Université Claude Bernard Lyon 1

L2 (Semestre 2) 3LTC4

24 avril 2014

Corrigé de l'examen CCF2 de Biomécanique du mouvement

Correction de l'exercice 1.

Dans tout cet exercice (sauf pour la question 1c), les applications numériques données n'étaient pas exigées !
Merci à Thomas Creveaux, qui a vérifié les données de cet exercice !

(1) (a) Au cours de la marche, une courte phase de monopédie apparaît, au cours de laquelle, tout le poids repose sur une jambe. Si on néglige l'accélération, la deuxième lois de Newton implique que la composante verticale de la réation d'appuis du sol est égale au poids du skieur. Le principe d'action et de réaction implique donc que la force maximale qu'il exerce sur la neige est son propre poids.

(b) La pression est égale à

$$p = \frac{R_y}{S} \tag{1}$$

soit encore

$$p = \frac{Mg}{lL}, \tag{2}$$

et numériquement

$$p = \frac{80 \times 10}{\frac{10}{100} \times \frac{30}{100}} = 26666.666667\,\mathrm{Pa}. \tag{3}$$

(c) Dans le cas de la chaussure du skieur, on a

$$S = lL = 10 \times 30 = 300\,\mathrm{cm}^2. \tag{4a}$$

Dans le cas de la raquette, on a

$$S = lL = 30 \times 60 = 1800\,\mathrm{cm}^2. \tag{4b}$$

Dans le cas du ski, on a

$$S = lL = 8 \times 180 = 1440\,\mathrm{cm}^2. \tag{4c}$$

(d) Sans calculer les pressions, on pouvait les comparer entre elles :

- La surface de la raquette est 6 fois plus grande que celle de la chaussure. Au vu de la formule (1), on en déduit que la pression exercée par le skieur avec raquette est donc 6 fois plus petite que celle avec chaussure.
- De même, la surface du ski est environ 5 fois plus grande que celle de la chaussure. Au vu de la formule (1), on en déduit que la pression exercée par le skieur avec ski est donc environ 5 fois plus petite que celle avec chaussure.
- Enfin, la pression exercée avec le ski est du même ordre que la pression avec raquette.

Il vaut mieux marcher avec des raquettes ou des skis !

(2) Pour la suite, on pourra consulter Internet à l'adresse `http://fr.wikipedia.org/wiki/Ski_de_fond` dont ont été issus quelques éléments pour cet exercice.

On pourra consulter, pour plus de détails, la remarque 3.3 page 27 du polycopié du tutorat [Bas14c]). La notion de pente a d'une droite, signifie que si on se déplace d'un pas vers la droite, on monte de a sur la droite (si a est positif) ou on descend de $|a|$ (si a est négatif). Pour une route ou une piste de ski, c'est identique : la pente de la route (si elle est droite) est la pente de la droite. Puisqu'elle est exprimée en pourcentage, un pente de $p\%$ signifie que si on se déplace de 100 m., à l'horizontale (et non en suivant la route !), alors on monte de p m. Ainsi, on a alors le lien entre la pente p (en pourcentage) et l'angle β :

$$\tan\beta = \frac{p}{100}.$$

soit encore

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{p}{100}\right). \tag{5}$$

Ici, une pente de valeur $p = 7\%$ correspond à un angle donné par

$$\beta = 4.004^\circ. \tag{6}$$

(3) (a) Le principe fondamental de l'énergie appliqué au système {sportif+skis}, de masse M, donne

$$\sum \vec{F}_e = M\vec{a}$$

Les forces extérieures sont le poids $\vec{P} = M\vec{g}$ et la réaction du sol sur le sportif $\vec{R}$, qui est aussi l'action du sol sur le skis. On a donc

$$M\vec{g} + \vec{R} = M\vec{a} \tag{7}$$

et ainsi

$$\vec{R} = M\left(\vec{a} - \vec{g}\right), \tag{8}$$

ce qu'on peut calculer si on connaît l'accélération.

En l'abscence de force de frottement, on peut montrer que $\vec{R}$ est donnée par les formules (8.26), (8.28) et (8.28) de la section 8.4.2 page 17 du cours (Voir [Bas14a]), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
&\vec{R} = R_y\vec{j} + R_z\vec{k},\\
&R_y = 0,\\
&R_z = (\cos\gamma)mg,
\end{aligned}$$

ce qui est finalement rien d'autre que l'opposé du poids du système {sportif+ski} sur le vecteur $\vec{k}$! ◇

(b) Pour déterminer l'action du pied droit sur la jambe durant cette phase, il faut étudier le système {pied droit} ; Le principe fondamental de l'énergie appliqué au système {pied droit}, de masse M, donne

$$\sum \vec{F}_e = M_p\vec{a},$$

où l'accélération est la même que dans l'équation (7) et M_p est la masse du pied droit. On en déduit

$$M_p\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{JP} = M_p\vec{a}, \tag{9}$$

où $\vec{F}_{JP}$ est l'action de la jambe droite sur le pied droit et $\vec{R}$ est la réation du sol sur le ski, qui est la même que dans (7). En faisant la différence entre (7) et (9), on obtient donc

$$(M - M_p)\vec{g} - \vec{F}_{JP} = (M - M_p)\vec{a},$$

dont on déduit

$$\vec{F}_{JP} = (M - M_p)\vec{g} - (M - M_p)\vec{a}$$

et donc, d'après le principe d'action et de réaction, on obtient l'action du pied droit sur la jambe droite

$$\vec{F}_{PJ} = -(M - M_p)\vec{g} + (M - M_p)\vec{a}. \tag{10}$$

Si on reprend la fin du calcul de la question 3a, on a en l'abscence de force de frottement,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -(\sin\gamma)g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, d'après (10), il vient

$$\vec{F}_{PJ} = -(M - M_p)\begin{pmatrix} -(\sin\gamma)g \\ 0 \\ -(\cos\gamma)mg \end{pmatrix} + (M - M_p)\begin{pmatrix} -(\sin\gamma)g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

et donc

$$\vec{F}_{PJ} = (M - M_p)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\cos\gamma)mg \end{pmatrix}$$

ce qui est finalement rien d'autre que l'opposé du poids du système {sportif-(pied droit)} sur le vecteur $\vec{k}$! ♢

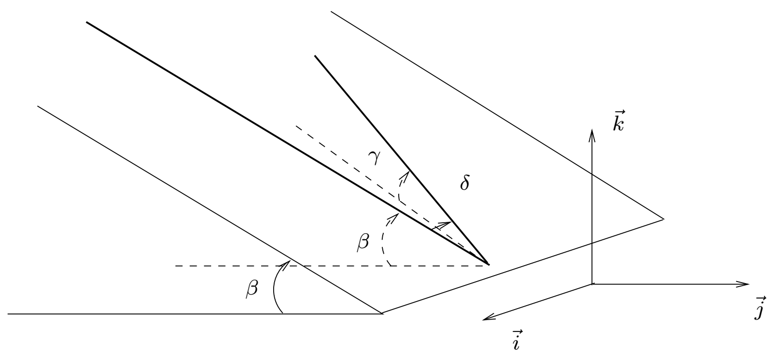

FIGURE 1. les angles β, γ et δ . Ici, le plan qui porte le rail est celui de la piste.

L'angle γ entre l'horizontale et le ski est plus faible que l'angle β entre l'horizontale et le plan incliné formé par la piste (voir figure 1). C'est le fait d'incliner le ski qui permet d'affaiblir cet angle et de rendre la montée moins difficile[1]. On renvoie à l'annexe A pour le calcul de cet angle. On peut confirmer cela par les valeurs numériques : Pour β donné par (6) et δ donné par

$$\delta = 30.000^\circ, \tag{11}$$

on obtient alors

$$\gamma = 3.467^\circ \tag{12}$$

♢

(c) Notons $v_{0,p}$ la valeur de la norme de la vitesse le long de l'axe l'axe médian de la piste. On utilise l'angle δ l'angle entre l'axe médian de la piste et le ski droit. Grâce à la trigonométrie, on a

$$\cos\delta = \frac{v_{0,p}}{v_0}$$

et donc

$$v_{0,p} = (\cos\delta)v_0.$$

Numériquement, pour v_0 donné par

$$v_0 = 6.928\,\mathrm{km/h}. \tag{13}$$

1. mais aussi d'appuyer sur les skis de skating, non munis de système anti-recul, tel des écailles ou du fart, comme les ski de fond alternatifs, qui eux restent dans l'axe médian de la piste.

on a

$$v_{0,p} = 3.847\,\text{km/h}. \tag{14}$$

(d)

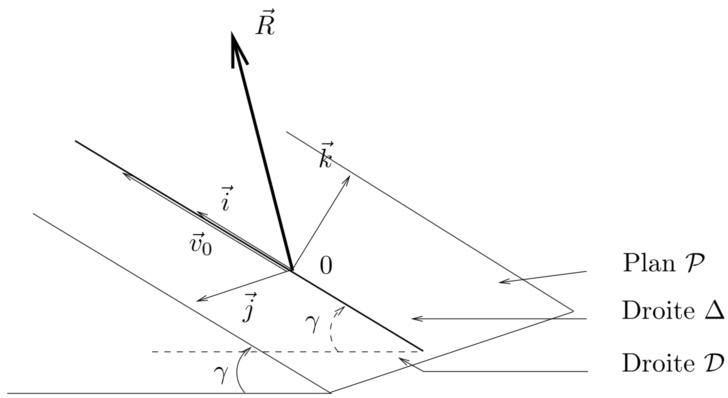

FIGURE 2. Un solide évoluant sur un rail. Par souci de clarté, on a indiqué sur cette figure, la droite Δ, qui porte le rail, la droite $\mathcal{D}$, projetée orthogonale de la droite Δ sur le plan horizontal et le plan $\mathcal{P}$, qui contient la droite Δ et qui est perpendiculaire au plan contenant $\mathcal{D}$ et Δ. Le vecteur $\vec{i}$ est porté par Δ et $\vec{j}$ est perpendiculaire à Δ, dans le plan $\mathcal{P}$. Attention, ce plan n'est pas le plan de la piste !

On peut donc appliquer le mouvement d'un solide sur un rail, qui fait un angle γ avec l'horizontale, vu en cours. On note x l'abscisse de ce solide. Voir la figure 2. On rappelle alors que les lois de la chute libre s'appliquent :

$$a_x(t) = -(\sin\gamma)g, \tag{15a}$$
$$v_x(t) = -(\sin\gamma)gt + v_0, \tag{15b}$$
$$x(t) = -\frac{1}{2}(\sin\gamma)gt^2 + v_0\,t. \tag{15c}$$

On applique le raisonnement de la section 8.4.2 page 17 du cours : le solide va s'élever le long du rail, s'arrêter puis redescendre. Au sommet du mouvement, la vitesse est nulle. On a donc

$$v_x(t) = 0.$$

Déterminons donc le demi-temps de vol t (temps pour parcourir la partie du mouvement de 0 au sommet) : d'après (15b), on a donc

$$0 = v_x(t) = -(\sin\gamma)gt + v_0$$

et donc

$$t = \frac{v_0}{(\sin\gamma)g} \tag{16}$$

Numériquement, on a

$$t = 3.18237\,\text{s}. \tag{17}$$

Pour déterminer la valeur de γ, fournie gracieusement dans l'énoncé, on renvoie à l'annexe A page 8.

(e) On applique le raisonnement de la section 8.4.2 page 17 du cours : On réinjecte cette valeur dans (15c) et on trouve :

$$x = -\frac{1}{2}(\sin\gamma)g\left(\frac{v_0}{(\sin\gamma)g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{(\sin\gamma)g}\right),$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{(\sin\gamma)g} + \frac{v_0^2}{(\sin\gamma)g},$$

et donc

$$h = \frac{v_0^2}{2(\sin\gamma)g}. \tag{18}$$

Numériquement, on a

$$h = 3.06224\,\mathrm{m}. \tag{19}$$

(f) En fait, les frottement entre la neige et le ski, faibles mais non négligeables, font diminuer cette distance. De plus, les fondeurs savent que l'on n'attend pas l'arrêt total du ski avant de repartir sur l'autre jambe ! Voir la suite, en question 5 page suivante.

(4) (a) On renvoie au corrigé de TD sur l'antrophométrie (voir [Bas14b]).

(b) On a

$$E_p = Mgz, \tag{20}$$

où z est la hauteur. Par définition, au début du mouvement, z est nulle et

$$E_{p,1} = 0. \tag{21}$$

En fin de mouvement,

$$E_{p,1} = Mgz,$$

où z est la hauteur parcourue. On a $\sin\gamma = z/h$ et donc $z = h\sin\gamma$ et

$$E_{p,2} = Mgh\sin\gamma. \tag{22}$$

Numériquement, on a

$$E_{p,2} = 148.14815\,\mathrm{J}. \tag{23}$$

(c) Le sportif est considéré comme un solide indéformable en translation, sans rotation. Seule, l'énergie cinétique de translation est donc à prendre en compte :

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2. \tag{24}$$

Au début du mouuvement, on a

$$E_{c,1} = \frac{1}{2}Mv_0^2. \tag{25}$$

Numériquement, on a

$$E_{c,1} = 148.14815\,\mathrm{J}. \tag{26}$$

et en fin de mouvement

$$E_{c,2} = 0.00000\,\mathrm{J}. \tag{27}$$

(d) On a

$$E = E_c + E_p. \tag{28}$$

Ainsi, au début du mouvement, on a numériquement

$$E_1 = 148.14815\,\mathrm{J}. \tag{29}$$

En fin de mouvement, on a numériquement

$$E_2 = 148.14815\,\mathrm{J}. \tag{30}$$

On a donc numériquement

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 0.00000\,\mathrm{J}. \tag{31}$$

(e) Cette variation d'énergie est nulle, puisque le sportif est mécaniquement isolé : il est rigide et on a négligé les forces de frottement.

(5) (a) La variation d'énergie est non nulle, puisque le sportif n'est plus mécaniquement isolé : les forces de frottement de la neige sur le ski font diminuer cette énergie.

(b) La distance maximale parcourue par le skieur dans la phase 2 sera plus faible que dans le cas sans frottement : en effet, ils ralentissent le skieur et l'entraîne vers le bas. On renvoie à l'annexe B page 8 pour un calcul plus précis. Numériquement, la formule (48) avec C donné par (44) donne

$$h = 2.04808\,\mathrm{m}. \tag{32}$$

ce qui est plus réaliste et plus faible que (19). Le demi-temps de vol est donné par

$$t = \frac{v_0}{(\sin\gamma + C\cos\gamma)g}$$

ce qui donne numériquement

$$t = 1.06421\,\mathrm{s}.$$

ce qui est plus faible que (17).

(6) (a) Quand le sportif va descendre, la gravitation va faire augmenter sa vitesse. Simultanément, les frottement de la neige et de l'air vont le ralentir. Plus précisément, la force de frottement de la neige restera constante et les forces de frottement de l'air sont du type force de traînée, donnée par l'équation (9.71b) page 47 du cours avc C_T constant, cette force étant dirigée vers l'arrière du mouvement :

$$F_T = \frac{1}{2} C_T S \mu v^2,$$

Cette force va augmenter avec la vitesse jusqu'à ce que les forces de frottement, dirigée vers l'arrière compensent exactement le poids, dirigé vers l'avant. Le sportif sera donc à l'équilibre (somme des forces nulles) et aura une vitesse constante. Voir l'annexe C page 9 pour plus de détails.

(b) La vitesse limite égale à

$$v_l = 60.54600\,\mathrm{km/h} \tag{33}$$

est bien trop importante pour un fondeur. Il devra donc augmenter les forces de frottement sur la neige en faisant du chasse-neige, ou, s'il est à l'aise, faire de petits virages pour freiner.

En skis alpins, plus larges et plus stables (équipé de vraies carres !), ce type de vitesse est raisonnable.

Correction de l'exercice 2.

On pourra consulter les url suivantes
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Néoprène`
`http://www.tribord.com/fr/plongee/comment-choisir/comment-choisir-son-lestage-de-plongee`

(1) On utilise la notion de masse apparente introduite en cours en section 9.20 page 30 et l'équation (9.29) page 30 du cours :

$$\sum_i M_i - V_i = 0, \tag{34}$$

pour des masses exprimées en kilogrammes et des volume en litres. Ici, compte tenu des quatre corps en présence (bloc, combinaison, corps, plombs), on a

$$(M_1 - V_1) + (M_2 - V_2) + (M_3 - V_3) + (M_4 - V_4) = 0. \tag{35}$$

On néglige le volume des plombs V_4 et on a donc

$$(M_1 - V_1) + (M_2 - V_2) + (M_3 - V_3) + M_4 = 0.$$

Dans cette équation, tout est connu sauf M_4, donc donné par

$$M_4 = -(M_1 + M_2 + M_3) + (V_1 + V_2 + V_3) \tag{36}$$

Numériquement, on a

$$M_4 = 7\,\text{kg}. \tag{37}$$

(2) On reprend l'équation (35) en remplaçant V_4 par M_4/μ_p :

$$(M_1 - V_1) + (M_2 - V_2) + (M_3 - V_3) + \left(M_4 - \frac{M_4}{\mu_p}\right) = 0,$$

et donc

$$(M_1 - V_1) + (M_2 - V_2) + (M_3 - V_3) + M_4\left(1 - \frac{1}{\mu_p}\right) = 0.$$

Dans cette équation, tout est connu sauf M_4, cette fois-ci donné par

$$M_4 = \left(-(M_1 + M_2 + M_3) + (V_1 + V_2 + V_3)\right)\left(1 - \frac{1}{\mu_p}\right)^{-1}. \tag{38}$$

Numériquement, on a

$$M_4 = 7.676329\,\text{kg}, \tag{39}$$

ce qui n'est pas trop différent de (37) : l'approximation de négliger le volume du plomb est donc légitime !

(3) Au cours de la plongée, la bouteille d'air s'allège puisque l'air est utilisé par le plongeur et relaché dans l'eau ! La masse apparente totale donnée par $\sum_i M_i - V_i$ diminue donc. Si au début elle est nulle, elle deviendra négative et les plombs ne suiffiront plus à assurer la flotabilité nulle du plongeur. Pour remédier à cela, il faudra prendre un peu plus de plomb et contre-carrer leur masse par un gilet gonflable qui pourrait être vidé au fur et à mesure de la ponglée.

(4) *Question facultative*

On utilise la loi de Mariotte (9.33) page 31 du cours :

$$PV = \text{constante}, \tag{40}$$

appliquée à la la quantité d'air mis dans la bouteille. On a donc

$$PV = P_0 V_0,$$

où P_0 est la pression atmosphérique (approximativement égale à 1 bar) et V_0 le volume d'air (à pression atmosphérique). et donc

$$V_0 = \frac{P}{P_0} V.$$

On en déduit la masse de l'air $M = \mu_0 V_0$, soit

$$M = \mu_0 \frac{P}{P_0} V,$$

et numériquement

$$M = 1.30\,10^{-3} \times \frac{200}{1} \times 25,$$

soit

$$M = 6.50 \text{ kg},$$

ce qui n'est donc pas négligeable et à prendre en compte entre le début et la fin de la plongée !

Annexe A. Détermination de l'angle γ entre l'horizontale et la droite qui porte la trajectoire du ski

On connaît p la pente de la piste et l'angle δ entre la piste et le ski et on cherche l'angle l'angle γ entre l'horizontale et la droite qui porte la trajectoire du ski (Voir figure 1 page 3).
Pour calculer l'angle β entre l'horizontale et le plan incliné que forme cette piste, on utilise la formule (5).
On introduit ensuite la rotation vectorielle spatiale, de direction portée par le vecteur unitaire $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ et d'angle ϕ. Voir par exemple [RDO79] ou `http://fr.wikipedia.org/wiki/Rotation_vectorielle`.
L'expression de la matrice de rotation M est donnée par

$$M(\phi, \vec{n}) = \cos\phi I + (1-\cos\phi)\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_y \end{pmatrix} + \sin\phi \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

On considère le repère orthornormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ (Voir figure 1). Grâce à cette matrice on passe du vecteur unitaire $X = -\vec{j}$ au vecteur y par la rotation définie par $\phi = -\beta$ et $\vec{n} = \vec{i} = (1, 0, 0)$:

$$Y = M(-\beta, (1, 0, 0))\, X,$$

puis de Y à Z par la rotation définie par $\phi = -\delta$ et $\vec{n} = (0, \sin\beta, \cos\beta)$:

$$Z = M(-\delta, (0, \sin\beta, \cos\beta))\, Y.$$

Enfin, on calcule l'angle γ entre le vecteur unitaire Z et son projeté orthogonal $Z' = (x_Z, y_Z, 0)$ sur le plan horizontal :

$$Z.Z' = \|Z'\| \cos\gamma$$

et donc

$$\gamma = \arccos\left(\frac{Z.Z'}{\|Z'\|}\right).$$

On rappelle que

$$p = 0.070000 = 7\,\%.$$

On renvoie aux équations (6), (11) et (12), pour les valeurs numériques.

Annexe B. Influence du frottement sec sur le mouvement

Dans le cas où le frottement intervient entre le ski et la neige, on peut utiliser la loi de frottement de Coulomb (voir [Rey08, Section 1.4.3] et [BBL12]).
On remplace les équations de la section 8.4.2 page 17 du cours par les suivantes : on a

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_z\vec{k}, \tag{42}$$

où la loi de Coulomb nous dit [2] que

$$|R_x| = C|R_z|, \tag{43}$$

où C est appelé le coefficient de frottement dynamique. Dans [Rey08, Section 1.4.3], la valeur choisie est

$$C = 0.030000. \tag{44}$$

2. tant que le ski glisse

Par ailleurs, on a toujours l'équation (8.28) du cours

$$R_z = (\cos\gamma)Mg. \tag{45}$$

Si le mouvement a lieu vers le haut, on a R_x négatif et (43) et (45) impliquent donc

$$R_x = -C(\cos\gamma)Mg. \tag{46}$$

On a alors l'équation différentielle

$$x''(t) = -(\sin\gamma)g - C(\cos\gamma)g.$$

soit

$$x''(t) = -\left(\sin\gamma + C\cos\gamma\right)g, \tag{47}$$

ce qui est encore une équation type chute libre, les forces de frottement augmentant articiellement la gravité et ayant tendance aussi à ralentir le mouvement ! Dans ce cas, l'équation (8.34) du cours est remplacée par

$$h = \frac{v_0^2}{2(\sin\gamma + C\cos\gamma)g}. \tag{48}$$

Annexe C. Influence du frottement sec et et de l'air sur le mouvement

Si on considère que le skieur descend et qu'il est soumis, en plus des frottements de la neige, à une force de frottement de l'air de type force de frottement de traînée donnée par l'équation (9.71b) page 47 du cours avec C_T constant, cette force est dirigée vers l'arrière du mouvement et l'équation différentielle (47) est remplacée par

$$x''(t) = \left(\sin\gamma + C\cos\gamma\right)g - \frac{1}{2M}C_T S\mu\left(x'(t)\right)^2 \tag{49}$$

en prenant x orienté vers le bas de la pente. Cette équation est identique à l'équation (F.20) page 83 du cours est peut être résolue de façon analytique. Ici, on peut calculer la vitesse limite v_l atteinte quand l'accélération x'' est nulle ; l'équation différentielle (49) donne

$$0 = \left(\sin\gamma + C\cos\gamma\right)g - \frac{1}{2M}C_T S\mu v_l^2,$$

et donc

$$v_l = \sqrt{\frac{2M\left(\sin\gamma + C\cos\gamma\right)g}{C_T S\mu}}. \tag{50}$$

Numériquement, si on prend

$$\begin{aligned} C_T &= 0.46240, \\ \mu &= 1.229000, \\ S &= 0.90000, \end{aligned}$$

on obtient

$$v_l = 60.546000\,\mathrm{km/h} \tag{51}$$

Références

[Bas14a] Jérôme Bastien. Biomécanique du mouvement. Notes de cours, disponibles sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html`, rubrique L2 Bioméca, 2014.

[Bas14b] Jérôme Bastien. Biomécanique du mouvement. Corrigés de TD, disponibles sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html`, rubrique L2 Bioméca, 2014.

[Bas14c] Jérôme Bastien. Tutorat en biomécanique du mouvement. Notes, disponibles sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html`, rubrique L2 Bioméca, 2014.

[BBL12] Jérôme Bastien, Frédéric Bernardin et Claude-Henri Lamarque. *Systèmes dynamiques discrets non réguliers déterministes ou stochastiques*. Collection Mécanique des structures. Hermès Science Publications/Lavoisier, 2012. Disponible à la BU Sciences de Lyon 1 (cote : 74 BASTIEN, UFR Maths, sous-sol).

[RDO79] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 2*. Masson, Paris, 1979. Algèbre et applications à la géométrie.

[Rey08] Françoise Rey. *Contribution à la modélisation cinématique et dynamique d'un geste sportif : le pas de patineur*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2008. Disponible sur `http://eprint.insa-toulouse.fr/archive/00000244/`.