



Corrigé de l'examen CCF2 de Biomécanique du mouvement

Correction de l'exercice 1.

Les numéros de tableaux cités dans cet exercice sont ceux de l'énoncé. D'autres tableaux ont aussi été rajoutés à la fin de ce corrigé, section E page 16.

- (1) (a) Rappelons que les données anthropométriques de l'énoncé sont issus de [Win09], notamment les masses (et rayons de girations) : p. 86 et les longueurs : p. 83, eux-même issus de [DC66].

On connaît les données anthropométriques du gymnaste (masse et taille) :

$$M = 1.70 \text{ kg}, \tag{1a}$$

$$L = 65 \text{ m}. \tag{1b}$$

On utilise le tableau 1 page 4 qui contient les rapports masse segment/masse corps (m_i/M , notés \tilde{m}_i) et les rapports longueur segment/taille (l_i/L , notés \tilde{l}_i) des segments utilisés. On en déduit donc les longueurs m_i et les longueurs l_i en écrivant

$$m_i = M\tilde{m}_i, \tag{2a}$$

$$l_i = L\tilde{l}_i \tag{2b}$$

On en déduit successivement par exemple

$$m_1 = M\tilde{m}_1 = 65.00 \times 0.081 = 5.265 \text{ kg},$$

$$l_2 = L\tilde{l}_2 = 1.70 \times 0.440 = 0.748 \text{ m}.$$

Enfin, la longueur totale du corps tendu n'est la taille du gymnaste (!) mais la somme des longueurs des segments 2, 3 et 4 :

$$l_5 = l_2 + l_3 + l_4 = 0.748 + 0.490 + 0.901 = 2.139 \text{ m}.$$

et donc

$$l_5 = 2.139 \text{ m}. \tag{3}$$

- (b) Pour un solide en rotation autour d'un axe, de vitesse angulaire ω , chaque point à la distance R de cet axe a une vitesse linéaire égale à

$$v = R\omega. \tag{4}$$

Avec les notations précédentes, l'articulation de l'épaule, de la hanche et du gros orteil se trouvent respectivement à une des distances égales à

$$l_2 = 0.748,$$

$$l_2 + l_3 = 1.238,$$

$$l_5 = 2.139$$

et d'après (4), on en déduit donc les vitesses linéaires de ces points respectivement de 4.57ms^{-1} , 7.56ms^{-1} et 13.06ms^{-1} .

(c)

(i)

On peut, en position horizontale du corps, comme le montre la figure 1 de l'énoncé, placer un repère sur la barre et déterminer les différentes abscisses des articulations du corps (les ordonnées étant toutes nulles) et utiliser la formule du cours : De façon générale, si on calcule les coordonnées du centre de gravité du segment $[PD]$ où P désigne l'extrémité proximale et D l'extrémité distale, on utilise les coefficients k_D ou k_P (dont la somme vaut 1 et qui sont donnés dans le tableau 2) et qui sont définis par

$$k_P = \frac{GP}{PD}, \quad k_D = \frac{GD}{DP}, \quad (5)$$

dont on déduit les deux formules équivalentes (O désigne l'origine du repère) :

$$\vec{OG} = k_P \vec{PD} + \vec{OP}, \quad \vec{OG} = k_D \vec{DP} + \vec{OD}.$$

Elles s'écrivent aussi sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} x_G = k_P(x_D - x_P) + x_P, \\ y_G = k_P(y_D - y_P) + y_P, \\ x_G = k_D(x_P - x_D) + x_D, \\ y_G = k_D(y_P - y_D) + y_D. \end{cases}$$

Ces deux formules sont équivalentes puisque $k_D + k_P = 1$.

Il est un peu plus rapide de calculer pour chacun des centres de gravité des segments considérés d'utiliser (5) et d'en déduire

$$GP = k_P PD = k_i l_i \quad (6)$$

Par exemple, pour le membre supérieur, on en déduit alors, puisque son extrémité proximale est l'épaule, située à la distance l_2 de la barre

$$\lambda_2 = l_2 - k_2 l_2 = 0.352.$$

Pour le membre inférieur, on en déduit alors, puisque son extrémité proximale est la hanche, située à la distance $l_2 + l_3$ de la barre

$$\lambda_4 = l_2 + l_3 + k_4 l_4 = 1.640.$$

(ii) On peut de nouveau, en position horizontale du corps, comme le montre la figure 1 de l'énoncé, placer un repère sur la barre et déterminer les différentes abscisses des centres de gravité des segments du corps (les ordonnées étant toutes nulles) et utiliser la formule du cours :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\sum_i m_i x_{Gi}}{M}, \\ y_G = \frac{\sum_i m_i y_{Gi}}{M}, \end{cases}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \sum_i \frac{m_i}{M} x_{Gi}, \\ y_G = \sum_i \frac{m_i}{M} y_{Gi}, \end{array} \right.$$

où, pour chaque i , m_i est la masse du segment i et (x_{Gi}, y_{Gi}) les coordonnées du centre de gravité du segment i et

$$M = \sum_i m_i \quad (7)$$

est la somme des masses de chacun des segments.

Il est plus rapide d'observer que ces formules impliquent

$$\lambda = \sum_i \frac{m_i}{M} \lambda_i = \sum_i \tilde{m}_i \lambda_i \quad (8)$$

dont on déduit numériquement

$$\lambda = 1.092 \text{ m} \quad (9)$$

- (2) (a) On sait que le moment d'inertie du gymnaste (corps rigide et tendu) est égal à

$$I = Mr^2 \quad (10)$$

où le rayon de giration du corps du gymnaste vaut

$$r = 0.687 \text{ kgm}^2. \quad (11)$$

Il vient donc

$$I = 65 \times 0.687^2$$

et donc

$$I = 30.700 \text{ kgm}^2. \quad (12)$$

Pour le calcul du rayon de giration du gymnaste, on renvoie à l'annexe A page 9.

- (b) Le centre de gravité du gymnaste est la distance λ de la barre et à la distance $\nu = 1.5$ du sol ; on en déduit donc les hauteurs respectives du centre de gravité du gymnaste :
- en position 1 : $2\lambda + \nu = 3.685$
 - en positions 2 et 4 : $\lambda + \nu = 2.592$
 - en position 3 : $\nu = 1.500$
- ce qui correspond bien aux valeurs du tableau 5.

- (c) Donnons directement le calcul de l'énergie potentielle, de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique du gymnaste pour la position 2, pour lesquelles on utilise les données du tableau 5.

De façon générale, on considère un solide indéformable dont on connaît

- M , la masse
- I , le moment d'inertie
- z_G , l'altitude du centre de gravité
- v_G , la vitesse du centre de gravité
- ω , la vitesse angulaire de rotation autour de G , par rapport à un axe fixe

On note

- E_p , l'énergie potentielle
- E_c , l'énergie cinétique
- E_{ct} , l'énergie cinétique de translation
- E_{cr} , l'énergie cinétique de rotation

Alors, l'énergie mécanique est égale à

$$\begin{aligned} E &= E_p + E_c, \\ &= E_p + E_{ct} + E_{cr}, \\ &= Mgz_G + \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \end{aligned}$$

Ici, le système étudié est corps (tendu) du gymnaste.

On a donc successivement

$$E_p = 65.0000 \times g \times 2.5923 = 65.0000 \times 9.8100 \times 2.5923 = 1652.9775 \text{ J},$$

$$E_{ct} = \frac{1}{2} \times 65.0000 \times (5.4008)^2 = 947.9770 \text{ J},$$

$$E_{cr} = \frac{1}{2} \times 30.6998 \times (4.9444)^2 = 375.2662 \text{ J},$$

et donc

$$E = 2976.2207 \text{ J}.$$

- (d) Pour calculer V_G , la vitesse du centre de gravité du gymnaste si sa vitesse de rotation est égale à ω , il suffit d'utiliser la formule (4) avec $R = \lambda$.
- (e) Corrigé ci-dessus.
- (f) Corrigé ci-dessus.
- (g) On constate dans le tableau 6, que l'énergie totale est constante, ce qui provient du fait que le gymnaste est en position gainée, est donc rigide et il y a donc un système mécaniquement isolé. Lors de la phase de descente, on a une accélération, donc une augmentation de la vitesse et une diminution de la hauteur, ce qui se traduit par une augmentation de l'énergie cinétique et une diminution de l'énergie potentielle. En phase de remontée, c'est exactement le contraire!
En fait, nous avons préparé le calcul à l'envers pour remplir le tableau 6, en utilisant le fait que l'énergie totale est constante! Voir annexe C page 12.
- (h) En réalité, à chaque tour, le gymnaste fait un léger «fouetté» des jambes en passant sous la barre, de façon à conserver son énergie totale constante, ce qui se traduit par le fait qu'à chaque fois qu'il passe au-dessus de la barre, sa vitesse est la même.
- (3) (a) Entre les positions 1 et 3, le gymnaste descend et d'après les résultats de la question 2g, son énergie cinétique augmente. Si on note ω la vitesse de rotation angulaire du gymnaste, les formules rappelées dans la question 2c donnent

$$E_{ct} = \frac{1}{2}MV_G^2$$

et donc, d'après (4),

$$E_{ct} = \frac{1}{2}M\lambda^2\omega^2 \quad (13)$$

On a aussi

$$E_{ct} = \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 \quad (14)$$

et

$$E_c = \frac{1}{2}M(\lambda^2 + r^2)\omega^2 \quad (15)$$

Une augmentation de E_c se traduit donc par une augmentation de la vitesse de rotation angulaire du gymnaste ω .

Un raisonnement plus rigoureux constaterait à utiliser l'équation (54) : entre la position 1 et 3, θ appartient à $[0, \theta_0] = [-\pi, 0]$ (voir les conditions initiales (64)), intervalle qu'il décroît en croissant. Or sur la fonction \cos est

croissante sur $[-\pi, 0]$ et donc $\omega_0^2 + K(\cos\theta - \cos\theta_0)$ croît quand θ croît. Ainsi ω^2 croît. On peut montrer que le nombre algébrique ω est de signe constant et ne peut donc s'annuler (car la fonction $t \mapsto \omega$ est continue); les conditions initiales (64) nous disent que ω_0 est strictement positif. Bref ω est strictement positif et ω^2 croît donc ω croît. \diamond

- (b) D'après les résultats de la question 3a Entre les positions 1 et 3, la vitesse angulaire du gymnaste est supérieure à la vitesse angulaire en position 1, donnée par

$$\omega_1 = 194.97^\circ\text{s}^{-1}. \quad (16)$$

et inférieure à la vitesse angulaire en position 3, donnée par

$$\omega_3 = 350.00^\circ\text{s}^{-1}. \quad (17)$$

Pour faire un demi-tour, entre les positions 1 et 3, il mettra donc moins (respectivement plus) de temps que s'il tournait à vitesse angulaire constante ω_1 (respectivement ω_3). À vitesse angulaire constante ω , on a tourné d'un angle θ pendant un intervalle de temps Δt avec

$$\omega = \frac{\theta}{\Delta t} \quad (18)$$

On a donc, en appelant T , le temps mis par le gymnaste pour aller de la position 1 à la position 3 (en parcourant donc un angle de π radians)

$$T_3 < T < T_1,$$

avec

$$T_1 = \frac{\pi}{\omega_1} \text{ et } T_3 = \frac{\pi}{\omega_3}$$

En convertissant les degrés en radians, on a donc numériquement

$$T_1 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\frac{194.97}{180} \times \pi} = \frac{180}{194.97},$$

$$T_3 = \frac{\pi}{\omega_3} = \frac{\pi}{\frac{350.00}{180} \times \pi} = \frac{180}{350.00}.$$

Bref,

$$\frac{180}{350.00} < T < \frac{180}{194.97}$$

soit numériquement

$$0.51 < T < 0.92 \quad (19)$$

Un raisonnement plus rigoureux constaterait à écrire

$$\theta_0 = \pi = \int_0^\pi d\theta$$

et d'utiliser

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (20)$$

et donc

$$d\theta = \omega dt \quad (21)$$

et ainsi

$$\pi = \int_0^T \omega dt \leq \int_0^T \omega_3 dt = \omega_3 \int_0^T dt = \omega_3 T.$$

Ainsi

$$T \geq \frac{\pi}{\omega_3}.$$

De même, on montre que

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_1}.$$

Remarque 1. On peut être encore plus précis pour calculer T en écrivant, grâce à (21),

$$T = \int_0^T dt = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\omega} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\omega(\theta)}$$

D'après (59), on a donc,

$$T = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\omega_0^2 + K(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \quad (22)$$

Numériquement, on peut calculer cette intégrale et on obtient

$$T = 0.6746 \text{ s} \quad (23)$$

ce qui corrobore (19). Ce temps de demi-tour correspond à la période $2T$, temps mis pour faire le tour complet, donné par

$$T_p = 2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\omega_0^2 + K(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \quad (24)$$

Numériquement, on obtient

$$T = 1.3492 \text{ s} \quad (25)$$

◇

- (4) (a) La seconde loi de Newton appliquée au gymnaste, qui n'est soumis qu'à son propre poids $\vec{p} = M\vec{g}$ et la réaction de la barre \vec{R} exercée par la barre, permet d'écrire

$$M\vec{a}_G = M\vec{g} + \vec{R}$$

dont on déduit

$$\vec{R} = M(\vec{a} - \vec{g})$$

et donc

$$R_x = Ma_x, \quad (26a)$$

$$R_y = M(a_y + g). \quad (26b)$$

On en déduisait les valeurs soulignées du tableau 7.

Les valeurs des accélérations a_x et a_y n'étaient pas fournies dans le sujet, néanmoins, on peut les déterminer en fonction de θ ! Voir l'annexe D où l'équation (66) est établie. De (26), on déduit alors

$$R_x = M\lambda(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta),$$

$$R_y = M(\lambda(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + g)$$

Enfin, de (62), on déduit

$$\ddot{\theta} = -\frac{K}{2} \sin \theta,$$

où K est défini par (53). On a donc

$$R_x = M\lambda\left(-\frac{K}{2} \cos \theta \sin \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta\right), \quad (27a)$$

$$R_y = M\left(\lambda\left(-\frac{K}{2} \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta\right) + g\right) \quad (27b)$$

Dans cette équation, $\theta^2 = \omega^2$ peut être explicitement calculée en fonction de θ grâce à (54). Cela nous a permis de remplir le tableau 7.

Remarque 2.

On peut aussi grâce à ces formules tracer R_x et R_y en fonction de $\theta \in [-\pi, \pi]$ comme le montre la figure 1 page ci-contre. On constate que, pour $\theta \in]-\pi, 0[$ (phase de descente), on a $R_x > 0$ et que, pour $\theta \in]0, \pi[$ (phase de montée), on a $R_x < 0$.

◇

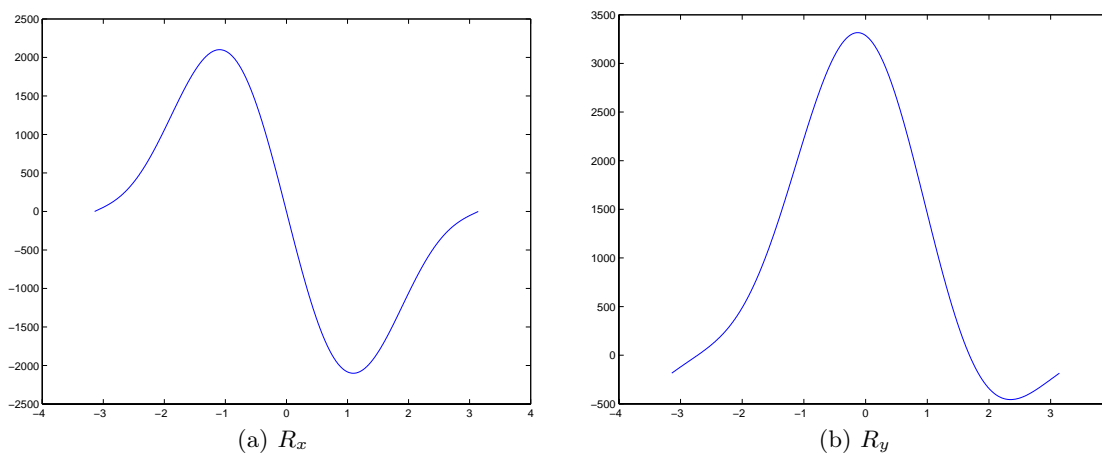


FIGURE 1. Les réactions R_x et R_y au cours du mouvement.

- (b) En utilisant le tableau 7, on trouve les caractérisations suivantes des réactions d'appuis \vec{R}_1 et \vec{R}_3 aux positions 1 et 3.

$$\vec{R}_1 \text{ défini par } \left\{ \begin{array}{l} \text{Point d'application : } G_1 \\ \text{Norme : } 184.471 \text{ m} \\ \text{Direction : } -90.00^\circ \\ \text{Sens : } \text{Bas} \end{array} \right. ,$$

$$\vec{R}_3 \text{ défini par } \left\{ \begin{array}{l} \text{Point d'application : } G_1 \\ \text{Norme : } 3287.031 \text{ m} \\ \text{Direction : } -90.00^\circ \\ \text{Sens : } \text{Haut} \end{array} \right. ,$$

Ce qui est étonnant est que la première force soit dirigée vers la bas : l'action du gymnaste à ce moment-là (en haut du soleil) sur la barre est donc vers le haut : sa vitesse de rotation est assez élevée pour qu'il entraîne son support vers le haut !

- (5) On remarque que le point de départ et d'arrivée de la phase de chute libre ont la même altitude (1.8199). On est donc exactement dans le cadre du cours. On renvoie au chapitre 8 du polycopié de cours, disponible sur internet sur <http://utbmjb.cher-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>.

- (a) D'après la formule (8.18) du cours, qu'il faut établir, on a le demi-temps de vol (c'est-à-dire le temps qui s'écoule entre le début et le sommet)

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

et le temps de vol complet est donc

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g},$$

soit numériquement

$$t = \frac{2 \times 6.3265 \times \sin(45)}{9.81} = 0.9120.$$

- (b) Le tapis doit être positionné au delà de la portée L de la parabole, définie par l'équation (8.17) du cours, qu'il faut montrer. On a donc

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

soit numériquement

$$L = 4.0800.$$

Correction de l'exercice 2.

Exercice issu de

http://www.hgc-reims.com/documents-hgc-reims/documents-nap-hex-gc-reims/doc_download/30-examen-niveau-3-mars-2005
Commission Technique ; Évaluation théorique niveau 3. Hommes grenouilles de Champagne-Reims

On utilisera dans cet exercice successivement : les hypothèses de la section 9.3.3.1 que l'on rappelle ici :

- la pression de l'eau obéit à la loi (9.11), soit

$$P(h) = ah + b \quad (28)$$

où $a = 0.1$ et $b = 1$, pour une profondeur h en m et une pression en bar.

- la loi de Mariotte (9.34), rappelée ici :

$$PV = \text{constante} \quad (29)$$

où on peut exprimer P en bar et V en l.

- (1) Au début du palier, la pression du bloc est égale à $P = 75$ bar. Vous allez consommer un volume d'air (à pression ambiante, à la profondeur donnée) égal à

$$V_1 = \lambda \Delta t \quad (30)$$

où λ est la consommation d'air par minute et Δt le temps du palier. Ainsi, le volume intérieur d'air V (à la pression P) de votre bloc se décompose en deux parties :

- un volume V_2 d'air consommé, qui occupera, une fois à la pression ambiante $P(h)$, donné par (28), le volume V_1 ;
- un volume $V - V_2$ d'air non consommé, qui occupera, une fois le volume V_2 parti, la totalité du volume intérieur de votre bloc V , à la nouvelle pression inconnue P' .

Appliquons donc la loi de Mariotte (29) à ces deux quantités d'air :

$$V_2 P = V_1 P(h), \quad (31a)$$

$$(V - V_2) P = V P'. \quad (31b)$$

De ces équation, déduisons la pression inconnue P' . On a grâce à (31b)

$$P' = \frac{V - V_2}{V} P,$$

qui devient en utilisant (31a)

$$\begin{aligned} &= \frac{P}{V} \left(V - \frac{P(h)}{P} V_1 \right), \\ &= P - P(h) \frac{V_1}{V} \end{aligned}$$

et enfin, en utilisant (28) et (30)

$$= P - (ah + b) \frac{\lambda \Delta t}{V}$$

On a donc

$$P' = P - (ah + b) \frac{\lambda \Delta t}{V} \quad (32)$$

Numériquement, on obtient donc

$$P' = 37.8 \text{ bar.}$$

Attention, cette valeur est inférieure aux 50 bar recommandés de pression minimale !

- (2) Le raisonnement est identique : Le volume intérieur d'air V (à la pression P_n exigée de 200 bar) de votre bloc se décompose en deux parties :
- un volume V_3 de gaz réintroduit qui a occupé à la pression atmosphérique ambiante $P(0) = b$, donnée par (28), le volume V_4 , qui est le volume recherché ;
 - un volume $V - V_3$ qui a occupé avant que le bloc ne soit rempli, la totalité du volume intérieur de votre bloc V , à la pression maintenant connue P' , donnée par (32).

La lois de Mariotte appliquée à ces deux volumes donne donc respectivement

$$\begin{aligned} V_4 b &= V_3 P_n, \\ V P' &= (V - V_3) P_n. \end{aligned}$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned} V_4 &= \frac{P_n}{b} V_3, \\ &= \frac{P_n}{b} \left(V - \frac{V P'}{P_n} \right), \\ &= \frac{P_n}{b} V - \frac{P'}{b} V, \\ &= \frac{P_n - P'}{b} V \end{aligned}$$

et bref

$$V_4 = \frac{P_n - P'}{b} V. \quad (33)$$

Numériquement, on obtient donc

$$P' = 1784.5 \text{ l.}$$

Annexe A. Calcul du rayon de giration total du gymnaste

En utilisant les formules rappelées dans la question 2, on aurait pu calculer, pour chacun des segments du gymnaste, les différentes énergies et les sommer pour obtenir les énergies de l'ensemble du gymnaste. Il est plus rapide de considérer que le gymnaste est rigide et forme donc un seul système formé d'un seul segment de masse M et de longueur l_5 . La position de son centre de masse est défini par λ donné par (9).

Calculons le rayon de giration r (total).

D'après les formules rappelées dans la question 2, pour chaque segment i , on a

$$E_{c_i} = E_{ct_i} + E_{cr_i} = \frac{1}{2} m_i V_{G_i}^2 + \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$

Or, toute les vitesses angulaires ω_i sont égale à ω . On sait aussi que

$$I_i = m_i r_i^2$$

Enfin, chaque point G_i se trouve à la distance λ_i de centre de rotation et, d'après (4), on a donc $V_{G_i} = \lambda_i \omega$. Bref, on a donc

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i \lambda_i^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

et donc

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 (\lambda_i^2 + r_i^2) \quad (34)$$

et en sommant sur les N segments

$$E_c = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^N m_i (\lambda_i^2 + r_i^2). \quad (35)$$

La formule (34) appliquée au corps total donne

$$E_c = \frac{1}{2}M\omega^2 (\lambda^2 + r^2), \quad (36)$$

ce qui donne, en comparant à (35) :

$$M (\lambda^2 + r^2) = \sum_{i=1}^N m_i (\lambda_i^2 + r_i^2). \quad (37)$$

On en déduit donc r^2

$$r^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (\lambda_i^2 + r_i^2) - \lambda^2$$

soit encore, en utilisant (7) et (8) :

$$r^2 = \frac{1}{M^2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \sum_{i=1}^N m_i (\lambda_i^2 + r_i^2) - \left(\sum_{i=1}^N m_i \lambda_i \right)^2 \right) \quad (38)$$

Notons que la quantité de droite est bien positive! En effet, on rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz : Si $(a_i)_{1 \leq i \leq q}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq q}$ désigne deux q -uplets de réels, on a

$$\left(\sum_{i=1}^q a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^q a_i^2 \sum_{i=1}^q b_i^2. \quad (39)$$

Si on applique cela à $a_i = \sqrt{m_i}$ et $b_i = \sqrt{m_i} \lambda_i$, il vient donc

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \lambda_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^N m_i \sum_{i=1}^N m_i \lambda_i^2$$

et donc *a fortiori*, puisque $r_i^2 \geq 0$

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \lambda_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^N m_i \sum_{i=1}^N m_i (\lambda_i^2 + r_i^2)$$

On déduit alors de (38)

$$r = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{i=1}^N m_i \sum_{i=1}^N m_i (\lambda_i^2 + r_i^2) - \left(\sum_{i=1}^N m_i \lambda_i \right)^2} \quad (40)$$

On utilise les données « normalisées » des tableaux de Winter, à savoir les rapports m_i/M , notés \tilde{m}_i l_i/L , notés \tilde{l}_i et r_i/l_i , notés \tilde{r}_i , on a donc

$$\begin{aligned} l_i &= \tilde{l}_i L, \\ m_i &= \tilde{m}_i M, \\ r_i &= \tilde{r}_i \tilde{l}_i L. \end{aligned}$$

et finalement

$$\tilde{r} = \frac{r}{L} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \tilde{m}_i \sum_{i=1}^N \tilde{m}_i (\tilde{\lambda}_i^2 + \tilde{l}_i^2 \tilde{r}_i^2) - \left(\sum_{i=1}^N \tilde{\lambda}_i \tilde{m}_i \right)^2} \quad (41)$$

ce qui a été utilisé réellement pour déterminer r donné par

$$r = 0.687 \text{ kgm}^2. \quad (42)$$

Attention, les données de Winter relatives aux segments de l'énoncé ne permettent pas de calculer les rayons de girations, notamment parce que celui du tronc n'est pas indiqué! Pour calculer \tilde{r} et en déduire le rayon de giration total du corps r , on procède donc autrement. Plutôt que de considérer la décomposition de l'énoncé ($\{\text{tête et cou, membre supérieur, tronc, membre inférieur}\}$) on considère la décomposition : $\{\text{tronc, tête et cou, membre supérieur, membre inférieur}\}$ dont les données anthropométriques totales (dont le rayon de giration) figurent dans les tableaux 1 et 2. On en déduit alors comme précédemment les tableaux 3 et 4 page 16, ainsi que la valeur λ du corps total donné par

$$\lambda = 1.092 \text{ m} \quad (43)$$

Attention, il semble que les données de Winter (voir [Win09, p. 83 et 86]) ne soient pas tout à fait correctes en ce qui concerne l'ensemble tronc, tête et cou. Le coefficient proximal

$$k_P = 0.660 \text{ m} \quad (44)$$

doit être en effet recalculé! Voir l'annexe B. Notons que cette distance λ donnée par (43) est égale à celle donnée par l'énoncé (où la décomposition du corps est donnée par $\{\text{tête et cou, membre supérieur, tronc, membre inférieur}\}$) :

$$\lambda = 1.092 \text{ m} \quad (45)$$

Si on avait utilisé la valeur donnée par (44), on aurait trouvé

$$\lambda = 1.122 \text{ m},$$

ce qui est donc légèrement différent de la valeur de l'énoncé (45)! Dans le tableau 4, la valeur de r_4 est donnée par (41)-(42).

Annexe B. Calcul du centre de gravité de l'ensemble tronc, tête et cou

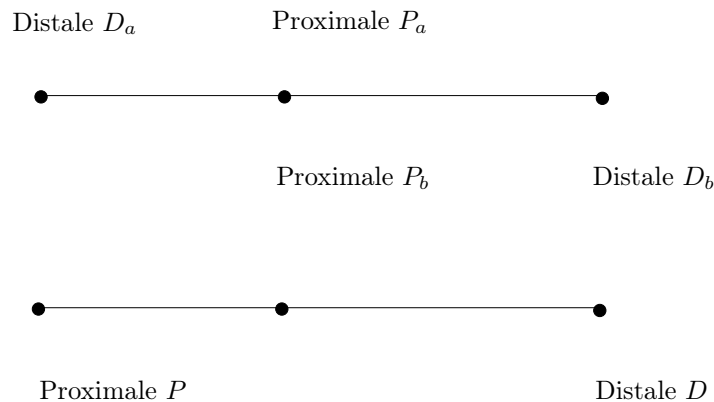


FIGURE 2. L'ensemble $\{\text{tronc, tête et cou}\}$, réunion de $\{\text{tête et cou}\}$ et $\{\text{tronc}\}$.

Si on considère l'ensemble $\{\text{tronc, tête et cou}\}$, de masse normalisée \tilde{m} et de longueur normalisée \tilde{l} lui-même, réunion de $\{\text{tête et cou}\}$ et $\{\text{tronc}\}$, de masses et de longueurs normalisées respectivement égales à \tilde{m}_a , \tilde{m}_b , \tilde{l}_a et \tilde{l}_b , on a alors (voir figure 2)

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \tilde{m}_a + \tilde{m}_b, \\ \tilde{l} &= \tilde{l}_a + \tilde{l}_b. \end{aligned}$$

On montre ensuite que le coefficient proximal k_P de l'ensemble {tronc, tête et cou} s'exprime en fonction des coefficients proximaux k_{P_a} et k_{P_b} de {tête et cou} et {tronc} de la façon suivante :

$$k_P = \frac{1}{\tilde{l}\tilde{m}} \left(\tilde{m}_a(1 - k_{P_a})\tilde{l}_a + \tilde{m}_a(\tilde{l}_a + k_{P_b}\tilde{l}_b) \right).$$

À partir des données des tableaux 1 et 2 de l'énoncé, on peut donc déterminer les masses, longueur et k_P de l'ensemble {tronc, tête et cou}, qui correspondent bien aux valeurs données dans [Win09, p. 83 et 86] *sauf* pour le k_P qui vaut

$$k_P = 0.596 \text{ m} \quad (46)$$

légèrement différente de la valeur donnée par (44)!

Annexe C. Calcul de l'énergie du gymnaste au cours du mouvement

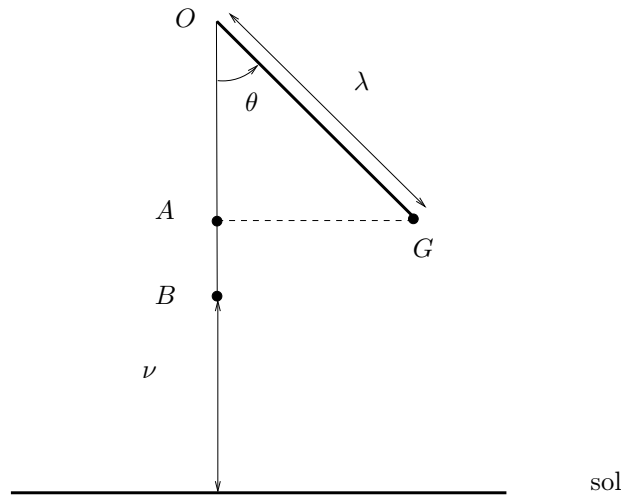


FIGURE 3. Le gymnaste au cours du mouvement.

Pour un angle θ quelconque, repérant la position du gymnaste (voir figure 3), on sait que

$$AB = OB - OA = \lambda - \lambda \cos \theta$$

et donc, que par rapport au sol,

$$y_G = \nu + \lambda(1 - \cos \theta). \quad (47)$$

L'énergie potentielle vaut donc

$$E_p = Mg(\nu + \lambda(1 - \cos \theta)). \quad (48)$$

Si on note ω la vitesse de rotation angulaire du gymnaste, les formules rappelées dans la question 2g donnent directement l'énergie cinétique en fonction de θ (voir (15)). On a donc

$$E = M \left(g(\nu + \lambda(1 - \cos \theta)) + \frac{1}{2}(\lambda^2 + r^2)\omega^2 \right). \quad (49)$$

Seule la barre exerce une force externe sur le sportif rigide. La barre étant immobile, il n'y a donc pas de variation d'énergie et on a donc

$$M \left(g(\nu + \lambda(1 - \cos \theta)) + \frac{1}{2}(\lambda^2 + r^2)\omega^2 \right) = \text{constante} \quad (50)$$

Nous avons les conditions initiales suivantes :

$$\theta(0) = \theta_0, \quad (51a)$$

$$\omega(0) = \omega_0. \quad (51b)$$

Il vient donc

$$M \left(g(\nu + \lambda(1 - \cos \theta)) + \frac{1}{2}(\lambda^2 + r^2)\omega^2 \right) = M \left(g(\nu + \lambda(1 - \cos \theta_0)) + \frac{1}{2}(\lambda^2 + r^2)\omega_0^2 \right)$$

et donc

$$\left(g(\nu + \lambda(1 - \cos \theta)) + \frac{1}{2}(\lambda^2 + r^2)\omega^2 \right) = \left(g(\nu + \lambda(1 - \cos \theta_0)) + \frac{1}{2}(\lambda^2 + r^2)\omega_0^2 \right) \quad (52)$$

soit en notant

$$K = \frac{2\lambda g}{\lambda^2 + r^2}, \quad (53)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + K(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (54)$$

ce qui fournit

$$|\omega| = \sqrt{\omega_0^2 + K(\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (55)$$

Choisissons par exemple $\theta_0 = \pi$ et ω_0 tel que $\omega(0) = \alpha_0$ où α_0 est donné. D'après (54), on a donc

$$\alpha_0^2 = \omega_0^2 + 2K \quad (56)$$

Il est donc nécessaire que

$$\alpha_0^2 \geq 2K. \quad (57)$$

Dans ce cas, on peut choisir

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha_0^2 - 2K}, \quad (58)$$

la vitesse angulaire est toujours positive et on a explicitement

$$\omega(\theta) = \sqrt{\omega_0^2 + K(\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (59)$$

Ainsi, on peut remplir le tableau 5 et 6 en écrivant, successivement à θ fixé :

$$y_G(\theta) = \nu + \lambda(1 - \cos \theta), \quad (60a)$$

$$V_G(\theta) = \lambda\omega(\theta), \quad (60b)$$

$$E_p(\theta) = Mg(\nu + \lambda(1 - \cos \theta)), \quad (60c)$$

$$E_c(\theta) = \frac{1}{2}M(\lambda^2 + r^2)\omega^2 \quad (60d)$$

Notons aussi que l'on peut dériver l'équation (50) et obtenir l'équation différentielle qui permet de calculer $\theta(t)$: on écrit

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \omega \frac{d}{d\theta}. \quad (61)$$

On a donc, par dérivation de (52)

$$\begin{aligned} 0 &= g\lambda\omega \frac{d}{d\theta} (-\cos \theta) + \frac{1}{2}(\lambda^2 + r^2)\omega \frac{d}{dt} (\omega^2), \\ &= g\lambda\omega \sin \theta + (\lambda^2 + r^2)\omega \frac{d}{dt} (\omega), \\ &= g\lambda\omega \sin \theta + (\lambda^2 + r^2)\omega \dot{\omega}, \end{aligned}$$

où $\dot{\omega}$ désigne la dérivée de ω par rapport au temps. On a alors $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$ où $\ddot{\theta}$ désigne la dérivée seconde de θ par rapport au temps. On a finalement

$$\omega \left(g\lambda \sin \theta + (\lambda^2 + r^2)\ddot{\theta} \right) = 0$$

et donc, à chaque instant, soit $\omega = 0$ soit

$$g\lambda \sin \theta + (\lambda^2 + r^2)\ddot{\theta} = 0.$$

Le cas $\omega = 0$ correspond à un gymnaste arrêté et on a donc

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \sin \theta = 0 \quad (62)$$

où

$$\Omega = \sqrt{\frac{g\lambda}{\lambda^2 + r^2}}. \quad (63)$$

On utilise aussi les conditions initiales (64) écrites sous la forme

$$\theta(0) = \theta_0, \quad (64a)$$

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0. \quad (64b)$$

Annexe D. Calcul de l'accélération du centre de gravité du gymnaste

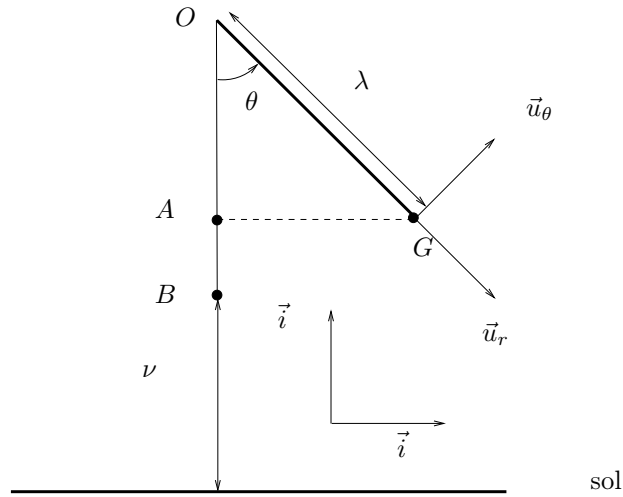


FIGURE 4. Le gymnaste au cours du mouvement et le repère local $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

Le centre de gravité G du gymnaste vérifie

$$\vec{OG} = \lambda \vec{u}_r$$

où $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ désigne un repère local lié au gymnaste. Voir figure 4. En utilisant (61), on a donc

$$\vec{v}_G = \frac{d}{dt} \vec{OG} = \omega \lambda \frac{d}{d\theta} \vec{u}_r = \lambda \dot{\theta} \vec{u}_\theta,$$

et en redérivant de la même façon

$$\vec{a}_G = \lambda \left(\ddot{\theta} \vec{u}_\theta + (\dot{\theta})^2 \frac{d}{d\theta} \vec{u}_\theta \right)$$

soit encore

$$\vec{a}_G = \lambda \left(\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - \dot{\theta}^2 \vec{u}_r \right) \quad (65)$$

Enfin, on exprime les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ dans le repère (\vec{i}, \vec{j}) : un peu de trigonométrie nous montre que

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Ainsi, de (65), on tire

$$\vec{a}_G = \lambda \left(\ddot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} - \dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \right)$$

et donc

$$\vec{a}_G = \lambda \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{pmatrix} \quad (66)$$

Pour plus de détails sur ces calculs, consulter par exemple [Bas07, p. 50, équation (3.82b) ou p. 21 (avec $r(\theta) = \lambda$)].

Annexe E. Ensemble des tableaux

segment	numéro i	m_i/M	l_i/L	r_i/l_i
tronc, tête et cou	1	0.578	0.470	0.503
membre supérieur	2	0.100	0.440	0.368
membre inférieur	3	0.322	0.530	0.326
total (corps tendu)	4	1.000	1.258	0.321

TABLE 1. Rapports masse segment/masse corps (m_i/M), rapports longueur segment/taille (l_i/L) et rapports rayon de giration/longueur segments (r_i/l_i) des segments utilisés. *Attention, les masses des segments doubles ont été doublées.*

segment	numéro i	Distance CM/longueur l_i (proximales)	Distance CM/longueur l_i (distales)
tronc, tête et cou	1	0.596	0.404
membre supérieur	2	0.530	0.470
membre inférieur	3	0.447	0.553

TABLE 2. Rapport de la longueur entre l'extrémité et le centre de gravité/ l_i (proximales et distales)

segment	numéro i	distance λ_i
tronc, tête et cou	1	0.915
membre supérieur	2	0.352
membre inférieur	3	1.640

TABLE 3. Distances λ_i entre l'extrémité distale du membre supérieur et G_i .

segment	numéro i	m_i	l_i	r_i
tronc, tête et cou	1	37.570	0.799	0.402
membre supérieur	2	6.500	0.748	0.275
membre inférieur	3	20.930	0.901	0.294
total (corps tendu)	4	65.000	2.139	0.687

TABLE 4. Masses (m_i , en kg), longueurs (l_i , en m.) et rayon de giration par rapport au centre de gravité (r_i , en m.)

Références

[Bas07] Jérôme Bastien. *Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie.*, 2007. Notes de cours de l'UV MT25 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT25.

- [DC66] R. Drillis et R. Contini. Body segment parameters. Rep. 1163-03, Office of Vocational Rehabilitation, 1966. Department of Health, Education, and Welfare, New York.
- [Win09] David Winter. *Biomechanics and Motor Control of Human Movement*. John Wiley and Sons, New York, fourth édition, 2009.