Université Claude Bernard Lyon 1

L2 (Semestre 2) 3LTC4
Session 2 11 juin 2014

Corrigé de l'examen CT de Biomécanique du mouvement

Correction de l'exercice 1.
On pourra aussi consulter l'url `http://fr.wikipedia.org/wiki/Vesna_Vulovi%C4%87`

(1) (a) On renvoie au chapitre 8 du polycopié de cours [Bas14]. L'angle α est nul puisque la vitesse initiale est horizontale Les équations horaires sont donc (où $v_0 = 400/3.6 = 111.111111$)

$$a_x(t) = 0, \tag{1a}$$
$$a_y(t) = -g, \tag{1b}$$
$$v_x(t) = v_0, \tag{1c}$$
$$v_y(t) = -gt, \tag{1d}$$
$$x(t) = v_0\, t, \tag{1e}$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{1f}$$

et l'équation cartésienne est

$$y(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}x^2 \tag{2}$$

(b) Au moment où Nick touche le sol, on a, dans le référentiel dont l'origine est confondu avec le centre de masse de Nick quand il quitte l'avion :

$$y(t) = -H \tag{3}$$

où $H = 5600$.
Cela donne donc l'équation bien connue

$$\frac{1}{2}gt^2 = H$$

et donc

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \tag{4}$$

soit numériquement

$$t_1 = 33.466401 \text{ m/s} \tag{5}$$

♢

(c) On admet que la valeur de cet instant est donnée par (5).
On peut alors utiliser (1c) et (1d) :

$$v_x(t) = v_0,$$
$$v_y(t) = -gt,$$

soit numériquement

$$v_x(t) = 111.111111,$$
$$v_y(t) = -334.664011.$$

et donc

$$\vec{v} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{CG de Nick} \\ \text{Norme :} & 352.626827 \\ \text{Direction :} & -71.633423 \\ \text{Sens :} & \text{Droite Bas} \end{cases}$$

(d) À cet instant ; la norme de la vitesse vaut donc $v_l = 1269.456577$ km/h, plus importante que les 200 km/h annoncés dans le texte de wikipédia ! Notre hypothèse de négliger les frottements est donc fausse !

(2) (a) Nick est considéré comme un solide indéformable et sans rotation. On a donc

$$E_c = E_{ct} = \frac{1}{2} M v^2,$$
$$E_p = Mgz.$$

Au moment où il quitte l'avion

$$v = 111.111111,$$
$$z = 0$$

et donc

$$E_c = 617283.95 \text{ J},$$
$$E_p = 0.00 \text{ J},$$
$$E = 617283.95 \text{ J}.$$

Au moment où il arrive au sol

$$v = 55.555556,$$
$$z = -5600$$

et donc

$$E_c = 154320.99 \text{ J},$$
$$E_p = -5600000.00 \text{ J},$$
$$E = -5445679.01 \text{ J}.$$

(b) Si on calcule la variation d'énergie, on obtient

$$\Delta A = -5445679.01 - 617283.95 = -6062962.96,$$

ce qui est non nul. Il n'y a pas de conservation d'énergie, ce qui était prévisible, puisque la prise en compte des frottements de l'air rend le système {Nick} non isolé.

Remarque 1. Sans calculatrice, on pouvait aussi montrer que la variation d'énergie est non nulle ; en effet, dans le cas de la chute libre, on constater que la vitesse est plus faible qu'avec frottement (valeurs données dans l'énoncé !). Or, dans le cas d'une chute libre, l'énergie est conservée ; ainsi, avec frottement, la la variation d'énergie est non nulle !

(3) (a) D'après le cours (chapitre 9 du polycopié de cours [Bas14]), on a

$$F_T = \frac{1}{2} C_T S \mu v_0^2, \tag{6}$$

où

- $\vec{F}_T$ est dirigée dans le même sens que la vitesse du fluide, ici l'air, par rapport à Nick, c'est-à-dire, vers l'arrière du mouvement ;
- S est la surface maître couple, c'est-à-dire la projection de la surface de l'objet sur un plan perpendiculaire à $\vec{v}_0$, en m^2 ;
- μ la masse volumique du fluide en kgm^{-3} ;
- v_0 la norme de la vitesse du fluide par rapport au corps en ms^{-1} (loin du corps), c'est-à-dire la vitesse de chute de Nick.

(b) Par homothétie, la surface S, produit de deux longueurs qui varient avec un rapport k, varie avec un rapport k^2. Pour $k = 1/2$, $k^2 = 1/4$ et donc la surface maître couple du chien est quatre fois plus faible que celle de son maître.

(c) si $\vec{v}_0$ est de norme et de direction constants, on a donc un mouvement rectiligne uniforme ; d'après la seconde lois de Newton (et si on considère qu'il n'y a pas de rotation), alors Nick est en équilibre.

(d) D'après l'équation (6), si $\vec{v}_0$ est de norme et de direction constants, $\vec{F}_T$ a de même une norme et une direction constante et est opposé à la vitesse et donc dirigée vers la haut et verticale. Puisque Nick est en équilibre, la somme des forces, ici le poids et $\vec{F}_T$ est nulle. Ces deux vecteurs sont opposés et donc de même norme. D'après (6), il vient donc

$$\frac{1}{2} C_T S \mu v_l^2 = Mg, \tag{7}$$

où v_l est la norme de la vitesse de Nick.

(e) De cette relation, on tire donc

$$C_T = \frac{2Mg}{S \mu v_l^2}, \tag{8}$$

soit numériquement

$$C_T = 0.498462.$$

(f) D'après (7), on a

$$v_l = \sqrt{\frac{2Mg}{C_T S \mu}}. \tag{9}$$

Pour simplifier, la masse est proportionnelle au volume ; or, par homothétie, le volume, produit de trois longueurs qui varient avec un rapport k, varie avec un rapport k^3. La masse du chien de Nick est donc 8 fois plus petite que Nick ; S est quatre fois plus petite. v_l est donc multipliée par un facteur $\sqrt{2} \approx 1.5$. On a donc $v_l \approx 300$.

(g) Cette question est plus subtile qu'il n'y paraît. On vient de voir que si la vitesse est égale à la vitesse limite, il n'y a pas d'accélération. Si au contraire, elle est plus grande, ce qui est le cas au début du mouvement, la force de traînée est plus grande que le poids et l'accélération est négative ; la vitesse diminue : la force de traînée diminue. Ainsi, au début du mouvement, la vitesse diminue. En fin de mouvement, elle est constante. En fait, il existe une petite phase, où la force de traînée et la vitesse augementent.

Voir les figures 1, 2 et 3.

Remarque 2.

On pourra aussi consulter les figures 4 et 5 qui montre qu'au début du mouvement la trajectoire avec frottement est proche de la celle de la chute libre, ce qui n'est plus le cas après.

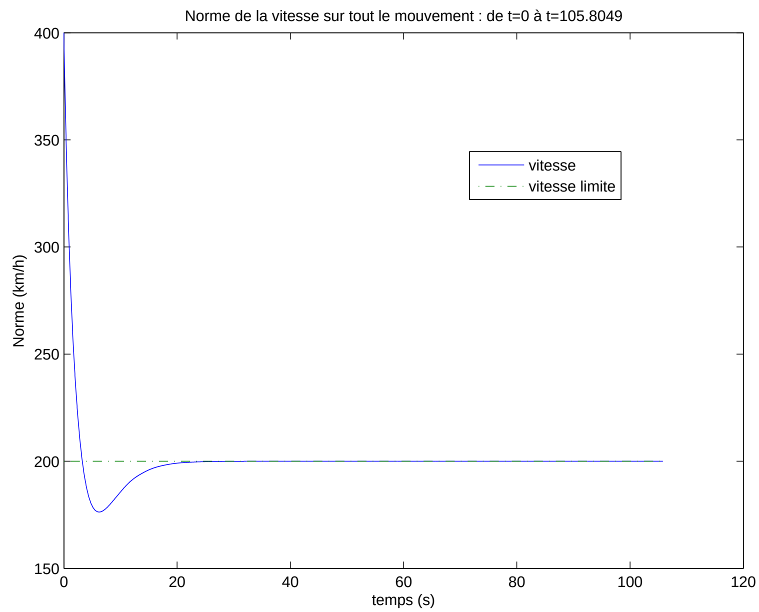

Figure 1. Vitesse au cours du mouvement .

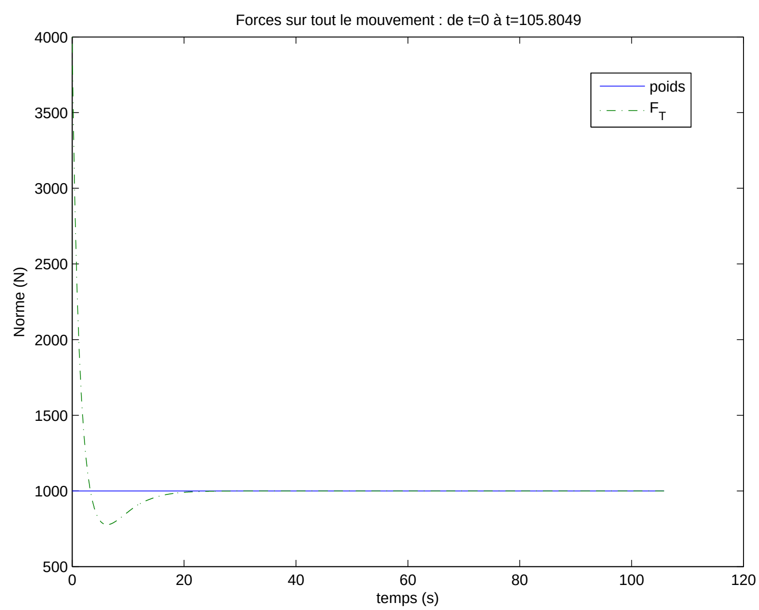

Figure 2. Forces au cours du mouvement .

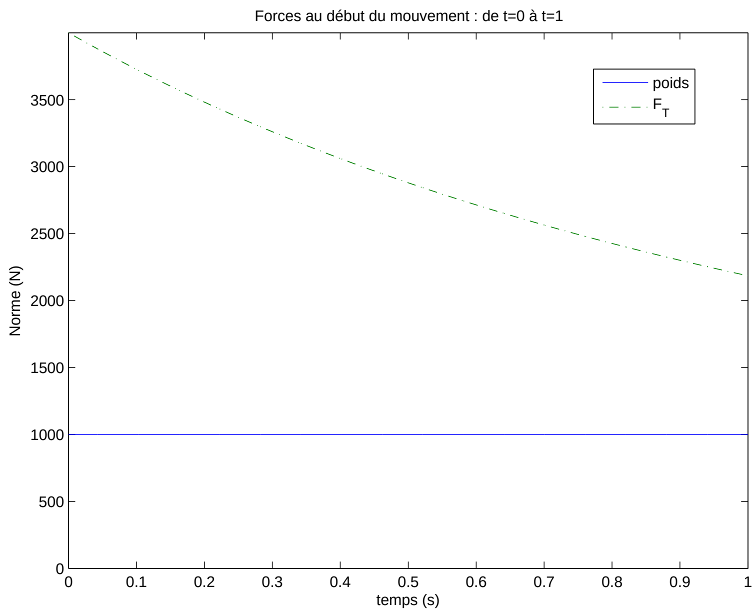

FIGURE 3. Forces au début du mouvement du mouvement .

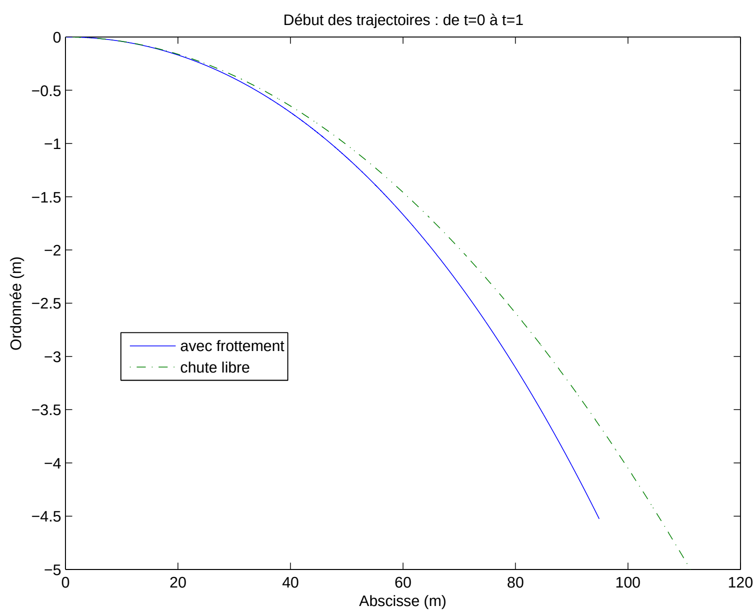

FIGURE 4. Trajectoires au début du mouvement .

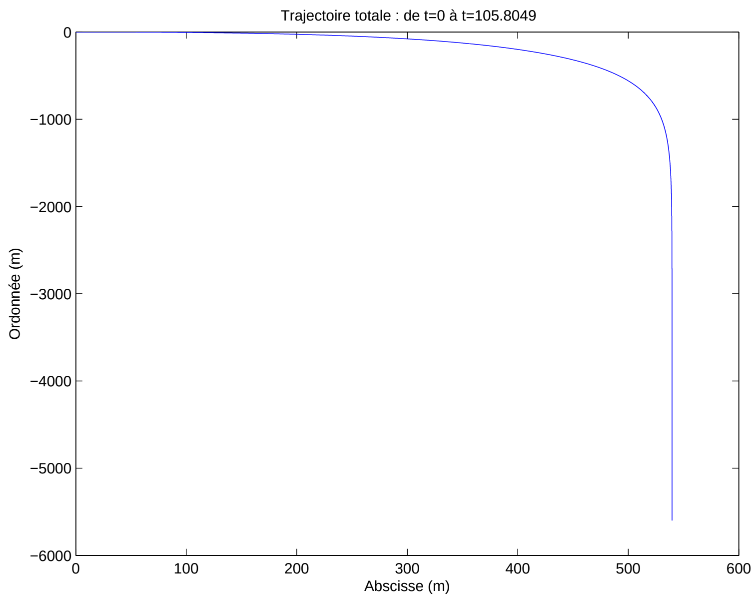

FIGURE 5. Trajectoire au cours du mouvement .

Correction de l'exercice 2.

(1) On rappelle que la définition de ma masse apparente d'un objet a été vue en cours dans l'exemple 9.21. On a la règle des plongeurs, valable dans le cas où la masse volumique de l'eau de mer égale à 1 kg/l, avec des masse en kg et des volumes en l. :

$$\mathcal{M} = M - V. \tag{10}$$

Ici, on a donc

$$\mathcal{M} = 10 - 4,$$

soit

$$\mathcal{M} = 6 \text{ kg}. \tag{11}$$

(2) Le volume d'air à introduire doit être tel que la masse apparente du système {amphore+parachute} soit nulle, c'est-à-dire

$$0 = \mathcal{M}_t = \mathcal{M}_p + \mathcal{M}_a, \tag{12}$$

où $\mathcal{M}_p$ est la masse apparente du parachute et $\mathcal{M}_a$ celle de l'amphore. On néglige la masse du parachute et on suppose que son volume intérieur est égal au volume extérieur (parois d'épaisseur nulle). On a donc

$$\mathcal{M}_p = M_{\text{air}} - V_{\text{air}},$$

qui devient en écrivant que la masse volumique de l'air μ vaut $M_{\text{air}}/V_{\text{air}}$:

$$\mathcal{M}_p = V_{\text{air}}\left(\mu - 1\right).$$

On a donc

$$M - V + V_{\text{air}}\left(\mu - 1\right) = 0 \tag{13}$$

et donc

$$V_{\text{air}} = \frac{M - V}{1 - \mu}. \tag{14}$$

Il est dit que la masse volumique de l'air est négligeable devant celle de l'eau. Ainsi, on écrit

$$1 - \mu \approx 1 \tag{15}$$

et (14) donne donc

$$V_{\text{air}} = M - V. \tag{16}$$

Numériquement, on a

$$V_{\text{air}} = 6 \text{ l}. \tag{17}$$

On vérifie que ce volume est bien inférieur au volume $V_0 = 20$ du parachute.

(3) À une profondeur h, d'après (13), La masse apparente de l'ensemble {amphore+parachute} est égale à

$$\mathcal{M}_t(h) = M - V + V_{\text{air}}\left(\mu - 1\right), \tag{18}$$

ici approchée par

$$\mathcal{M}_t(h) = M - V - V_{\text{air}}. \tag{19}$$

Cette masse est nulle pour $h = H$. Quand h diminue, la pression diminue et la loi de Mariotte implique que le volume de l'air vaut augmenter, jusqu'à atteindre la volume du parachute (voir question 4). Ainsi, $\mathcal{M}_t(h)$ diminuera, en étant négative. Ainsi, la force du parachute de levage sera de plus en plus importante.

(4) En remontant, le parachute va commencer à fuir quand le volume $V_{\text{air}}(h)$ sera égal à V_0. On écrit la loi de Mariotte (suggérée plus bas dans l'enoncé !) qui donne, à une profondeur quelconque h :

$$P(h)V(h) = P(H)V(H),$$

et donc

$$V(h) = \frac{P(H)V(H)}{P(h)}. \tag{20}$$

On sait que

$$P(h) = ah + P_0, \tag{21}$$

où $P_0 = 1$ et $a = 0.1$. On a donc, selon (20),

$$V(h) = \frac{(aH + P_0)\,V(H)}{ah + P_0}. \tag{22}$$

Déterminons h tel que ce volume soit V_0. On résoud

$$\frac{(aH + P_0)\,V(H)}{ah + P_0} = V_0,$$

soit encore

$$\frac{ah + P_0}{(aH + P_0)\,V(H)} = \frac{1}{V_0}$$

soit encore

$$ah + P_0 = \frac{(aH + P_0)\,V(H)}{V_0}$$

soit encore

$$h = \frac{1}{a}\left(\frac{(aH + P_0)\,V(H)}{V_0} - P_0\right) \tag{23}$$

où $V(H)$ est donné par (16), soit

$$h = \frac{1}{a}\left(\frac{(aH + P_0)\,(M - V)}{V_0} - P_0\right) \tag{24}$$

Numériquement

$$h = 2.000000 \text{ m} \tag{25}$$

(5) La masse apparente de l'ensemble {amphore+parachute} est toujours donnée par (19), soit encore puisque $V_{\text{air}} = V_0$

$$\mathcal{M}_t(h) = M - V - V_0, \tag{26}$$

et est donc constante et égale à

$$\mathcal{M}_t = -14 \text{ kg}. \tag{27}$$

(6) On donne la masse volumique de l'air à la surface de l'eau :

$$\mu_0 = 0.00130 \text{ kg/l} \tag{28}$$

(a) On applique la loi de Mariotte à une quantité d'air de masse m donnée, utilisée à la surface et à une profondeur h,

$$P(h)V(h) = P_0V_0$$

où P_0 et V_0 désignent les pression et volume à la surface. D'autre part, par définition,

$$\mu(h) = \frac{m}{V(h)} \text{ et } \mu_0 = \frac{m}{V_0}$$

ainsi,

$$\frac{\mu(h)}{\mu_0} = \frac{V_0}{V(h)} = \frac{P(h)}{P_0}$$

et

$$\mu(h) = \frac{\mu_0 P(h)}{P_0}, \tag{29}$$

où $P(h)$ et P_0 désignent respectivement la pression à la profondeur h et à la surface de l'eau.

(b) Ainsi, si on considère que (comme dans le cours)

$$P(h) = ah + P_0, \tag{30}$$

où $P_0 = 1$ et $a = 0.1$, on a

$$\mu(h) = \frac{\mu_0 (ah + P_0)}{P_0}, \tag{31}$$

(c) Si on reprend la question 2, les équations (14) et (31) donnent donc avec $v = H$

$$V_{\text{air}} = \frac{M - V}{1 - \dfrac{\mu_0 (aH + P_0)}{P_0}}. \tag{32}$$

Numériquement, on a

$$V_{\text{air}} = 6.031363 \text{ l}, \tag{33}$$

ce qui n'est guère différent de (17).

(d) Si on reprend la question 4, on constate que h est donné par (23) où $V(H)$ est cette fois donné par (33). On a donc

$$h' = \frac{1}{a} \left(\frac{(aH + P_0)(V_{\text{air}})}{V_0} - P_0 \right). \tag{34}$$

Numériquement, on a

$$h' = 2.062726 \text{ l}, \tag{35}$$

ce qui n'est guère différent de (25).

(e) Les résultats établis précédemment en négligeant la masse volumique de l'air sont donc très satisfaisants. Cela ne serait peut-être pas vrai aux grandes profondeurs où la masse volumique de l'air peut être beaucoup plus importante !

(f) À une profondeur $h \geq h'$, d'après (14), La masse apparente de l'ensemble {amphore+parachute} est donnée par à (18) où $V_{\text{air}} = V_0$ et μ est donné par (31). On a donc

$$\mathcal{M}_t(h) = M - V + V_0 \left(\frac{\mu_0 (ah + P_0)}{P_0} - 1 \right). \tag{36}$$

Pour $h = 0$, on a donc

$$\mathcal{M}_t = -13.974000 \text{ kg}, \tag{37}$$

ce qui n'est guère différent de (27). Le plongueur devra se méfier. De nulle, la masse apparente est passée à cette valeur et cela peut le faire remonter trop rapidement !

Références

[Bas14] Jérôme Bastien. Biomécanique du mouvement. Notes de cours, disponibles sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html`, rubrique L2 Bioméca, 2014.