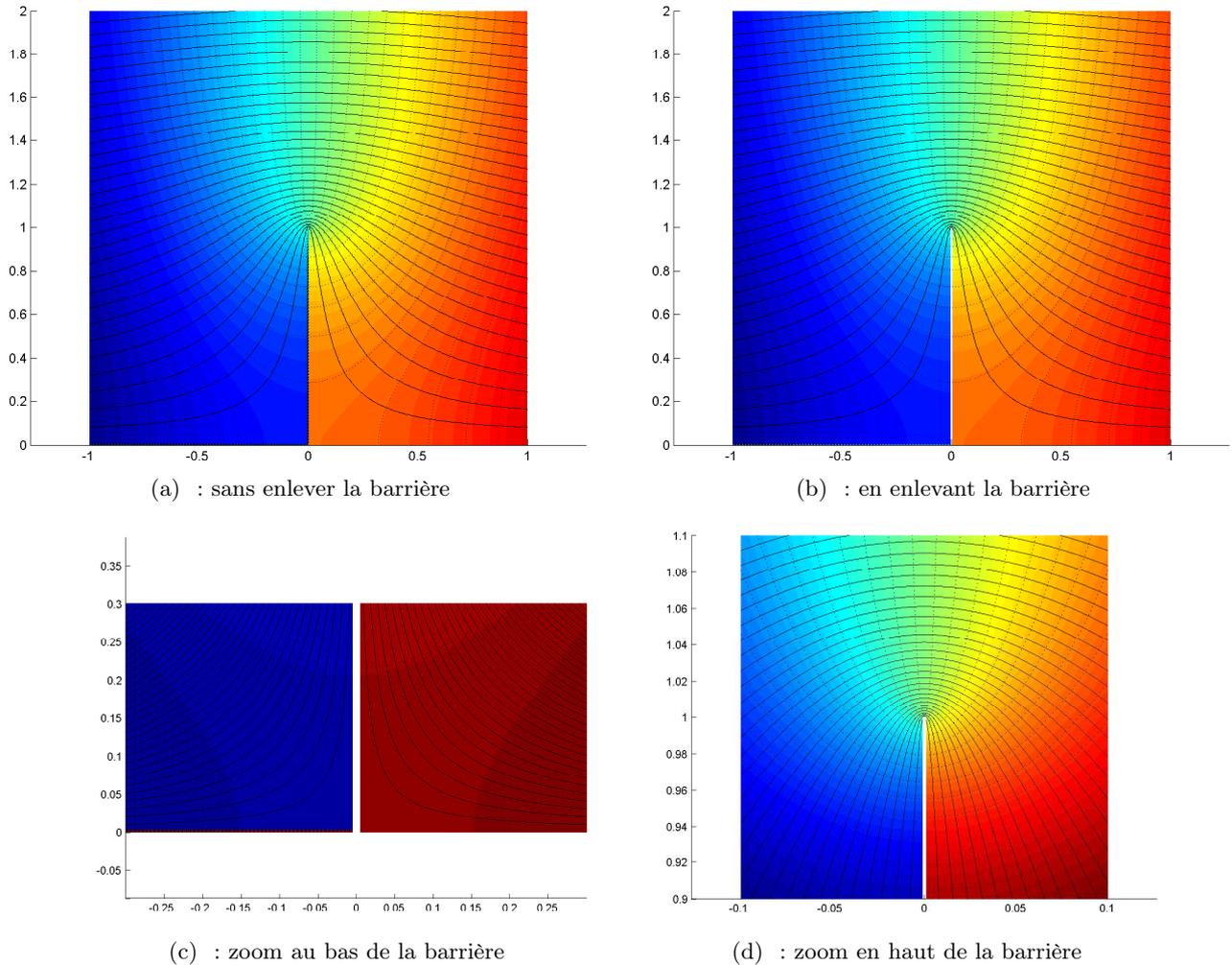


FIGURE 11. L'écoulement obtenu.

c'est-à-dire, en utilisant (39) et (46),

$$g(w) = U \sqrt{\left(\frac{w}{s}\right)^2 + 1}, \quad (47)$$

où l'on rappelle que  $\sqrt{\phantom{x}}$  est défini par (28).

- (b) Les intervalles  $[0, is]$  et  $\mathbb{R}_+$  du plan  $w$  sont les images par  $F$  des intervalles  $[0, 1]$  et de  $[1, +\infty[$  du plan  $z$ . Dans ce plan, on peut considérer que ces intervalles constituent un obstacle à l'écoulement puisque les lignes de courant (horizontale) y sont tangentes. Dans le plan  $w$ , il en sera donc de même. La partie  $\mathbb{R}_+$  sera l'obstacle horizontal, tandis que la partie  $[0, is]$  en sera l'obstacle vertical, appelée barrière. Attention, dans le plan  $z$ , la partie  $\mathbb{R}_-$  constitue aussi un obstacle à l'écoulement, qui n'a pas d'image par  $F$  (voir question 3f). Cependant, on peut raisonner à la limite et voir cette partie comme limite de ligne de courant se rapprochant des obstacles respectifs  $]-\infty, -1]$  et  $[-1, 0]$  de  $\tilde{Q}$  dont les images par  $F$  se rapprochent aussi des obstacles  $\mathbb{R}_-$  et  $[0, si]$  dans le plan  $w$ .

En TP, vous obtiendrez les courbes de la figure 11, correspondant à  $U = 1$  et  $s = 1$ .

- (c) Dans le plan  $z$ , les équipotentielles sont les courbes d'équation  $y = \text{constante}$ , tandis que les lignes de courant sont les courbes d'équation  $x = \text{constante}$ . Leurs images par  $F$  donneront respectivement

les équipotentielles et les lignes de courant dans le plan  $w$ . On obtient donc l'image par  $F$  de la ligne de courant d'équation  $y = c$  dans le plan  $w : w = F(z)$  soit

$$w = s\sqrt{(x + ic)^2 - 1}, \quad (48)$$

où  $\sqrt{\phantom{x}}$  est définie par (28) où  $c$  est une constante positive et  $x$  décrit  $\mathbb{R}$ .

On a, de même, l'image par  $F$  de l'équipotentielle d'équation  $x = c$  dans le plan  $w : w = F(z)$  soit

$$w = s\sqrt{(c + iy)^2 - 1}, \quad (49)$$

où  $\sqrt{\phantom{x}}$  est définie par (28) où  $c$  est une constante quelconque et  $y$  décrit  $\mathbb{R}_+$ .

## Références

- [AF03] M. J. ABLOWITZ et A. S. FOKAS. *Complex variables : introduction and applications*. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 30 ABLOWITZ, niveau -1). Cambridge University Press, 2003.
- [Bas22] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2022. 270 pages.