RÉGLEMENT DES QCM

JÉRÔME BASTIEN

1. Type de questions et barème

Ce QCM proposera éventuellement des questions ouvertes, des questions simples ou des questions multiples.

1.1. Éventuelles questions ouvertes

Une éventuelle question ouverte vous proposera de rédiger une réponse, en quelques lignes. Le barème est le suivant

- une absence de réponse ou une réponse fausse ne vous rapportera aucun point (case F cochée par le correcteur) ;
- une réponse passable vous rapportera un point (case P cochée par le correcteur) ;
- selon les cas, une réponse moyenne vous rapportera deux points (case M cochée par le correcteur) ;
- selon les cas, une réponse juste vous rapportera deux ou trois points (case J cochée par le correcteur) ;

1.2. Questions simples

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une question simple donnée propose $N \geq 2$ réponses dont on sait qu'une seule d'entre elles est correcte.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Pour cette question, le score obtenu est égal à :

- zéro si aucune réponse n'est choisie ;
- $-\gamma$ si les réponses sont incohérentes (plusieurs réponses choisies) ;
- α pour l'unique réponse ;
- $-\beta$ pour toutes les autres réponses fausses.

β est choisi de telle sorte que l'espérance du score d'un étudiant choisissant au hasard une des réponses soit égale à $-M$ avec $M \in \mathbb{R}_+$.

Les valeurs de α, β, γ et M sont les suivantes :

$$\alpha = 1, \tag{1.1a}$$

$$\beta = \frac{\alpha + NM}{N-1}, \tag{1.1b}$$

$$\gamma = 2, \tag{1.1c}$$

$$M = 0. \tag{1.1d}$$

Voir en section 3.1 page 2 le détail de calcul de β.

Date: 9 janvier 2025.

1.3. Questions multiples

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une question multiple donnée propose $N \geq 2$ réponses dont on sait que le nombre de réponses correctes est égal à $P \in \{0, ..., N\}$.

Pour :

- ne pas répondre, l'étudiant ne choisit aucune case ;
- répondre qu'aucune réponse ne le satisfait, l'étudiant choisit la case "*Aucune de ces réponses n'est correcte.*" ;
- choisir une ou plusieurs réponses, l'étudiant choisit la ou les cases correspondante et ne choisira pas la case "*Aucune de ces réponses n'est correcte.*".

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Pour cette question, le score obtenu est égal à :

- zéro si aucune réponse n'est choisie ;
- $-\gamma$ si les réponses sont incohérentes (case "*Aucune de ces réponses n'est correcte.*" choisie en même temps qu'une autre case) ;
- α si l'étudiant a choisi exactement toutes les réponses correctes (et aucune des réponses fausses) ;
- $-\beta$ dans tous les autres cas.

β est choisi de telle sorte que l'espérance du score d'un étudiant choisissant au hasard chacune des réponses soit égale à $-M$ avec $M \in \mathbb{R}_+$.

Les valeurs de α, β, γ et M sont les suivantes :

$$\alpha = 1, \tag{1.2a}$$

$$\beta = \frac{\alpha + 2^N M}{2^N - 1}, \tag{1.2b}$$

$$\gamma = 2, \tag{1.2c}$$

$$M = 0. \tag{1.2d}$$

Voir en section 3.2 page 3 le détail de calcul de β.

2. Annotation des copies

Les copies seront scannées, pour correction automatiques [1] puis annotées. Les nom et prénom de l'étudiant, le score total et la note sur 20 seront indiqués sur le haut de la copie. Enfin, pour chaque question simple ou multiple, les annotations suivantes sont effectuées :

— les cases cochées à tort par l'étudiant sont entourées en rouge ;
— les cases non-cochées qui auraient dû l'être sont cochées en rouge ;
— les cases cochées et qui devaient l'être sont cochées en bleu ;
— pour chaque question, sont indiquées la note obtenue ainsi que la note maximale pouvant être obtenue.

3. Détails des calculs des valeurs β données par (1.1b) et (1.2b)

3.1. Questions simples

Montrons comment la valeur de β est obtenue.

1. Sauf les éventuelles questions ouvertes !

Chacune des réponses est repérée (par exemple) par un entier appartenant à $\{1, ..., N\}$. Sans perte de généralité, le numéro de la bonne réponse est le 1. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de question choisie. Si l'étudiant choisit au hasard, chacun des numéros de l'ensemble $\{1, ..., N\}$ a la même probabilité d'apparition. On est donc dans un cas équiprobable et on a :

$$\forall k \in \{1, ..., N\}, \quad p(X = k) = \frac{1}{N}. \tag{3.1}$$

Notons S la variable aléatoire égale au score obtenu à cette question. Le cas $S = -\gamma$, techniquement présent pour écarter les réponses farfelues, est en pratique, écarté. On a donc $S \in \{\alpha, -\beta\}$ et, par définition (puisque 1 est le numéro de la bonne réponse)

$$S = \alpha \Longleftrightarrow X = 1, \tag{3.2a}$$

$$S = -\beta \Longleftrightarrow X \in \{2, ..., N\}. \tag{3.2b}$$

On a par définition de l'espérance

$$\mathbb{E}(S) = \alpha p(S = \alpha) - \beta p(S = -\beta),$$

et donc, on obtient successivement, d'après (3.2) :

$$\mathbb{E}(S) = \alpha p(X = 1) - \beta p(X \in \{2, ..., , N\}),$$

et puisque les événements $X = k$, pour $k \in \{2, ..., N\}$ sont disjoints :

$$= \alpha p(X = 1) - \beta \sum_{k=2}^{N} p(X = k),$$

d'après (3.1) :

$$= \alpha \frac{1}{N} - \beta \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{N},$$

$$= \frac{1}{N} \left(\alpha - \beta(N - 1) \right),$$

Pour que cette espérance soit égale à $-M$, il faut et il suffit donc que

$$\frac{1}{N} \left(\alpha - \beta(N - 1) \right) = -M,$$

ce qui est équivalent à

$$\alpha - \beta(N - 1) = -MN$$

et donc à

$$\alpha + MN = \beta(N - 1)$$

ce qui est équivalent à (1.1b), en notant que, par hypothèse $\alpha + MN > 0$ et $N - 1 > 0$ $\diamondsuit$

3.2. Questions multiples

Montrons comment la valeur de β est obtenue.

Chacune des réponses est repérée (par exemple) par un N-uplet d'entiers $(c_1, c_2, ..., c_N) \in \{1, 0\}^N$, où, par convention, si $c_i = 1$, la réponse numéro i est bonne et si $c_i = 0$, elle est fausse. Le nombre d'entiers c_i égaux à 1 vaut P. L'étudiant va proposer lui aussi N-uplet d'entiers $(d_1, d_2, ..., d_N) \in \{1, 0\}^N$. S'il choisit la case "*Aucune de ces réponses n'est correcte.*" tous les d_i sont nuls. Sinon, le nombre d'entiers d_i égaux à 1 appartient à $\{1, ..., N\}$. Notons X la variable aléatoire égale à $(d_1, d_2, ..., d_N)$. L'univers des possibles est donc ici $\{1, 0\}^N$, de cardinal 2^N. Si l'étudiant choisit au hasard, chacune des valeurs 0 ou 1 pour chaque entier d_i a la même probabilité d'apparition. On est donc dans un cas équiprobable et on a :

$$p(X = (c_1, c_2, ..., c_N)) = \frac{1}{2^N}, \tag{3.3a}$$

$$\forall Z \in \{1, 0\}^N \setminus (c_1, c_2, ..., c_N), \quad p(X = Z) = \frac{2^N - 1}{2^N}. \tag{3.3b}$$

Le calcul qui suit est très proche de celui de la section 3.1. Notons S la variable aléatoire égale au score obtenu à cette question. Le cas $S=-\gamma$, techniquement présent pour écarter les réponses farfelues, est en pratique, écarté. On a donc $S\in\{\alpha,-\beta\}$ et, par définition

$$S=\alpha \Longleftrightarrow X=(c_1,c_2,....,c_N), \tag{3.4a}$$

$$S=-\beta \Longleftrightarrow X\neq(c_1,c_2,....,c_N). \tag{3.4b}$$

On a par définition de l'espérance

$$\mathbb{E}(S)=\alpha p(S=\alpha)-\beta p(S=-\beta),$$

et donc, on obtient successivement, d'après (3.4) :

$$\mathbb{E}(S)=\alpha p(X=(c_1,c_2,....,c_N))-\beta p(X\in\{1,0\}^N\setminus(c_1,c_2,....,c_N)),$$

et puisque les événements de $\{1,0\}^N\setminus(c_1,c_2,....,c_N)$ sont disjoints et d'après (3.3) :

$$\begin{aligned}&=\alpha\frac{1}{2^N}-\beta\frac{2^N-1}{2^N},\\&=\frac{1}{2^N}\left(\alpha-\beta(2^N-1)\right),\end{aligned}$$

Pour que cette espérance soit égale à $-M$, il faut et il suffit donc que

$$\frac{1}{2^N}\left(\alpha-\beta(2^N-1)\right)=-M,$$

ce qui est équivalent à

$$\alpha-\beta(2^N-1)=-2^NM$$

et donc à

$$\alpha+2^NM=\beta(2^N-1)$$

ce qui est équivalent à (1.2b), en notant que, par hypothèse $\alpha+2^NM>0$ et $2^N-1>0$ $\diamondsuit$

Email address: `jerome.bastien@univ-lyon1.fr`