

**CORRIGÉS DES TRAVAUX DIRIGÉS DE
BIOMÉCANIQUE DU MOUVEMENT**

L2

UE : BIOMÉCANIQUE DU MOUVEMENT

2015-2016, Automne

Jérôme BASTIEN

Document compilé le 15 juillet 2022

Identification Apogée

Matière	Biomécanique du mouvement
Formation	Licence STAPS 2ème année
Formation (code)	SP56L2
UE	3LTC3 Biomécanique du mouvement
UE (code)	SPT3003L

Liste des Travaux Dirigés

Identification Apogée	i
Avant-propos	v
Correction du Travaux Dirigés 1. Introduction à la biomécanique	1
Correction du Travaux Dirigés 2. Mouvement de Tkatchov à la barre fixe (Cinématique (1))	7
Correction du Travaux Dirigés 3. Cinématique (2)	15
Correction du Travaux Dirigés 4. Dynamique (1)	21
Correction du Travaux Dirigés 5. Dynamique (2) et équilibre statique - Théorème des moments	25
Correction du Travaux Dirigés 7. Anthropométrie	31
Ensemble des tableaux	34
Correction du Travaux Dirigés 8. Énergie	37
Correction du Travaux Dirigés 9. Chute libre	41
Correction du Travaux Dirigés 10. Les fluides	47
Annexe A. Rappels des formules principales de la chute libre	55
Annexe B. Quelques références	57
Bibliographie	59

Avant-propos

Ces notes constituent un corrigé succinct de TD pour l'UE Biomécanique du mouvement du L2 (2015-2016, Automne).

Ce polycopié de corrigé de TD est normalement disponible à la fois

- en ligne sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html> à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
 - 'Poste de travail',
 - puis sur le répertoire 'P:' (appelé aussi '\\teraetu\Enseignants'),
 - puis 'jerome.bastien',
 - puis 'UFRSTAPS',
 - enfin sur 'L2'.

Introduction à la biomécanique

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.1.

(1) Trois phases sont nécessaires pour créer un kinogramme :

- **Phase d'acquisition** : il faut

- Placer des capteurs au niveau des articulations étudiées :

- Orteil → métatarses ;
- Cheville → maléole externe ;
- Genou → plateau tibial ;
- Hanche → grand trochanter ;
- Épaule → acromion.

- Prendre garde à la fréquence d'acquisition des images ; deux normes :

- Europe, Afrique ⇒ PAL/SECAM à une fréquence de 25 Hz à deux trames, soit $f = 50$ Hz détrimé.
- Amérique, Asie ⇒ NTSC à une fréquence de 30 Hz à deux trames, soit $f = 60$ Hz détrimé.

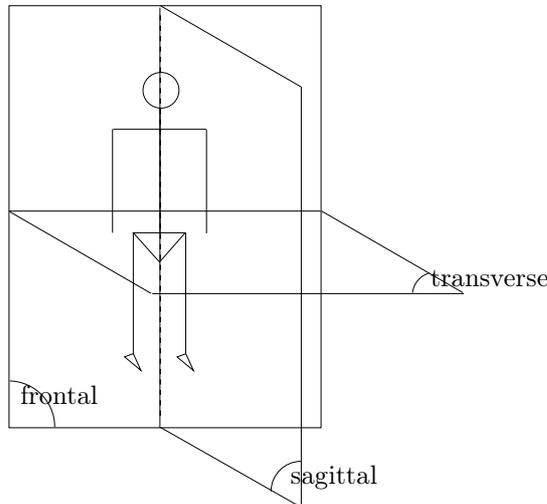


FIGURE 1.1. Trois plans possibles : frontal, transverse et sagittal.

- Préciser le plan par rapport auquel on filme : voir figure 1.1. Ici, il s'agit du plan sagittal.

- **Phase de digitalisation** : on détermine grâce aux images enregistrées les coordonnées des capteurs au cours du temps. On dispose donc d'un fichier contenant ces coordonnées (généralement au format `txt` ou `xls`). Historiquement, on a commencé à travailler avec du papier calque collé sur l'écran. Maintenant, on dispose de logiciels qui effectuent cette tâche de façon quasi-automatique. Il faut aussi adjoindre une échelle, car ce sont les coordonnées des pixels qui sont déterminées et non celles des points.

- **Phase de modélisation** : on relie les points représentant les articulations par des segments, supposés être rigide et indéformables.

Cette dernière hypothèse, comme la plupart des hypothèse en modélisation, est simplificatrice, mais pas toujours rigoureusement exacte. \diamond

On obtient un kinogramme. Attention, ici, on a introduit un décalage artificiel vers la droite pour plus de lisibilité.

- (2) On commente de façon qualitative (avec un minimum de nombre) et en allant des observations les plus générales aux plus particulières.

- **Sujet 1**

- On observe deux phase : une première phase où le métarse est en contact avec le sol (phase de contact) est suivie d'une phase où le contact n'a plus lieu (phase de vol). Décrivons chacune d'entre elles :
 - La phase de contact concerne 7 images, soit 6 intervalle de temps, chacun d'entre eux étant de durée égale à $1/f$. Elle dure donc $6/50 = 12/100 = 0,12$ s.
 - On observe sur les 3 premières images que le talon et la cheville sont quasiment immobiles, alors que la hanche et l'épaule s'élèvent rapidement. On constate aussi que l'angle articulaire entre le tronc et la cuisse augmente alors que celui entre la cuisse et la jambe reste constant. Cela implique qu'une extension de la hanche d'abord lieu.
 - On constate ensuite que cette extension se poursuit et s'accompagne d'une extension du genou, la cheville restant immobile. En effet, la cheville est à hauteur constante.

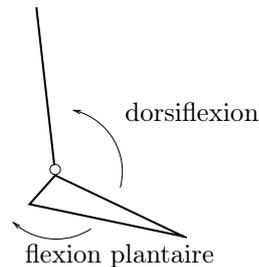


FIGURE 1.2. Les deux modes de flexion de la cheville

- Enfin, pendant que les deux extensions du genou et de la hanche se poursuivent, l'angle entre la cheville et la jambe s'ouvre. On parle alors de flexion plantaire, par opposition à la dorsiflexion. Voir figure 1.2.

Ces observations peuvent être corroborées par les mesures directes «à l'œil nu» des angles articulaires. On observe donc une extension successive (dans cet ordre chronologique) de la hanche, du genou, puis de la cheville (c'est-à-dire, une flexion plantaire). Il y a un déphasage entre ces trois extensions et on parle de «déphasage proximo-distal». Proximal désigne ce qui est proche, par convention de la tête ou de la colonne vertébrale. Distal désigne ce qui est loin. Le déphasage a donc lieu des muscles les plus charnus et les plus puissants (le grand fessier) vers les plus légers et les moins puissants (le soléaire). Ce déphasage est caractéristique d'un grand nombre de mouvements dynamiques.

L'amortissement, à la réception (non visible ici) serait caractérisée par un déphasage disto-proximal.

- On supposera que la phase de vol commence juste après la dernière image de la phase de contact (ce qui constitue une hypothèse raisonnable mais non vérifiable!).

La phase de vol concerne 9 images, soit 8 intervalle de temps, chacun d'entre eux étant de durée égale à $1/f$. Elle dure donc $8/50 = 16/100 = 0,16$ s.

Pour cette phase, *grosso modo*, l'extension maximale des trois articulations est conservée pendant la durée du vol visible. Il y a donc maintien des trois articulations dans la configuration correspondant au décollage.

	phase de contact a	phase de contact b	phase de contact c	phase de vol
durée	3 images	2 images	2 images	totalité
Hanche	Extension	Extension	Extension	Maintient
Genou	Maintient	Extension	Extension	Maintient
Cheville	Maintient	Maintient	Flexion plantaire	Maintient

TABLE 1.1. Différentes phases pour le sujet 1.

On peut donc résumer tout cela dans le tableau 1.1. Sur ce tableau, on voit apparaître clairement le déphasage proximo-distal.

• **Sujet 2 et différences entre les deux sujets**

- Que l'on considère la hauteur de saut de l'épaule ou du métatarse, on constate tout de suite une hauteur de saut plus importante pour le sujet 1 (de l'ordre de 2 m pour la tête ou de 40 cm pour le métatarse) que pour le sujet 2 (de l'ordre de 1.40 m pour la tête ou de 25 cm pour le métatarse), et ce, malgré une taille similaire!
- La phase de contact dure plus longtemps pour le sujet 2 ($11/50 = 22/100 = 0,22$ s.). Le tronc reste parallèle à la jambe et on a donc une extension simultanée de la hanche et du genou. On observe ensuite une flexion plantaire de la cheville.
- On n'observe donc pas de déphase proximo-distal pour le sujet 2.
- Contrairement au sujet 1, on observe pendant la phase de vol une flexion simultanée de la hanche et du genou, tandis que la cheville reste à peu près d'ouverture constante.

	phase de contact a	phase de contact b	phase de vol
durée	9 images	3 images	totalité
Hanche	Extension	Extension	Flexion
Genou	Extension	Extension	Flexion
Cheville	Maintient	Flexion plantaire	Maintient

TABLE 1.2. Différentes phases pour le sujet 2.

On peut donc résumer tout cela dans le tableau 1.2. Sur ce tableau, on voit apparaître clairement l'absence de déphasage proximo-distal.

(3)

(4) Questions 3 et 4 traitées ensemble

D'après les hauteurs observées, le saut du sujet 1 est plus efficace que celui du 2.

Tentons d'expliquer cela au vu des observations faites. Le sujet 1 est caractérisé par une phase de contact brève ce qui lui donne une accélération importante et un déphasage proximo-distal. Ce dernier permet une efficacité accrue. Au contraire, pour le sujet 2, la phase de contact est plus longue et il n'y a pas de déphasage proximo-distal.

Notons aussi que pendant le vol, le sujet 2 provoque une flexion du genou et de la hanche, dans le but d'anticiper la phase d'atterrissage, alors que le sujet 1 reste tendu pendant le vol; il amortira

probablement au dernier moment. De plus, la direction du dos du sujet 2 reste quasiment constante pendant la phase de contact ce qui lui assure plus d'équilibre. Le sujet 1 n'a pas cet objectif. Retenons que le sujet 1 favorise la performance au profit de l'équilibre et de l'intégrité physique, contrairement au sujet 2.

En général, performance et équilibre/intégrité physique s'opposent. Les jeunes sujet (adultes) ou les sujets expérimentés mettent en avant la première; les vieux sujets (ou inexpérimentés) mettent en avant la seconde.

Les âges réels de deux sujets sont respectivement 20 et 95 ans !

(5) (a)

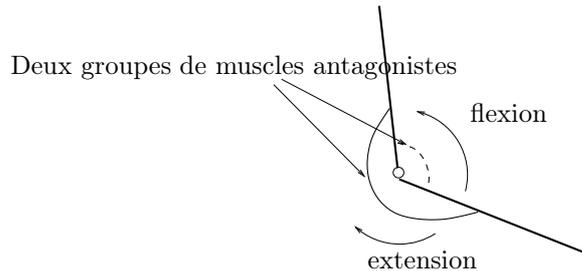


FIGURE 1.3. Les deux groupes de muscles antagonistes

En général, pour chaque articulation, deux groupes de muscles antagonistes travaillent; l'un permet l'extension et l'autre la flexion. Voir figure 1.3.

On en déduit donc la fonction des trois muscles :

- Grand fessier \implies extension de la hanche ;
- Vaste externe \implies extension du genou ;
- Soléaire \implies flexion plantaire (et non extension de la cheville!).

- (b) La modalité de contraction d'un muscle ne concerne que les muscles actifs. En général, pour la figure 1.3, le groupe de muscles de gauche sera en contraction concentrique (respectivement isométrique, excentrique) si l'articulation est en extension (respectivement maintenue, flexion). Tandis que l'autre sera passif. Pour le squat jump, en effet, les muscles concernés sont toujours actifs lors de la phase de contact. Même lors de la flexion, les muscles concernés sont actifs pour éviter que le sujet ne tombe sur lui-même (le tester par soi-même!).

	phase de contact a	phase de contact b	phase de contact c	phase de vol
Grand fessier	concentrique	concentrique	concentrique	isométrique
Vaste externe	isométrique	concentrique	concentrique	isométrique
Soléaire	isométrique	isométrique	concentrique	isométrique

TABLE 1.3. Différentes fonctions des muscles pour le sujet 1.

Il suffit donc de recopier le tableau 1.1 où on indique qu'une phase d'extension est caractérisée par une contraction concentrique et qu'une phase de maintien est caractérisée par une contraction isométrique. Pendant la phase de vol, pour maintenir le sauteur gainé, les muscles seront en contraction isométrique. Voir donc tableau 1.3.

	phase de contact a	phase de contact b	phase de vol
Grand fessier	concentrique	concentrique	muscle passif
Vaste externe	concentrique	concentrique	muscle passif
Soléaire	isométrique	concentrique	isométrique

TABLE 1.4. Différentes fonctions des muscles pour le sujet 1.

Pour le sujet 2, on recopie le tableau 1.2. Voir le tableau 1.4.

Notons que pour d'autres activités, les muscles doivent rester passifs pendant la phase de vol, par exemple en saut en hauteur, où le sujet doit rester détendu.

REMARQUE 1.1. D'autres exemples peuvent être donnés dans d'autres situations. Par exemple, ceux qui auront rééduqué leur cheville après une entorse se rappelleront avoir pratiqué l'exercice de l'escalier : la pointe du pied en convalescence reposant sur une marche d'escalier, il faut faire descendre doucement le talon en empêchant la chute. Dans ce cas, le soléaire est un muscle actif en mode de contraction excentrique.

REMARQUE 1.2. On peut aussi penser au réattérissage du sportif qui saute et qui fait dans ce cas, travailler les trois muscles étudiés en mode de contraction excentrique.

CORRECTION DU TRAVAUX DIRIGÉS 2

Mouvement de Tkatchov à la barre fixe (Cinématique (1))

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.1.

On prononce ici «katchev».

- (1) La digitalisation consiste ici à repérer les coordonnées des différents points (pointe du pied, ..., épaule).

On mesure les distance en centimètres sur la photo et on convertit en mètre en se servant de l'indication en bas à gauche de la photo, en divisant les distances par 2.0.

	Epaule X	Epaule Y	Hanche X	Hanche Y	Genou X	Genou Y
Image 1	9.5	6.1	10.7	6.3	11.7	6.0
Image 2	9.0	4.6	9.6	3.8	10.6	3.3
Image 3	7.9	4.3	7.2	3.7	6.4	3.9
Image 4	7.0	5.8	6.6	6.6	6.7	7.4
Image 5	7.4	7.0	7.0	7.9	6.7	8.5
Image 6	8.3	9.0	7.8	8.2	7.3	9.0
Image 7	8.9	8.7	10.0	8.7	9.7	7.7

TABLE 2.1. Coordonnées en cm (mesurées sur la photo)

	Epaule X	Epaule Y	Hanche X	Hanche Y	Genou X	Genou Y
Image 1	4.75	3.05	5.35	3.15	5.85	3.00
Image 2	4.50	2.30	4.80	1.90	5.30	1.65
Image 3	3.95	2.15	3.60	1.85	3.20	1.95
Image 4	3.50	2.90	3.30	3.30	3.35	3.70
Image 5	3.70	3.50	3.50	3.95	3.35	4.25
Image 6	4.15	4.50	3.90	4.10	3.65	4.50
Image 7	4.45	4.35	5.00	4.35	4.85	3.85

TABLE 2.2. Coordonnées en m

	Cheville X	Cheville Y	Pointe pied X	Pointe pied Y
Image 1	12.5	5.7	12.8	5.3
Image 2	11.4	3.6	11.7	3.4
Image 3	5.4	3.7	5.3	4.2
Image 4	6.2	8.4	6.6	8.7
Image 5	5.6	9.0	5.5	9.4
Image 6	6.5	9.8	6.6	10.0
Image 7	9.7	6.8	9.4	6.8

TABLE 2.3. Coordonnées en cm (mesurées sur la photo)

	Cheville X	Cheville Y	Pointe pied X	Pointe pied Y
Image 1	6.25	2.85	6.40	2.65
Image 2	5.70	1.80	5.85	1.70
Image 3	2.70	1.85	2.65	2.10
Image 4	3.10	4.20	3.30	4.35
Image 5	2.80	4.50	2.75	4.70
Image 6	3.25	4.90	3.30	5.00
Image 7	4.85	3.40	4.70	3.40

TABLE 2.4. Coordonnées en m

X	Y
4.10	3.05

TABLE 2.5. Coordonnées de la barre en m

Si on mesurerait toutes les distances (ce qui n'était pas exigé), on trouverait les distances données dans les tableaux 2.1 à 2.5.

(2)

On obtient la figure 2.1.

(3)

Voir tableaux 2.1 à 2.5.

(4) Un vecteur est caractérisé par 4 éléments :

- Son point d'application ;
- Sa norme ;
- Sa direction (donné par l'angle entre l'horizontale et de la droite qui le supporte) ;
- Son sens (l'un des deux sens par rapport à la droite précédente).

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{H_1H_2}$ sont obtenues grâce au tableau 2.2 :

$$\overrightarrow{H_1H_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.80 - 5.35 \\ 1.9 - 3.15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.55 \\ -1.2500 \end{pmatrix}$$

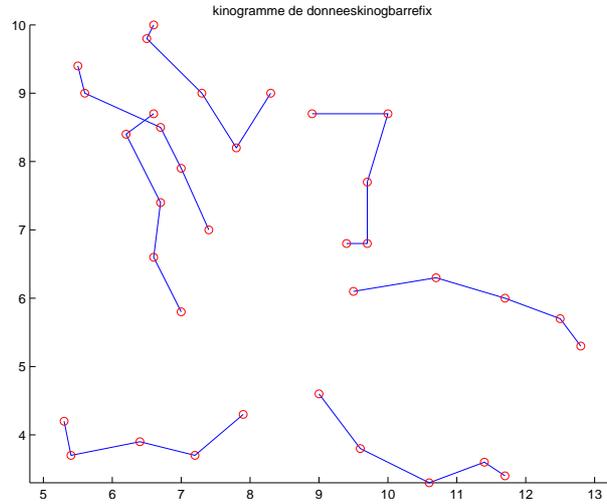


FIGURE 2.1. Le kinogramme reconstitué

On en déduit donc l'angle (donnés ici en degrés) et la norme :

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{-1.2500}{-0.5500} \right) = 66.25^\circ$$

et

$$\left\| \overrightarrow{H_1 H_2} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-0.5500)^2 + (-1.2500)^2} = 1.365 \text{ m.} \quad (2.1)$$

Puisque les coordonnées de $\overrightarrow{H_1 H_2}$ sont négatives, on en déduit le sens : gauche-bas. Bref, on a

$$\overrightarrow{H_1 H_2} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application : } & H_1 \\ \text{Norme :} & 1.365 \text{ m} \\ \text{Direction :} & 66.34^\circ \\ \text{Sens :} & \text{gauche-bas} \end{cases} \quad (2.2)$$

On trouve de même

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H_2 H_3} &= \begin{pmatrix} -1.2000 \\ -0.0500 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{H_3 H_4} &= \begin{pmatrix} -0.3000 \\ 1.4500 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H_2H_3} \text{ défini par } & \left\{ \begin{array}{l} \text{Point d'application : } H_2 \\ \text{Norme : } 1.201 \text{ m} \\ \text{Direction : } 2.38^\circ \\ \text{Sens : } \text{gauche-bas} \end{array} \right. \\ \overrightarrow{H_3H_4} \text{ défini par } & \left\{ \begin{array}{l} \text{Point d'application : } H_3 \\ \text{Norme : } 1.48 \text{ m} \\ \text{Direction : } -78.31^\circ \\ \text{Sens : } \text{gauche-haut} \end{array} \right. \end{aligned}$$

- (5) On rappelle que le vecteur vitesse moyen d'un point M entre les instants t_A (en A à cet instant) et les instants t_B (en B à cet instant) est donné par

$$\vec{v}_{A,B} = \begin{pmatrix} \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} \\ \frac{y_B - y_A}{t_B - t_A} \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse à la hanche entre les images 1 et 2. On assimilera la vitesse instantanée de la hanche entre les images 1 et 2 (à mi-parcours) à la vitesse moyenne de la hanche entre les images 1 et 2. Si $f = 30 \text{ Hz}$ est la fréquence d'acquisition, on a entre deux images $t_2 - t_1 = 1/f$ et donc

$$\vec{v}_{1,2} = f \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix},$$

soit encore

$$\vec{v}_{1,2} = f \overrightarrow{H_1H_2}$$

ce qui nous permet d'appliquer directement les résultats de la question précédente. En effet, le point d'application de $\vec{v}_{1,2}$ est le milieu de $[H_1, H_2]$. Sa norme est celle de $\overrightarrow{H_1H_2}$ multipliée par 30, soit $30 \times 1.365 = 40.95 \text{ ms}^{-1}$. Son sens et sa direction sont inchangés. On a donc

$$\vec{v}_{1,2} \text{ défini par } \left\{ \begin{array}{l} \text{Point d'application : } \text{milieu de } [H_1, H_2] \\ \text{Norme : } 40.95 \text{ ms}^{-1} \\ \text{Direction : } 66.25^\circ \\ \text{Sens : } \text{gauche-bas} \end{array} \right.$$

et de même

$$\begin{aligned} \vec{v}_{2,3} \text{ défini par } & \left\{ \begin{array}{l} \text{Point d'application : } \text{milieu de } [H_2, H_3] \\ \text{Norme : } 36.03 \text{ ms}^{-1} \\ \text{Direction : } 2.38^\circ \\ \text{Sens : } \text{gauche-bas} \end{array} \right. \\ \vec{v}_{3,4} \text{ défini par } & \left\{ \begin{array}{l} \text{Point d'application : } \text{milieu de } [H_3, H_4] \\ \text{Norme : } 44.42 \text{ ms}^{-1} \\ \text{Direction : } -78.31^\circ \\ \text{Sens : } \text{gauche-haut} \end{array} \right. \end{aligned}$$

On constate que la norme de la vitesse augmente entre les images 3 et 4, par rapport à la vitesse entre 2 et 3. Pour un pendule passif, elle diminuerait. Le sportif fait en sorte d'acquérir de la vitesse par un foueté de façon à passer par dessus la barre (ce que ne ferait pas un pendule passif).

	X	Y	Angle	Norme
Entre 1 et 2	-16.50	-37.50	66.25	40.97
Entre 2 et 3	-36.00	-1.50	2.39	36.03
Entre 3 et 4	-9.00	43.50	-78.31	44.42

TABLE 2.6. Vecteurs Vitesse Hanche

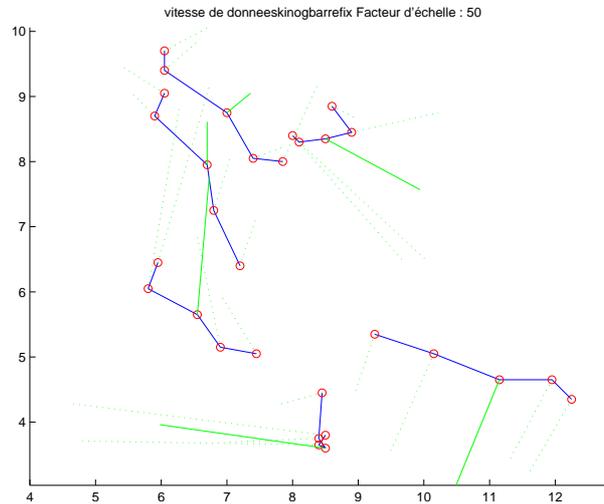


FIGURE 2.2. Les vitesse (en vert) de la hanche

Ces résultats sont rassemblés dans le tableau 2.6. Voir aussi la figure 2.2.

- (6) On rappelle les formules de changement d'origine : si un point M a pour coordonnées (x, y) par rapport à un point O , si (x_0, y_0) désigne les coordonnées de O dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) alors les coordonnées (x', y') de M dans le repère (O', \vec{i}', \vec{j}') sont

$$\begin{aligned}x' &= x - x_0, \\y' &= y - y_0.\end{aligned}$$

Cela provient de la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}.$$

On connaît les coordonnées de la hanche par rapport au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et les coordonnées de la barre dans ce même repère (voir tableau 2.2 et 2.5).

On en déduit donc les coordonnées de la hanche par rapport au repère lié à la barre : voir tableau 2.7.

	X	Y
Image 1	1.25	0.10
Image 2	0.70	-1.15
Image 3	-0.50	-1.20
Image 4	-0.80	0.25

TABLE 2.7. Coordonnées de la hanche par rapport à la barre

(7) Voir le tableau 2.4.

(8)

	X	Y
Image 1	0.90	-0.30
Image 2	0.90	-0.10
Image 3	-0.90	0.00
Image 4	-0.20	0.90

TABLE 2.8. Coordonnées de la cheville par rapport à la hanche

On utilise encore des formule de changement de repère et on trouve le tableau 2.8.

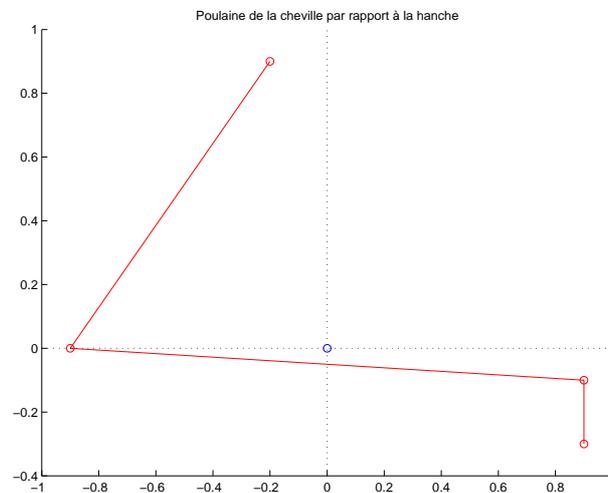


FIGURE 2.3. La poulaine de la cheville par rapport à la hanche

On obtient la figure 2.3. En fait, quand la cheville passe juste sous la hanche, elle n'est pas aussi proche que l'indique la figure 2.3; en effet, la fréquence peu élevée du film empêche de connaître la position du sportif quand il passe sous la barre. On devine qu'il est plutôt en position de flexion maximale, ce qui donnerait une poulaine comme indiqué sur la figure 2.4. On devine alors au début du mouvement un foueté de la cheville, ce qui lui fournit l'élan nécessaire au franchissement de la barre.

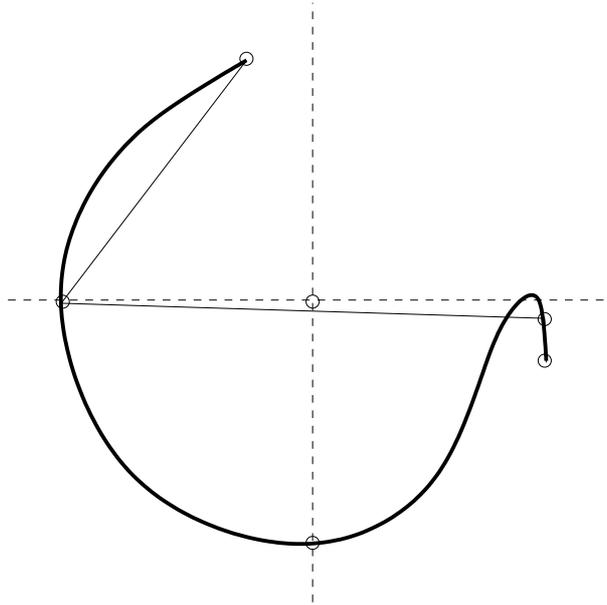


FIGURE 2.4. La poulaine de la cheville par rapport à la hanche avec plus de points

Cinématique (2)

On pourra aussi consulter le chapitre 4 de [Bas15a].

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.1.

(1)

Attention, ici on considère des déplacements, vitesses et accélérations mesurés le long d'une direction et par conséquent représentés par des nombres (des scalaires) et non des vecteurs à deux ou trois composantes. On ne les note donc pas sous forme d'un vecteur.

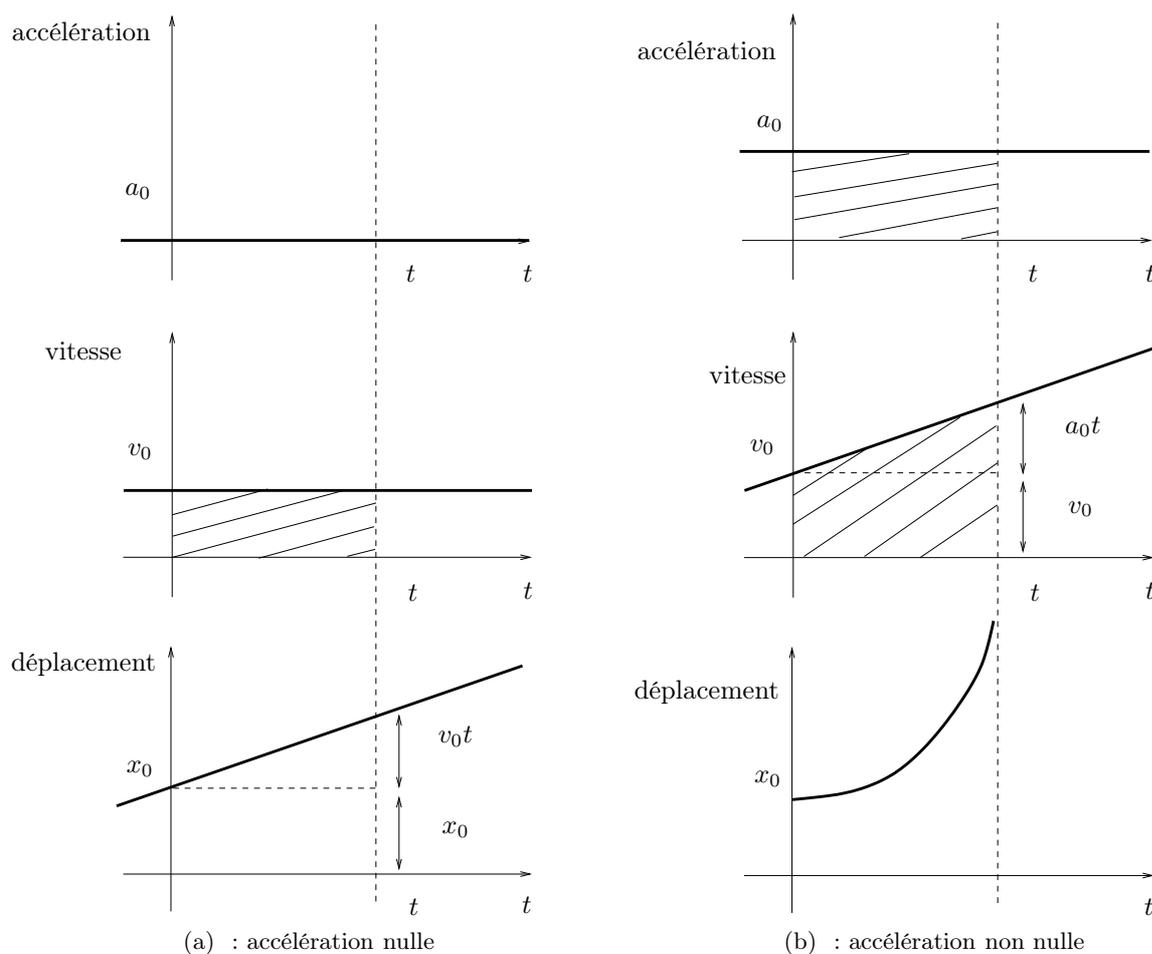


FIGURE 3.1. Les courbes d'accélération, de vitesse et de déplacement

Voir la figure 1(a). Un tel solide est dit à vitesse uniforme. C'est par exemple le cas d'une craie qui roule sur une table, un vélo ou une voiture qui roule sans force motrice, si on prend un intervalle de temps suffisamment bref pour que les forces de frottement soient négligées.

Pour ceux qui n'ont jamais vu la notion de dérivée, il est facile de comprendre qu'en voiture ou en vélo, si on ne freine pas et si on n'accélère pas, si un laps de temps assez bref, la vitesse est constante!

De façon plus explicite, on a, en notant x le déplacement, v la vitesse et a l'accélération :

$$a(t) = 0, \quad (3.1a)$$

$$v(t) = v_0, \quad (3.1b)$$

$$x(t) = v_0 t + x_0, \quad (3.1c)$$

où v_0 et x_0 sont des constantes d'intégration, quelconque et *a priori* non nulles.

Remarquons que si la vitesse est constante, on a

$$v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t},$$

formule à partir de laquelle, on peut retrouver (3.1c) (hormis la constante d'intégration x_0).

Le sens (3.1a) \rightarrow (3.1b) \rightarrow (3.1c) correspond à une intégration et le sens (3.1c) \rightarrow (3.1b) \rightarrow (3.1a) correspond à une dérivation. De façon plus générale, on donne les formules suivantes :

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t), \quad (3.2a)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t). \quad (3.2b)$$

Pour les plus matheux, cela revient aussi à écrire :

$$v(t) = \int_0^t a(s) ds + v_0, \quad (3.3a)$$

$$x(t) = \int_0^t v(s) ds + x_0, \quad (3.3b)$$

c'est-à-dire que v est une primitive de a et x est une primitive de v . \diamond

De façon géométrique, cela peut aussi se retrouver en écrivant qu'une intégration correspond à un calcul sous la courbe. Pour passer de l'accélération à la vitesse, on écrit que l'aire comprise entre les abscisses 0 et t et sous la courbe de la figure du haut de (1(a)) est égale à 0, à laquelle on rajoute la constante d'intégration v_0 : on retrouve donc (3.1b). Pour passer de la vitesse au déplacement, on écrit que l'aire comprise entre les abscisses 0 et t et sous la courbe de la figure du milieu de (1(a)) (en hachuré) est égale à $v_0 \times t$, à laquelle on rajoute la constante d'intégration x_0 : on retrouve donc (3.1c).

Pour les plus matheux, cela revient à écrire, en utilisant (3.3) :

$$v(t) = \int_0^t a(s) ds + v_0 = \int_0^t 0 ds + v_0 = v_0,$$

$$x(t) = \int_0^t v(s) ds + x_0 = \int_0^t v_0 ds + x_0 = v_0 t + x_0.$$

\diamond

(2)

Il suffit de reprendre la question précédente en remplaçant $a(t) = a_0 = 0$ par $a(t) = a_0 \neq 0$.

Voir la figure 1(b). Un tel solide est dit à mouvement uniformément accéléré. C'est par exemple le cas d'une craie qui tombe dans le vide, un vélo ou une voiture qui roule avec une force motrice constante, si on prend un intervalle de temps suffisamment bref pour que les forces de frottement soient négligées. On reviendra sur cette situation dans le TD chute libre.

De façon plus explicite, on a

$$a(t) = a_0, \quad (3.4a)$$

$$v(t) = a_0 t + v_0, \quad (3.4b)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0, \quad (3.4c)$$

où v_0 et x_0 sont des constantes d'intégration, quelconque et *a priori* non nulles.

Remarquons que si l'accélération est constante, on a

$$a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t},$$

formule à partir de laquelle, on peut retrouver (3.4b). Ici, si la vitesse n'est constante, et on n'a plus $v_0 = x/t$, comme le montre (3.4c).

De façon géométrique, cela peut aussi se retrouver en écrivant qu'une intégration correspond à un calcul sous la courbe. Pour passer de l'accélération à la vitesse, on écrit que l'aire comprise entre les abscisses 0 et t et sous la courbe de la figure du haut de (1(b)) (en hachuré) est égale à $a_0 \times t$, à laquelle on rajoute la constante d'intégration v_0 : on retrouve donc (3.4b). Pour passer de la vitesse au déplacement, on écrit que l'aire comprise entre les abscisses 0 et t et sous la courbe de la figure du milieu de (1(b)) (en hachuré) est égale à l'aire du trapèze de «petite base» v_0 , de «grande base» $a_0 t + v_0$ et de «hauteur» t , soit :

$$\frac{v_0 + a_0 t + v_0}{2} \times t = \frac{1}{2} a_0 t \times t + v_0 \times t,$$

à laquelle on rajoute la constante d'intégration x_0 : on retrouve donc (3.4c).

Pour les plus matheux, cela revient à écrire :

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t a(s) ds + v_0 = \int_0^t a_0 ds + v_0 = a_0 t + v_0, \\ x(t) &= \int_0^t v(s) ds + x_0 = \int_0^t (a_0 s + v_0) ds + x_0 = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0. \end{aligned}$$

◇

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.2.

Reprenons l'énoncé en en extrayant la substantifique moelle :

— Au départ du mouvement, posons $t_1 = 0$. L'athlète est immobile et sa vitesse angulaire ω_1 est donc nulle :

$$t_1 = 0, \quad \omega_1 = 0. \quad (3.5)$$

— Entre le départ et le lâché de l'engin (qui a lieu à $t_2 = 3$ s), on a une accélération angulaire constante égale à γ_0 soit

$$t_2 = 0, \quad \gamma = \gamma_0 = 360^\circ \text{s}^{-2} = 2 \pi \text{rad s}^{-2}. \quad (3.6)$$

À cet instant ω_2 est inconnu. On cherche v_2 la vitesse linéaire à l'instant du lâché.

— Les trois rayons sont donnés par les trois valeurs de R :

$$R_a = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad R_b = 1 \text{ m}, \quad R_c = 1.5 \text{ m} \quad (3.7)$$

On peut donc écrire successivement

— La relation entre vitesses et accélérations angulaires (ce qui est vrai uniquement si l'accélération angulaire est constante) :

$$\gamma_0 = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}.$$

Pour les plus matheux, cela peut se montrer en utilisant (3.4a) et (3.4b) où a_0 est remplacé par γ_0 :

$$\omega(t) = \gamma_0 t + \omega_0,$$

et donc par soustraction entre $t = t_1$ et $t = t_2$, on a

$$\omega_2 - \omega_1 = \gamma_0(t_2 - t_1).$$

◇

On en déduit donc

$$\omega_2 = (t_2 - t_1)\gamma_0 + \omega_1.$$

On écrit ensuite

$$v_2 = R\omega_2,$$

dont on déduit

$$v_2 = R((t_2 - t_1)\gamma_0 + \omega_1).$$

- On procède enfin à l'application numérique en utilisant les valeurs (exprimées en USI) données par (3.5), (3.6) et (3.7) : Pour le rayon R_a , on a

$$v_2 = Rt_2\gamma_0 = 0.2 \times 3 \times 2\pi = 3.7699 \text{ ms}^{-1}.$$

Pour le rayon R_b , on a

$$v_2 = Rt_2\gamma_0 = 1 \times 3 \times 2\pi = 18.8495 \text{ ms}^{-1}.$$

Pour le rayon R_c , on a

$$v_2 = Rt_2\gamma_0 = 1.5 \times 3 \times 2\pi = 28.2743 \text{ ms}^{-1}.$$

On convertit en km/h en multipliant par $3600/1000 = 3.6$: Pour le rayon R_a , on a

$$v_2 = 13.5716 \text{ km/h},$$

Pour le rayon R_b , on a

$$v_2 = 67.8582 \text{ km/h},$$

Pour le rayon R_c , on a

$$v_2 = 101.7875 \text{ km/h}.$$

Il suffit en fait de calculer la vitesse correspondant au rayon égal à 1, les autres s'en déduisant par linéarité. ◇

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.3.

Quelques remarques :

- La vitesse du tapis est en général plus faible que celle des sujets sur le terrain.
- D'après le cours, on a la relation pour un mouvement périodique d'amplitude A (ici appelée longueur de foulée), de fréquence f et produisant une vitesse v :

$$v = fA. \tag{3.8}$$

Attention, cette formule n'est valable que si les grandeurs sont exprimées en USI, ce qui n'est pas le cas ici.

Si on connaît les 3 courbes du haut, les 3 courbes du bas s'en déduisent : en effet, si on se donne f et v , on en déduit $A = v/f$ et donc la courbe du bas. On a converti les données en USI et montré que les courbes du bas sont proches de celles que l'on obtiendrait à partir de celle du haut. Voir figure 3.2.

Par conséquent, nous ne décrivons que les courbes du haut.

Décrivons les trois courbes du haut en allant du plus général au plus particulier.

- (1) Quelque soit la population, la fréquence est une fonction croissante de la vitesse de course.
- (2) Quelque soit, la vitesse, la fréquence est une fonction décroissante du niveau d'expertise.

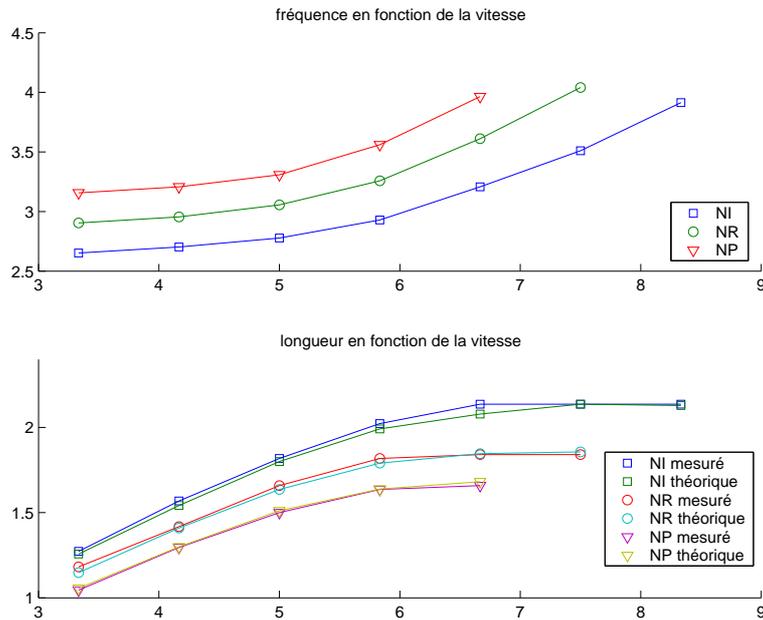


FIGURE 3.2. Les 3 courbes du haut et du bas.

- (3) Les fréquences maximales sont similaires ; la vitesse correspondante est alors proportionnelle au niveau d'expertise. Ou avec plus de rigueur, la vitesse correspondante est croissante par rapport au niveau d'expertise.
- (4) Plus la vitesse augmente, plus la fréquence augmente ; autrement dit, les trois courbes sont convexes, c'est-à-dire avec une convexité tournée vers le haut, soit une forme de parabole tournée vers le haut ¹.

Ces descriptions, objectives et sans nombres, dégagent les tendances importantes des courbes observées et devraient permettre à quelqu'un qui ne connaît pas ces courbes de les tracer à main levée.

Commentons maintenant ces courbes :

- Les points 1 et 2 ci-dessus est logique.
- En revanche, le point 3 est plus intéressant : le fréquence maximale ne dépend pas du niveau d'expertise ; seule, l'amplitude maximale dépend de façon croissante du niveau d'expertise. Cela est justifié que la fréquence est en fait peu dépendante du sujet. Elle serait même innée et dépendant uniquement de l'âge (un petit garçon marche avec de petits pas, rapides et courts (fréquence élevée) tandis qu'une personne âgée marche avec des pas de plus grande amplitude et de fréquence plus faible). Ainsi, en entraînement, grâce à la relation (3.8), un entraîneur, pour augmenter l'amplitude peut jouer, *a priori* à la fois sur la fréquence et la vitesse. D'après nos observation, seule l'amplitude peut être augmentée, ce qui se fait par la musculation. Cela est donnée par le point 2. L'entraîneur prendra garde au fait que cette augmentation d'amplitude s'accompagne d'une légère diminution de la fréquence. La fréquence initiale sera retrouvée en ensuite par des travaux spécifiques (par exemple, course à fréquence élevée avec des haies).

1. Attention, le sens du dictionnaire (et donc aussi celui que vous avez vu en anatomie) précise que convexe signifie «tourné vers l'extérieur» et son contraire concave, «en creux». En fait, ces définitions ne sont pas contradictoires !

Dynamique (1)

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.1.

Remarquons que l'on a trois phases lors de ce mouvement :

- Image 1 : immobilité (question 1) ;
- Image 1 à 8 : accélération avec contact avec le plot (question 2) ;
- Dernières images : chute libre (question 5).

- (1) On applique la RFD (ou PFD, ou deuxième lois de Newton) au système formé par le nageur : la somme des forces externes est égale à l'accélération du centre de gravité multipliée par la masse totale, soit zéro, puisque le système est immobile. Soit

$$\sum \vec{F}_e = \vec{0}. \quad (4.1)$$

Le nageur est soumis à son poids $\vec{p} = m\vec{g}$ et à la réaction d'appuis du plot \vec{R} . D'après (4.1), on a donc

$$m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}. \quad (4.2)$$

On a clairement :

$$\vec{p} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{centre de gravité } G \text{ du nageur à l'image 1} \\ \text{Norme :} & mg = 75 \times 10 = 750 \text{ N} \\ \text{Direction :} & \text{vertical} \\ \text{Sens :} & \text{bas} \end{cases} \quad (4.3)$$

Cela donne (en prenant l'abscisse et l'ordonnée de (4.3) ou en écrivant que si la somme de deux vecteurs est nulle, alors ils sont opposés, c'est-à-dire qu'ils ont la même norme, la même direction et un sens opposé) :

$$\vec{R} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{Interface pied-plot à l'image 1} \\ \text{Norme :} & mg = 750 \text{ N} \\ \text{Direction :} & \text{vertical} \\ \text{Sens :} & \text{haut} \end{cases} \quad (4.4)$$

Voir figure 1(a).

- (2) On est dans la même situation que pour la question 1 sauf que l'accélération est non nulle. On remplace l'accélération moyenne entre les images 1 et 8 par l'accélération instantanée au milieu de l'image 1 et 8, soit entre les images 4 et 5 (soit à l'instant $0.7/2 = 0.35$ après la première image) : on a donc

$$\vec{a} \approx \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{v_{fx} - v_{ix}}{\Delta t} \\ \frac{v_{fy} - v_{iy}}{\Delta t} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

On utilise à la place de (4.1), l'équation suivante

$$\sum \vec{F}_e = m\vec{a}. \quad (4.6)$$

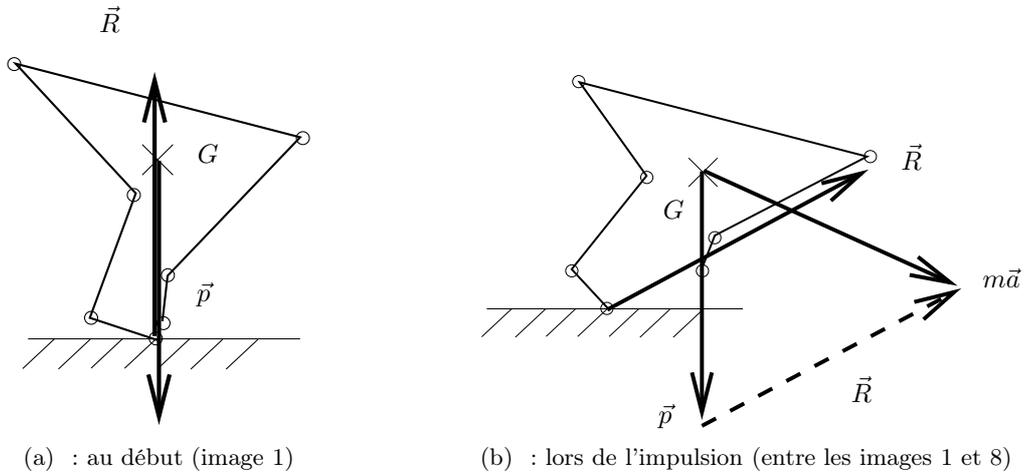


FIGURE 4.1. Le nageur sur le plot à deux instants

Le nageur est toujours soumis à son poids $\vec{p} = m\vec{g}$, qui n'est pas modifié et à la réaction d'appuis du plot \vec{R} . (4.1) est donc remplacée par

$$m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}. \quad (4.7)$$

On obtient donc

$$\vec{R} = m(\vec{a} - \vec{g}),$$

soit

$$\begin{aligned} R_x &= ma_x, \\ R_y &= m(a_y + g). \end{aligned}$$

Finalement, grâce à (4.5), on obtient

$$R_x = m \left(\frac{v_{fx} - v_{ix}}{\Delta t} \right), \quad (4.8a)$$

$$R_y = m \left(\frac{v_{fy} - v_{iy}}{\Delta t} + g \right). \quad (4.8b)$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} R_x &= 75 \times \frac{5.3 - 0}{0.7}, \\ R_y &= 75 \times \left(\frac{-0.8 - 0}{0.7} + 10 \right), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} R_x &= 567.85 \text{ N}, \\ R_y &= 664.29 \text{ N}. \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\vec{R} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{Interface pied-plot entre les images 4 et 5} \\ \text{Norme :} & \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 873.92 \text{ N} \\ \text{Direction :} & \arctg\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = 49.47^\circ \\ \text{Sens :} & \text{Droite-Haut} \end{cases} \quad (4.9)$$

Voir figure 1(b).

(3) Le principe d'action et de réaction donne :

$$\text{Action nageur sur plot défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{Interface pied-plot entre les images 4 et 5} \\ \text{Norme :} & \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 873.92 \text{ N} \\ \text{Direction :} & \text{arctg}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = 49.47^\circ \\ \text{Sens :} & \text{Gauche-Bas} \end{cases}$$

(4) On utilise le même calcul «à l'envers» : les équations (4.8) fournissent

$$v_{fx} = \Delta t \frac{R_x}{m} + v_{ix}, \quad (4.10a)$$

$$v_{fy} = \Delta t \left(\frac{R_y}{m} - g \right) + v_{iy} \quad (4.10b)$$

Application numérique avec $R_x = 200 \text{ N}$ et $R_y = 664.29 \text{ N}$:

$$v_{fx} = 1.87 \text{ ms}^{-1},$$

$$v_{fy} = -0.8 \text{ ms}^{-1}.$$

Cette dernière valeur est inchangée, ce qui était prévisible !

On en déduit alors

$$\vec{v}_f \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{Centre de gravité du nageur entre les images 4 et 5} \\ \text{Norme :} & 2.03 \text{ ms}^{-1} \\ \text{Direction :} & -23.18^\circ \\ \text{Sens :} & \text{Droite-Bas} \end{cases}$$

(5) Une fois que le nageur a décollé du plot, il n'est soumis plus qu'à son poids et la RDF donne

$$m\vec{g} = m\vec{a},$$

et donc

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

C'est la chute libre (voir TD chute libre).

Dynamique (2) et équilibre statique - Théorème des moments

Voir le chapitre 6 des notes de cours [Bas15b].

On pourra aussi consulter le chapitre 4 de [Bas15a].

CORRECTION DE L'EXERCICE 5.1.

- (1) Le graphique proposé nous montre la composante verticale de la réaction d'appui, $R_y(t)$ en fonction du temps. La formule de l'impulsion donnée en cours est

$$I = R_y T, \quad (5.1)$$

où T est la durée du mouvement, soit environ $T = 0,85 - 0,15 = 0,7$ s soit

$$T = 0,7 \text{ s.} \quad (5.2)$$

Quelle est la valeur de R_y prise ici, puisque $R_y(t)$ varie? De façon plus générale, l'impulsion I est égale à l'intégrale de la composante verticale de la réaction du sol, c'est-à-dire « l'aire sous la courbe ». Voir son calcul au point 2. Si la force R_y était constante, on aurait $I = R_y T$. Dans le cas général, on appelle \bar{R}_y , la valeur moyenne de R_y , le nombre \bar{R}_y tel que « l'aire sous la courbe » I soit égale à $\bar{R}_y T$. Autrement dit, on a

$$\bar{R}_y = \frac{I}{T}, \quad (5.3)$$

ce qui est conforme avec (5.1).

Mathématiquement, on a donc, si le mouvement est étudié entre les instants a et b , avec $T = b - a$:

$$I = \int_a^b R_y(t) dt \quad (5.4)$$

et donc

$$\bar{R}_y = \frac{1}{T} \int_a^b R_y(t) dt \quad (5.5)$$

◇

- (2) Pour déterminer I , on déterminera donc le nombre de carreaux (petits rectangles) et on multipliera ce nombre par la surface de ce carreau égale à

$$\Delta S = \Delta t \Delta f = 0.1/2 \times 100 = 5 \text{Ns.} \quad (5.6)$$

On peut tout d'abord donner une approximation par défaut et par excès de l'aire sous la courbe, qui sont « sûres », en comptant N_1 le nombre de carreaux qui sont sûrement sous la courbe et N_2 ceux qui sont sûrement au dessus de la courbe. On obtient

$$N_1 = -1 + 0 + 1 + 3 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 5 + 3 + 0 + 0 - 1,$$

$$N_2 = 0 + 2 + 3 + 6 + 6 + 5 + 5 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 6 + 4 + 1 + 0,$$

soit

$$N_1 = 34,$$

$$N_2 = 63,$$

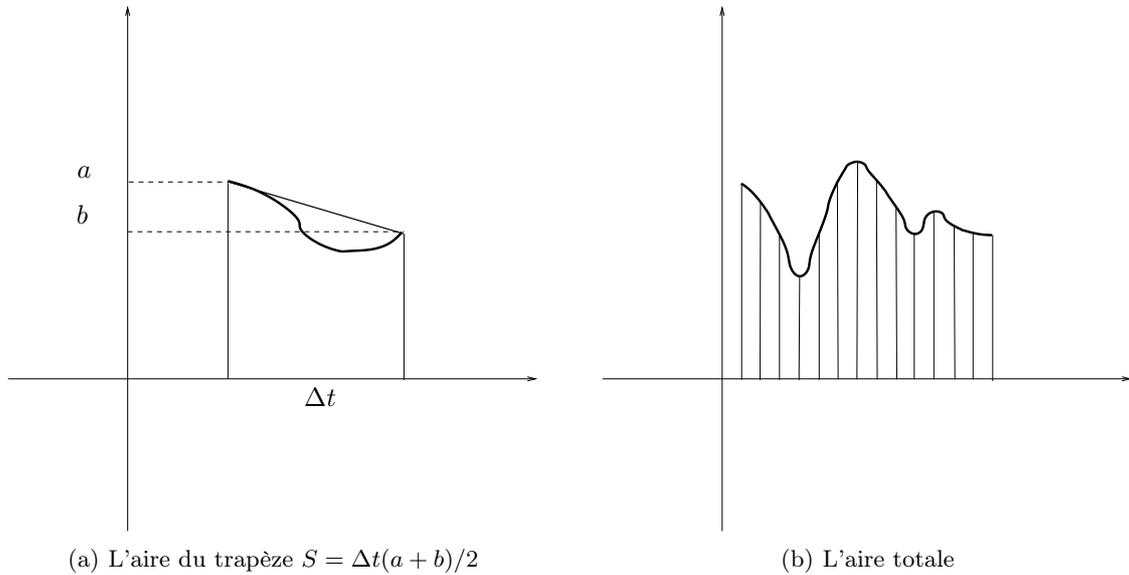


FIGURE 5.1. Calculs d'aire sous la courbe.

ce qui est finalement peu précis. Mais, on est tout de même assuré d'avoir

$$N_1 \Delta S \leq I \leq N_2 \Delta S,$$

soit

$$170 \leq I \leq 315. \quad (5.7)$$

Une autre façon d'avoir une estimation, plus précise et d'utiliser la méthode des trapèzes, qui est une méthode d'approximation d'intégrale¹ on découpe l'aire en trapèze déterminant (approchant) l'aire exacte grâce à la formule suivante : Si a et b désignent les valeurs du signal aux bornes de l'intervalle et Δt la largeur de l'intervalle) (voir figure 1(a)), on a

$$S \approx \Delta t \frac{a + b}{2},$$

Pour la courbe totale, si a_0, \dots, a_N désignent les valeurs du signal, (voir figure 1(b)), on a

$$\begin{aligned} S &\approx \Delta t \left(\frac{a_0 + a_1}{2} + h \frac{a_1 + a_2}{2} + \dots + h \frac{a_{N-1} + a_N}{2} \right), \\ &= \Delta t \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_{N-1}}{2} + \frac{a_{N-1}}{2} + \frac{a_N}{2} \right), \end{aligned}$$

Si n_0, n_1, \dots, n_N désigne la hauteur en carreaux, on a $n_i = \Delta f$ et donc, en utilisant (5.6),

$$S \approx \Delta S \left(\frac{a_0}{2} + a_1 + \dots + a_{N-1} + \frac{a_N}{2} \right)$$

On obtient valeurs suivantes pour les n_i :

$$0; 1, 5; 3, 8; 5, 3; 4, 8; 4, 1; 3, 3; 3, 2; 3, 8; 4, 6; 5, 3; 5, 3; 3, 8; 0, 9$$

1. et qui a été utilisée pour déterminer une intégrale exacte lors de l'exercice 3.1 page 15.

et donc

$$\begin{aligned} S &\approx \Delta S \times (0/2 + 1,5 + 3,8 + 5,3 + 4,8 + 4,1 + 3,3 + 3,2 + 3,8 + 4,6 + 5,3 + 5,3 + 3,8 + 0,9/2), \\ &= \Delta S \times 49,25, \end{aligned}$$

soit

$$I \approx 246,25 \text{ Ns}, \quad (5.8)$$

à comparer avec (5.7).

Notons que la valeur moyenne \overline{R}_y est donc donnée par (5.2) et (5.3) :

$$\overline{R}_y = \frac{I}{T} = \frac{246,25}{0,7} = 351,78 \text{ N}.$$

Si on trace une droite $y = 351,78$, l'aire sous la courbe de cette droite est égale à l'aire sous la courbe !

L'intérêt du calcul de l'impulsion est le suivant : Imaginons un squat jump dont l'impulsion a lieu sur un intervalle de temps $[a, b]$. Au début de l'impulsion, en a , la vitesse $v(a)$ du centre de gravité du sportif est nulle :

$$v(a) = 0. \quad (5.9)$$

On cherche à calculer la vitesse $v(b)$ du centre de gravité du sportif à la fin de la phase d'impulsion. La seconde loi de Newton appliquée au sportif pendant la phase d'impulsion, nous donne, en vertical :

$$ma_y = R_y - mg$$

On rappelle que $a_y = v'$ et donc en intégrant cela entre a et b , il vient

$$m \int_a^b v'(t) dt = \int_a^b (R_y(t) - mg) dt =$$

soit

$$v(b) - v(a) = \frac{1}{m} \left(\int_a^b R_y(t) dt - mgT \right),$$

ce qui, compte tenu de (5.9) fait donc intervenir l'impulsion, donnée par (5.4) :

$$v(b) = \frac{1}{m} (I - mgT). \quad (5.10)$$

Pour avoir une vitesse élevée, il faut donc une impulsion importante ! Pour partir vers le haut, il faut donc que cette impulsion soit supérieure à mgT pour assurer $v(b) \geq 0$. Dans le cas de la marche, on a, en prenant $m = 70 \text{ kg}$

$$v(b) = \frac{1}{m} (I - mgT) = \frac{1}{70} (246,25 - 70 \times 10 \times 0,7) = \frac{1}{70} (246,25 - 490) = -\frac{243,75}{70} = -3,482143 \text{ ms}^{-1}.$$

Puisque cette quantité est négative, le sportif ne décolle pas, ce qui est normal pour un cycle de marche ! \diamond

CORRECTION DE L'EXERCICE 5.2.

On calcule la pression p comme étant le rapport

$$p = \frac{R_y}{S}, \quad (5.11)$$

où R_y est la composante verticale et S la surface de contact. On suppose que le poids du sujet est uniformément réparti sur les zones de contact au sol ; on a donc $R_y = 60 \times 10 = 600 \text{ N}$. Ainsi,

$$p = \frac{600}{S}. \quad (5.12)$$

Le nombre S doit être mesuré comme dans l'exercice (5.1), en écrivant

$$S = n \times \frac{10 \times 10}{4} \times 10^{-4} = 0,0025n \quad (5.13)$$

où n est le nombre (décimal) de carreaux correspondant à la zone de contact. Ainsi

$$p = \frac{600}{0,0025n},$$

et donc

$$p = \frac{240\,000}{n} \text{ Pa}. \quad (5.14)$$

Contrairement à l'exercice (5.1), ici on évalue directement, « à vue de nez » le nombre approximatif de carreaux, pour chacune des 5 images :

$$\begin{aligned} N_1 &\approx 1, \\ N_2 &\approx 4, \\ N_3 &\approx 10, \\ N_4 &\approx 2, \\ N_5 &\approx 1, \end{aligned}$$

et donc pour chacune des 5 images :

$$\begin{aligned} p_1 &\approx 240\,000, \\ p_2 &\approx 60\,000, \\ p_3 &\approx 24\,000, \\ p_4 &\approx 120\,000, \\ p_5 &\approx 240\,000. \end{aligned}$$

On observe donc une diminution de la pression, minimale quand la jambe passe exactement au dessus du pied, suivie d'une augmentation. Le centre de pression est au début, à l'arrière du pied, puis au milieu, enfin à l'avant du pied, à chaque fois donné finalement par la position de la jambe par rapport au pied.

REMARQUE 5.1. En fait, ce modèle est un peu absurde ; au tout début du contact, entre le pied et le sol, la pression devrait être infinie ! Dans un modèle plus complet de bipédie, la force appliquée sur la jambe n'est pas le poids du corps totu entier, qui repose essentiellement sur l'autre jambe, au tout début du contact entre le pied et le sol. Si on utilise cela dans le cas d'une course, le pied est en dynamique et l'action exercée par le pied sur le sol n'est plus égale au poids du corps.

CORRECTION DE L'EXERCICE 5.3.

- (1) Notons \vec{P} le poids de l'haltère. Le système formé par l'haltère est à l'équilibre ; la force exercée par la main \vec{F} sur l'haltère est donc l'opposé du poids de l'haltère et vaut donc

$$\vec{F} = -\vec{P}, \quad (5.15)$$

d'après le principe d'action et de réaction. Ainsi, d'après l'équilibre de l'haltère, la force exercée par l'haltère sur la main vaut $-(\vec{P}) = \vec{P}$, de norme $P = mg = 5 \times 10 = 50$ N.

- (2) On considère le système formé par l'avant-bras (et la main incluse), soumis aux forces externes suivantes :
- la force \vec{P} exercée par l'haltère sur la main, connue d'après (5.15) ;
 - La réaction du bras sur l'avant-bras \vec{R} (sans laquelle l'avant-bras ne tiendrait pas et ne vivrait pas non plus), inconnue ;
 - La force exercée par l'ensemble des deux biceps \vec{F}_m , inconnue ;
 - Son propre poids \vec{p} , connu.

- (3) L'équilibre des forces externes fournirait :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_m + \vec{p} = \vec{0}, \quad (5.16)$$

Puisque deux forces sont inconnues, cette équation ne peut fournir la valeur de \vec{F}_m .

- (4) On utilise donc le fait que la somme des moments des forces externes par rapport à un point O donné est nulle. On s'arrange pour choisir le point O de telle sorte que l'un des deux moments inconnus (celui

de \vec{R} ou de \vec{F}_m) soit nul. Le moment d'une force par rapport à un point O est égal à

$$\mathcal{M}_0(\vec{F}) = \pm Fd, \quad (5.17)$$

où le signe est $+$ si la rotation due à la force a lieu dans le sens trigonométrique, $-$ sinon, F est la norme (positive) de la force et d le bras de levier, distance (positive) entre le point O et l'axe de la force. Si on choisit O sur l'axe d'une force, d est nul et son moment est nul. On choisit donc O égal à au coude, de telle sorte que :

$$\mathcal{M}_0(\vec{P}) = -lP,$$

où l est la longueur totale de l'avant-bras

$$\mathcal{M}_0(\vec{R}) = 0 \times R = 0,$$

$$\mathcal{M}_0(\vec{F}_m) = dF_m,$$

$$\mathcal{M}_0(\vec{p}) = -p\lambda,$$

où d est le bras de levier, indiqué sur la figure de l'énoncé et λ est le bras de levier correspondant au poids du système formé par l'avant-bras et la main.

- (5) On écrit que la somme des moments par rapport à O est nulle :

$$\mathcal{M}_0(\vec{P}) + \mathcal{M}_0(\vec{R}) + \mathcal{M}_0(\vec{F}_m) - p\lambda = 0,$$

soit

$$-lP + dF_m - p\lambda = 0$$

ce qui fournit la valeur de F_m recherchée :

$$F_m = \frac{lP + p\lambda}{d}.$$

- (6) *Application numérique :*

Le poids p du système l'avant-bras et la main est égal à $Mg\alpha$ où M est la masse du sportif et α le rapport entre la masse de l'avant bras et de la main sur la masse totale, donnée dans le tableau 7.1 page 34, à diviser par deux! On peut aussi le lire dans l'énoncé. On a donc $p = 80 \times 10 \times 0,044/2$. On a aussi $P = 50$ N, $l = 36$ cm $\lambda = 0,682l = 0,682 \times 36$. Ainsi

$$lP + p\lambda = 36 \times 50 + 80 \times 10 \times 0,044/2 \times 0,682 \times 36 = 2232,115 \text{ Ncm.}$$

et pour $d = 4$ ou $d = 6$ cm :

$$F_m = 558,02 \text{ N}$$

$$F_m = 372,01 \text{ N}$$

- (7) Le second cas est préférable au premier, car la force développée par les deux biceps est la moindre des deux, pour soutenir (mode de contraction isométrique) une même charge.

REMARQUE 5.2. On pourra consulter les sections 6.3.2 ou 6.4.1 du cours pour avoir une méthode purement graphique.

Anthropométrie

CORRECTION DE L'EXERCICE 7.1.

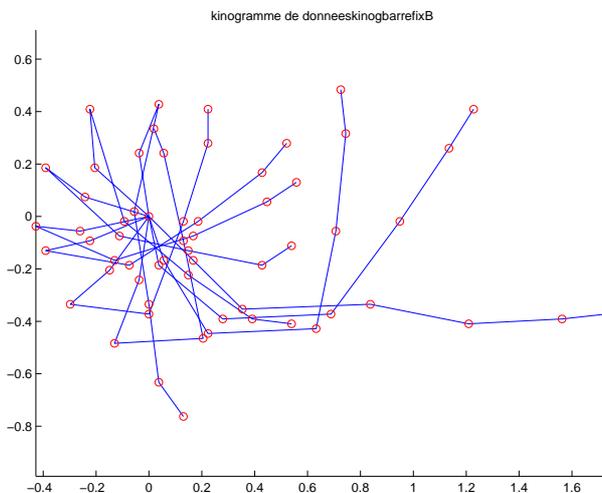


FIGURE 7.1. kinogramme

Voir le kinogramme en figure 7.1.

- (1) Le tableau des taille se remplit grâce aux données figurant page 2 (réalisé par Drillis et Contini, 1966) du polycopié de cours sur l'anthropométrie : la taille du bras (de l'épaule jusqu'au poignet) vaut $0.186H$ où H est la taille de l'individu étudié, soit 1.60 m :

$$l_b = 0.186 \times 1,60 = 0.2976 \text{ m.}$$

De même, pour la jambe qui s'étend du genou jusqu'à la cheville :

$$l_j = (0.285 - 0.039) \times 1,60 = 0.3936 \text{ m.}$$

Pour les masses, on utilise le tableau page 5 (réalisé par Winter, 1990) du polycopié de cours sur l'anthropométrie, en multipliant par deux les segments qui sont présents deux fois chez l'individu étudié (segment des membres supérieur et inférieur). On obtient

$$m_c = 2 \times 45 \times 0.1 = 9 \text{ kg.}$$

De même, on a

$$m_p = 2 \times 45 \times 0.0145 = 1.305 \text{ kg.}$$

On a indiqué les rapports des masses sur la masse totale dans le tableau 7.1 page 34. Voir les tableaux regroupés en fin de corrigé, à partir de la page 34.

REMARQUE 7.1. Si les données anthropométriques de Drillis et Contini ne sont pas fournies, on peut aussi calculer les longueurs des segments, en utilisant la méthode du TD 2, voir équations (2.1) et (2.2) page 9. Attention, cette méthode donne des longueurs qui peuvent légèrement varier d'une image à l'autre, puisque la propriété indéformable des segments n'est qu'une hypothèse de travail !

Pour compléter les tableaux du bas, on commence par déterminer les centre de gravité de chacun des segments, aux images demandées. Rappelons que l'on les détermine en utilisant le tableau page 6 (réalisé par Winter, 1990), du polycopié de cours sur l'anthropométrie.

De façon générale, si on calcule les coordonnées du centre de gravité du segment $[PD]$ où P désigne l'extrémité proximale et D l'extrémité distale, on utilise les coefficients k_D ou k_P (dont la somme vaut 1) et qui sont définis par

$$k_P = \frac{GP}{PD}, \quad k_D = \frac{GD}{DP},$$

dont on déduit les deux formules équivalentes (O désigne l'origine du repère) :

$$\vec{OG} = k_P \vec{PD} + \vec{OP}, \quad \vec{OG} = k_D \vec{DP} + \vec{OD}.$$

Elles s'écrivent aussi sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} x_G = k_P(x_D - x_P) + x_P, \\ y_G = k_P(y_D - y_P) + y_P, \\ x_G = k_D(x_P - x_D) + x_D, \\ y_G = k_D(y_P - y_D) + y_D. \end{cases}$$

Ces deux formules sont équivalentes puisque $k_D + k_P = 1$. Elles sont aussi équivalentes à

$$\begin{cases} x_G = k_D x_P + k_P x_D, \\ y_G = k_D y_P + k_P y_D. \end{cases}$$

Par exemple, pour l'avant-bras à l'image 1, on considère son extrémité distale égale au poignet confondu avec la main, de coordonnées $(0, 0)$ et d'extrémité proximale égale au coude de coordonnées $(0.1674, -0.1674)$. La première formule donne :

$$\begin{cases} x_G = 0.430 \times (0 - 0.1674 - 0) + 0.1674 = 0.0954, \\ y_G = 0.430 \times (0 - (-0.1674)) - 0.1674 = -0.0954. \end{cases}$$

Grâce aux tableaux 7.3 et 7.4, on obtient alors les cases en gras des tableaux 7.5 et 7.6.

On a utilisé les coefficients donnés dans le tableau 7.2.

Enfin, pour déterminer le centre de gravité du corps, on écrit l'une des deux formules équivalentes :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\sum_i m_i x_{Gi}}{M}, \\ y_G = \frac{\sum_i m_i y_{Gi}}{M}, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x_G = \sum_i \frac{m_i}{M} x_{Gi}, \\ y_G = \sum_i \frac{m_i}{M} y_{Gi}, \end{cases}$$

où, pour chaque i , m_i est la masse du segment i et (x_{Gi}, y_{Gi}) les coordonnées du centre de gravité du segment i et $M = \sum_i m_i$ est la somme des masses de chacun des segments.

En utilisant directement le tableau 7.1, on obtient par exemple pour l'abscisse du centre de gravité à l'image 7 :

$$\begin{aligned} x_G = 0.044 \times (-0.14849) + 0.056 \times (-0.35491) + 0.578 \times (-0.27905) \\ + 0.2 \times (-0.0013392) + 0.093 \times (0.28825) + 0.029 \times (0.5023) \end{aligned}$$

soit

$$x_G = -0.1466.$$

On obtient de même les cases en gras du tableau 7.7.

(2)

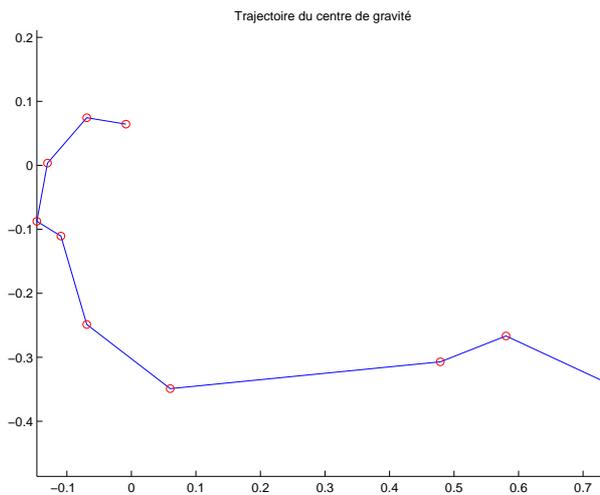


FIGURE 7.2. trajectoire du centre de gravité

La trajectoire du centre de gravité est représentée en figure 7.2.

On voit sur cette figure que le centre de gravité de la gymnaste se rapproche de la barre. Cela lui permet de passer par dessus la barre. En effet, outre le foueté de cheville déjà vu lors du TD 2, le fait de rapprocher le centre de gravité de la barre est similaire au fait de se recentrer chez le patineur qui tourne sur lui même : la vitesse de rotation augmente. on justifiera pourquoi la vitesse de rotation augmente lors du cours sur l'énergie.

Ensemble des tableaux

Avant-bras	0.044
Bras	0.056
Tronc+tête	0.497
cuisse	0.200
jambe	0.093
ped	0.029

TABLE 7.1. masse segments/masse totale, éventuellement doublés

Avant-bras	0.570	distal
Bras	0.564	distal
Tronc(+tête)	0.500	distal
cuisse	0.433	proximal
jambe	0.433	proximal
ped	0.500	proximal

TABLE 7.2. Position des centres de gravité des segments

	X main	Y main	X coude	Y coude	X épaule	Y épaule	X hanche	Y hanche
Image 1	0.0000	0.0000	0.1674	-0.1674	0.3535	-0.3535	0.8372	-0.3349
Image 2	0.0000	0.0000	0.0372	-0.1860	0.2791	-0.3907	0.6884	-0.3721
Image 3	0.0000	0.0000	0.0558	-0.1674	0.2233	-0.4465	0.6326	-0.4279
Image 4	0.0000	0.0000	-0.0372	-0.2419	-0.1302	-0.4837	0.2047	-0.4651
Image 5	0.0000	0.0000	-0.1488	-0.2047	-0.2977	-0.3349	0.0000	-0.3721
Image 6	0.0000	0.0000	-0.2233	-0.0930	-0.3907	-0.1302	-0.0744	-0.1860
Image 7	0.0000	0.0000	-0.2605	-0.0558	-0.4279	-0.0372	-0.1302	-0.1674
Image 8	0.0000	0.0000	-0.2419	0.0744	-0.3907	0.1860	-0.1116	-0.0744
Image 9	0.0000	0.0000	-0.2047	0.1860	-0.2233	0.4093	-0.0930	-0.0186
Image 10	0.0000	0.0000	-0.0372	0.2419	0.0372	0.4279	-0.0558	0.0186

TABLE 7.3. coordonnées des points

	X genou	Y genou	X cheville	Y cheville	X métatarse	Y métatarse
Image 1	1.2093	-0.4093	1.5628	-0.3907	1.7302	-0.3721
Image 2	0.9488	-0.0186	1.1349	0.2605	1.2279	0.4093
Image 3	0.7070	-0.0558	0.7442	0.3163	0.7256	0.4837
Image 4	0.1302	-0.0930	0.0558	0.2419	0.0186	0.3349
Image 5	0.1302	-0.0186	0.2233	0.2791	0.2233	0.4093
Image 6	0.1860	-0.0186	0.4279	0.1674	0.5209	0.2791
Image 7	0.1674	-0.0744	0.4465	0.0558	0.5581	0.1302
Image 8	0.1488	-0.1302	0.4279	-0.1860	0.5395	-0.1116
Image 9	0.1488	-0.2233	0.3907	-0.3907	0.5395	-0.4093
Image 10	0.0000	-0.3349	0.0372	-0.6326	0.1302	-0.7628

TABLE 7.4. coordonnées des points

	X Avant-bras	Y Avant-bras	X Bras	Y Bras	X Tronc+tête	YTronc+tête
Image 1	0.0954	-0.0954	0.2724	-0.2724	0.5954	-0.3442
Image 2	0.0212	-0.1060	0.1736	-0.3015	0.4838	-0.3814
Image 3	0.0318	-0.0954	0.1503	-0.3248	0.4280	-0.4372
Image 4	-0.0212	-0.1379	-0.0897	-0.3783	0.0372	-0.4744
Image 5	-0.0848	-0.1167	-0.2328	-0.2781	-0.1489	-0.3535
Image 6	-0.1273	-0.0530	-0.3177	-0.1140	-0.2325	-0.1581
Image 7	-0.1485	-0.0318	-0.3549	-0.0453	-0.2791	-0.1023
Image 8	-0.1379	0.0424	-0.3258	0.1373	-0.2511	0.0558
Image 9	-0.1167	0.1060	-0.2152	0.3119	-0.1582	0.1954
Image 10	-0.0212	0.1379	0.0048	0.3468	-0.0093	0.2233

TABLE 7.5. coordonnées des centres de gravité des segments

	X cuisse	Y cuisse	X jambe	Y jambe	X pied	Y pied
Image 1	0.9983	-0.3671	1.3624	-0.4012	1.6465	-0.3814
Image 2	0.8012	-0.2190	1.0294	0.1023	1.1814	0.3349
Image 3	0.6648	-0.2668	0.7231	0.1053	0.7349	0.4000
Image 4	0.1724	-0.3040	0.0980	0.0520	0.0372	0.2884
Image 5	0.0564	-0.2190	0.1705	0.1103	0.2233	0.3442
Image 6	0.0384	-0.1135	0.2907	0.0619	0.4744	0.2233
Image 7	-0.0013	-0.1271	0.2883	-0.0180	0.5023	0.0930
Image 8	0.0012	-0.0986	0.2697	-0.1544	0.4837	-0.1488
Image 9	0.0117	-0.1072	0.2535	-0.2958	0.4651	-0.4000
Image 10	-0.0316	-0.1345	0.0161	-0.4638	0.0837	-0.6977

TABLE 7.6. coordonnées des centres de gravité des segments

	X CG corps	Y CG corps
Image 1	0.7377	-0.3402
Image 2	0.5805	-0.2666
Image 3	0.4787	-0.3071
Image 4	0.0603	-0.3490
Image 5	-0.0692	-0.2486
Image 6	-0.1093	-0.1106
Image 7	-0.1466	-0.0875
Image 8	-0.1301	0.0034
Image 9	-0.0692	0.0745
Image 10	-0.0084	0.0643

TABLE 7.7. coordonnées du centre de gravité du corps

Énergie

Voir le chapitre 7 des notes de cours [Bas15b].

CORRECTION DE L'EXERCICE 8.1.

(0) *Question supplémentaire*

À $t = 0$, la position du membre inférieur est donné par la figure de gauche de l'énoncé! À $t = 0,3$, la position du membre inférieur est donné par la figure de droite de l'énoncé!

(1) *Commentaire succinct :*

- Distribution sigmoïdale des angles. Les vitesses initiales et finales sont nulles ; pic de vitesse.
- Déphasage proximo-distal : le pic de vitesse de la cuisse est antérieur à celui de la jambe (+pied).

(2) Pour chaque segment (cuisse et jambe), on ne calcule que

- M , la masse (en kg) ;
- r , le rayon de giration (en m) ;
- I , le moment d'inertie (par rapport au centre de gravité) (en kgm^2).

Attention aux arrondis de calculs qui modifient quelque peu les résultats donnés en correction de TD!

- Pour la cuisse :

$$M_c = 0.1 \times M_{\text{sujet}} = 0.1 \times 80 = 8 \text{ kg} \quad (8.1a)$$

$$r_c = 0.323 \times l_c = 0.323 \times (1.8 \times 0.245) = 0.142443 \text{ m} \quad (8.1b)$$

$$I_c = M_c r_c^2 = 8 \times (0.142443)^2 = 0.1623201 \text{ kgm}^2 \quad (8.1c)$$

- Pour la jambe :

$$M_j = 0.061 \times 80 = 4.88 \text{ kg} \quad (8.2a)$$

$$r_j = 0.416 \times (1.8 \times 0.285) = 0.213408 \text{ m} \quad (8.2b)$$

$$I_j = 4.88 \times 0.213408^2 = 0.2222497 \text{ kgm}^2 \quad (8.2c)$$

(3) (a) • *Énergies potentielles*

D'après les formules du cours, l'énergie potentielle d'un segment de masse M et de centre de gravité d'altitude y_G est donnée par

$$E_p = M_c g y_G$$

Par exemple, pour la cuisse à $t = 0.1$ s, on obtient

$$E_p = 8 \times 10 \times 0.763 = 61.040 \text{ J}$$

Voir le tableau 8.1 page suivante pour les autres énergies potentielles.

• *Énergies cinétiques de translation*

Si v_G est la vitesse angulaire du centre de gravité, r est le rayon de giration par rapport au centre de gravité, alors l'énergie cinétique de translation est donnée par

$$E_{ct} = \frac{1}{2} M v_G^2$$

	à $t=0.1$	à $t=0.2$
Cuisse	61.040	65.280
Jambe	33.135	19.471

TABLE 8.1. Énergies potentielles

Par exemple, pour la jambe à $t = 0.2$ s, on a

$$E_{ct} = \frac{1}{2} \times 4.88 \times 5.488^2 = 73.48827 \text{ J}$$

	à $t=0.1$	à $t=0.2$
Cuisse	5.788836	3.694084
Jambe	18.78952	73.48827

TABLE 8.2. Énergies cinétiques de translation

Voir le tableau 8.2 pour les autres énergies cinétiques de translation.

- *Énergies cinétiques de rotation*

Si ω est la vitesse de rotation angulaire autour du centre de gravité G , (par rapport à une direction fixe) et I le moment d'inertie (par rapport au centre de gravité), alors l'énergie cinétique de rotation est donnée par

$$E_{cr} = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Il faut prendre garde au calcul de ω ! Si on note par exemple α l'angle entre le vecteur \vec{i} et le segment considéré, ϕ et θ étant les angles de l'énoncé, un peu de géométrie nous montre que pour la cuisse,

$$\alpha = \phi - \frac{\pi}{2},$$

et pour la jambe

$$\alpha = \phi + \theta + \frac{\pi}{2},$$

Ainsi, en terme de vitesse angulaire, si $\dot{\phi}$ et $\dot{\theta}$ désignent les vitesse angulaire respectives au niveau de la hanche et du genou (données directement dans l'énoncé, à convertir en rad/s), alors la vitesse angulaire à prendre en compte pour la cuisse est

$$\omega = \dot{\phi}$$

tandis que la vitesse angulaire à prendre en compte pour la jambe est

$$\omega = \dot{\phi} + \dot{\theta}$$

Par exemple, pour la cuisse à $t = 0.2$ s, on a

$$E_{cr} = \frac{1}{2} \times 0.1623201 \times \left(\frac{216}{180} \times \pi \right)^2 = 1.153465 \text{ J}$$

Par exemple, pour la jambe à $t = 0.2$ s, on a

$$E_{cr} = \frac{1}{2} \times 0.2222497 \times \left(\frac{216 + 1324}{180} \times \pi \right)^2 = 80.28 \text{ J}$$

	à $t=0.1$	à $t=0.2$
Cuisse	4.571239	1.153465
Jambe	6.25897	80.28

TABLE 8.3. Énergies cinétiques de rotation

Voir le tableau 8.3 pour les autres énergies cinétiques de rotation.

(b) L'énergie cinétique pour chaque segment est la somme des deux énergies cinétiques :

$$E_c = E_{ct} + E_{cr}.$$

et l'énergie mécanique totale est la somme des énergies potentielle et cinétiques :

$$E = E_c + E_p.$$

Toutes les énergies sont données dans les tableaux 8.4 et 8.5.

	à $t=0.1$	à $t=0.2$
E_p	61.040	65.280
E_c	10.360	4.848
E	71.400	70.128

TABLE 8.4. Énergies de la cuisse

	à $t=0.1$	à $t=0.2$
E_p	33.135	19.471
E_c	25.048	153.768
E	58.184	173.239

TABLE 8.5. Énergies de la jambe

(c)

On peut faire les calculs pour tous les instants : on obtient les courbes des figures 8.1.

L'énergie mécanique totale de chacun des deux systèmes (jambe et cuisse) n'est pas constante : les deux systèmes (cuisse et jambe) ne sont pas mécaniquement isolés. En effet, on observe un transfert d'énergie du haut du corps, vers le ballon, via la cuisse puis la jambe. Autrement dit, au cours du mouvement, de l'énergie est transmises du tronc vers la cuisse, puis vers la jambe, et quand l'énergie de la jambe est maximale (voir le pic sur la courbe), elle est transférée au ballon lors du choc. L'ensemble du système (jambe+cuisse) n'est pas mécaniquement isolé pour la même raison (voir figure 1(d)).

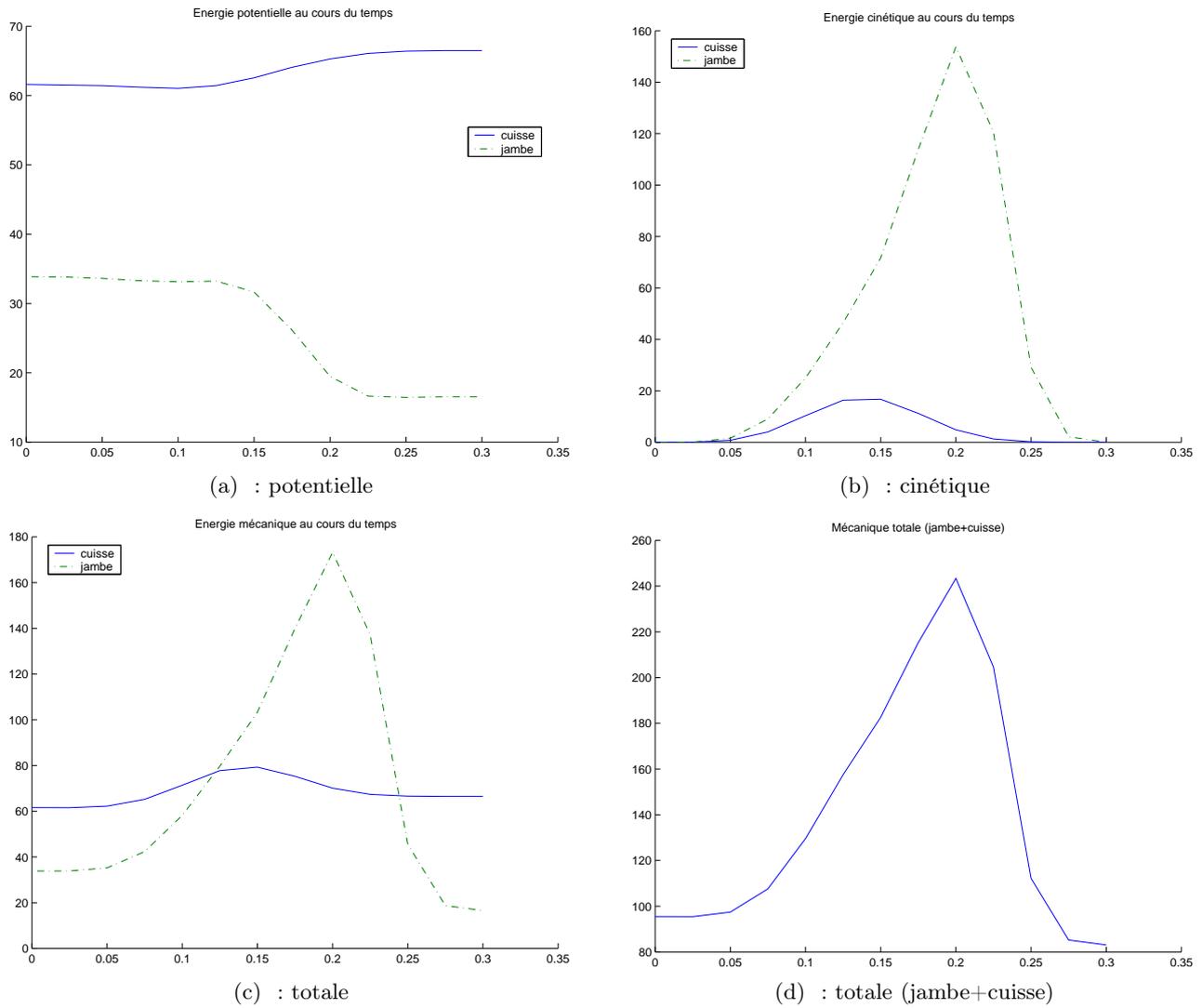


FIGURE 8.1. Diverses énergies au cours du temps

Chute libre

On pourra aussi consulter l'annexe A qui contient les principales formules de la chute libre, ainsi que le chapitre 8 du document de cours [Bas15b].

On pourra aussi consulter le chapitre 4 de [Bas15a].

CORRECTION DE L'EXERCICE 9.1.

Avant de commencer les calculs, on pourra étudier l'exemple interactif, donné sous Géogebra (attendre que la feuille qui apparaît devienne interactive) :

<http://tube.geogebra.org/student/m84210>

Pour toute la suite, on s'intéresse au mouvement du centre de gravité du système étudié.

On se place dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, le point O correspondant à la position initiale du solide étudié (à $t = 0$). Attention, les coordonnées du point étudié sont donc notés x et y et non z comme dans l'énoncé !

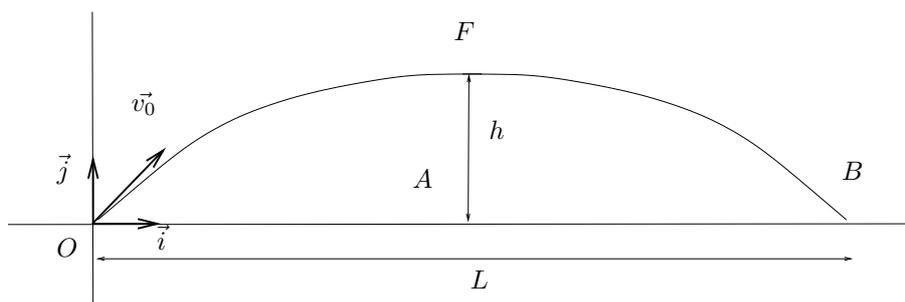


FIGURE 9.1. Les conventions adoptées.

On appelle g la constante de gravité, v_0 la norme de la vitesse initiale, qui fait un angle α avec le vecteur \vec{i} . Voir la figure 9.1.

- (1) Voir graphique 9.1.
- (2) On écrit la seconde loi de Newton au corps étudié (de masse m) (qui est la balle de golf), qui n'est soumis qu'à son propre poids $\vec{p} = m\vec{g}$. Notons \vec{a} l'accélération du centre de gravité du corps étudié. On a donc

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

ce qui implique

$$\vec{a} = \vec{g} \tag{9.1}$$

et donc en projetant en \vec{i} et sur \vec{j} , on obtient les équations (A.1a) page 55 et (A.1b) de l'annexe A.

$$a_x(t) = 0, \tag{9.2a}$$

$$a_y(t) = -g, \tag{9.2b}$$

où a_x et a_y désigne l'abscisse et l'ordonnée de l'accélération du centre de gravité du corps étudié. Ces équations ont déjà été vue dans le TD 3! Le premier mouvement (en x) correspond à un mouvement

à accélération nulle (voir equation (3.1) page 16). Le second mouvement (en y) correspond à un mouvement à accélération constante (voir equation (3.4) page 17), où $a = -g$. Il suffit donc de recopier ces équations en remplaçant a par $-g$ et v_0 respectivement par $v_{0,x}$ et $v_{0,y}$:

$$\begin{aligned} a_x(t) &= 0, \\ a_y(t) &= -g, \\ v_x(t) &= v_{0,x}, \\ v_y(t) &= -gt + v_{0,y}, \\ x(t) &= v_{0,x}t + x_0, \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,y}t + y_0. \end{aligned}$$

Ici x_0 et y_0 correspondent aux conditions initiales. On remarque qu'à $t = 0$, x vaut x_0 et y vaut y_0 . On choisit le repère qui coïncide avec la position de la masse étudiée à $t = 0$ de sorte que $x_0 = y_0 = 0$.

Enfin, $v_{0,x}$ et $v_{0,y}$ sont les composantes en x et en y de la vitesse initiale, de norme v_0 et d'angle α avec l'horizontale. On obtient donc les équations (3.1) et (3.4) :

$$a_x(t) = 0, \tag{9.3a}$$

$$a_y(t) = -g, \tag{9.3b}$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \tag{9.3c}$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha, \tag{9.3d}$$

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t, \tag{9.3e}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \tag{9.3f}$$

Les deux dernières équations sont dites paramétriques (ou dans notre cas particulier où le paramètre est le temps, on parle aussi d'équations horaires) ; elles fournissent x et y en fonction du paramètre t .

REMARQUE 9.1. On peut retrouver ces équations autrement en intégrant directement l'équation "vectorielle" (9.1) : l'intégration du vecteur \vec{a} fournit la vitesse \vec{v} et l'intégration du vecteur constant \vec{g} donne $\vec{g}t + \vec{v}_0$, où \vec{v}_0 est le vecteur vitesse à l'instant $t = 0$:

$$\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0. \tag{9.4}$$

Le vecteur vitesse \vec{v} se décompose en \vec{i} et \vec{j} sous la forme

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

De même, le vecteur \vec{g} se décompose en \vec{i} et \vec{j} sous la forme

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

À $t = 0$, les composantes de \vec{v}_0 sont $v_0 \cos \alpha$ et $v_0 \sin \alpha$ et donc

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

On obtient donc en projetant (9.4) sur \vec{i} et \vec{j} et en utilisant (9.5), (9.6) et (9.7),

$$v = v_0 \cos \alpha \text{ et } y = -gt + v_0 \sin \alpha$$

ce qui est exactement les équations (9.3c) et (9.3d). De même, en intégrant (9.4) et en écrivant que l'intégrale de \vec{v} est le vecteur déplacement \overrightarrow{OM} , qui se décompose en \vec{i} et \vec{j} sous la forme

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0t + \overrightarrow{OM}_0,$$

ce qui fournit (9.3e) et (9.3f).

◇

On cherche maintenant une équation cartésienne sous la forme $y = f(x)$: pour cela, on cherche à éliminer t au profit de $x(t)$ dans l'équation (9.3e). On vérifie avec les valeurs numériques que

$$v_0 \cos \alpha \neq 0. \quad (9.8)$$

Dans ce cas, on peut exprimer t en fonction de $x(t)$:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (9.9)$$

On substitue cette valeur dans (9.3f) :

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

et donc, on retrouve l'équation (A.2) de l'annexe A.

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x. \quad (9.10)$$

Application numérique :

Dans l'énoncé, on donne $g = 9.81$, $v_0 = 144 \text{ kmh}^{-1} = 40 \text{ ms}^{-1}$ et les lignes trigonométriques de α . Après calcul, on obtient

$$y(x) = -\frac{327}{80000} x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} x \quad (9.11)$$

soit

$$y(x) = -0.0040875x^2 + 0.5773503x \quad (9.12)$$

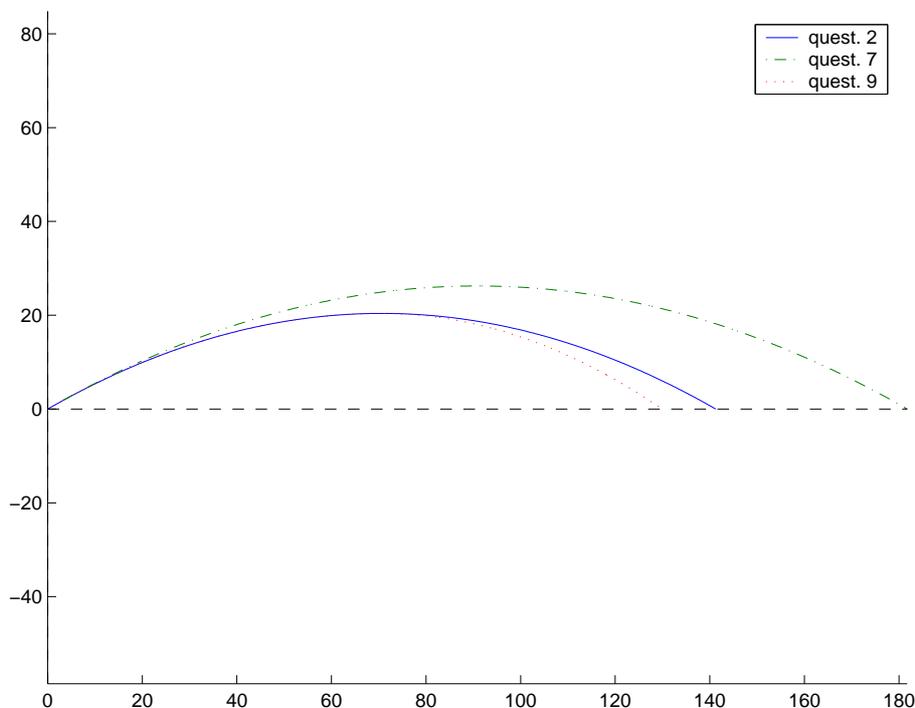


FIGURE 9.2. Les trajectoires des questions 2, 7 et 9.

Voir graphiques 9.1 page 41 et 9.2 page précédente.

- (3) C'est une parabole : voir graphiques 9.1 page 41 et 9.2 page précédente. On peut aussi s'aider en remarquant que cette parabole :
- est tangente à la vitesse \vec{v}_0 à l'origine, qui fait un angle α avec l'horizontale ;
 - passe par l'origine ;
 - passe par le point de coordonnées $(L/2, h)$ (voir valeurs numériques (9.14) et (9.17))
 - passe par le point de coordonnées $(0, L)$ (voir valeurs numériques (9.14)).
- (4) Notons, comme sur la figure 9.1 page 41, L la distance horizontale parcourue, c'est-à-dire l'abscisse correspondant à y nul. On cherche donc $L = x$ la valeur correspondant à $y = 0$. D'après (9.10), on a donc :

$$\begin{aligned} 0 = y &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x, \\ &= x \left(-\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul ; on a donc deux solutions :

- soit $x = 0$, ce qui donne l'origine du mouvement, solution physiquement acceptable, mais ce n'est pas celle que l'on cherche !
- soit

$$-\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha = 0$$

ce qui donne successivement

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x &= -\tan \alpha \iff \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x = \tan \alpha, \\ &\iff gx = 2 \tan \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha, \\ &\iff x = 2 \frac{\tan \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}, \\ &\iff x = 2 \frac{\sin \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha g}, \\ &\iff x = 2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha v_0^2}{g}, \end{aligned}$$

et puisque $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$

$$\iff x = \frac{\sin(2\alpha) v_0^2}{g}$$

Bref, on retrouve l'équation (A.3) de l'annexe A : cette distance vaut L :

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad (9.13)$$

Application numérique :

Après calcul, on obtient

$$L = 141.2478 \text{ m} \quad (9.14)$$

- (5) Au sommet de la parabole (à la "flèche"), la composante verticale de la vitesse est nulle ; avant, elle est positive, après, elle est négative. On a donc

$$v_y(t) = 0.$$

Déterminons donc le demi-temps de vol t (temps pour parcourir la partie de la parabole de 0 à F , la flèche) : d'après (9.3d), on a donc

$$0 = v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha$$

et donc

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (9.15)$$

On remarque que l'on retrouve bien la valeur de t_2 donnée par (A.5). On réinjecte cette valeur dans (9.3f) et on trouve :

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right),$$

soit

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} \frac{gv_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}, \\ &= -\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}, \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} \left(-\frac{1}{2} + 1\right), \end{aligned}$$

et donc

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (9.16)$$

On remarque que l'on retrouve bien la valeur de h donnée par (A.4).

Application numérique :

Après calcul, on obtient

$$h = 20.3874 \text{ m} \quad (9.17)$$

- (6) D'après la question 5, à la flèche, v_y est nul. Ainsi \vec{v} est purement horizontale. De plus, sa norme v est égale à v_x , égale à (voir (9.3c))

$$v = v_x = v_0 \cos \alpha.$$

Bref,

$$\vec{v} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application : } & F \\ \text{Norme : } & v_0 \cos \alpha \\ \text{Direction : } & \text{horizontale} \\ \text{Sens : } & \text{droite} \end{cases} \quad (9.18)$$

Application numérique :

Après calcul, on obtient

$$\vec{v} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application : } & F \\ \text{Norme : } & 34.64102 \text{ ms}^{-1} \\ \text{Direction : } & \text{horizontale} \\ \text{Sens : } & \text{droite} \end{cases} \quad (9.19)$$

- (7) La balle passe par le point M de coordonnées données par

$$x = 180, \quad y = 2. \quad (9.20)$$

Autrement dit, l'équation (9.10) est valable en ce point ; il faut changer v_0 en v_i , la nouvelle norme de la vitesse, *a priori*, plus grande que v_0 .

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_i^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x.$$

On en déduit successivement

$$\begin{aligned} y - \tan \alpha x &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_i^2 \cos^2 \alpha} x^2, \\ \Leftrightarrow v_i^2 (y - \tan \alpha x) &= -\frac{1}{2} \frac{g}{\cos^2 \alpha} x^2, \\ \Leftrightarrow v_i^2 &= \frac{1}{2} \frac{g}{(-y + \tan \alpha x) \cos^2 \alpha} x^2, \end{aligned}$$

Si

$$-y + \tan \alpha x < 0$$

cette équation n'a pas de solution. Si

$$-y + \tan \alpha x > 0$$

on obtient donc

$$v_i = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{g}{(-y + \tan \alpha x) |\cos \alpha|} |x|}. \quad (9.21)$$

Application numérique : on utilise (9.20)

$$v_i = 45.3738 \text{ ms}^{-1} \quad (9.22)$$

ce qui est supérieur à la vitesse initiale de 40 ms^{-1} .

Voir la nouvelle parabole sur la figure 9.2.

Les fluides

Voir le chapitre 9 de [Bas15b].

CORRECTION DE L'EXERCICE 10.1.

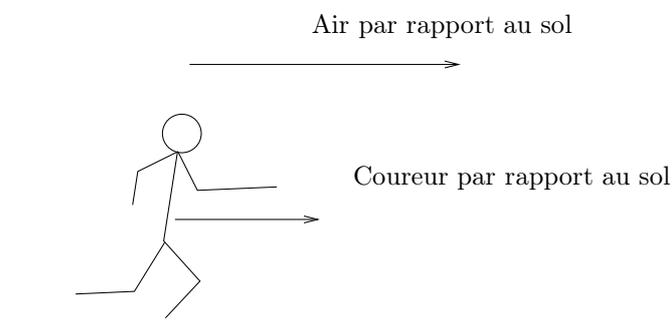


FIGURE 10.1. le coureur et l'air.

On suppose que le coureur se déplace vers la droite de la figure et que le vent est orienté algébriquement de façon positive vers la droite (voir figure 10.1).

D'après la formule (9.85b) page 69 du cours [Bas15b], en admettant que dans les trois situations, C_T , S et d ne varient pas, il suffit donc de s'intéresser à la dépendance de F_T par rapport à la vitesse V^2 . La force de traînée est dans le même sens que $V = V_{\text{fluide/corps}}$, la vitesse du fluide par rapport au corps et sa norme est proportionnelle à $|V|^2$ (que l'on peut laisser en kmh^{-1}). Reprenons les notations de la section 9.5.3 du cours [Bas15b] et notamment, celles de l'exemple 9.33. On a de façon algébrique

$$V = V_{\text{fluide/corps}} = V_{\text{vent/corps}} = V_{\text{vent/sol}} + V_{\text{sol/corps}} = V_{\text{vent/sol}} - V_{\text{corps/sol}} = V_{\text{vent/sol}} - V_{\text{coureur/sol}}$$

d'où

$$V = -V_{\text{coureur/sol}} + V_{\text{vent/sol}}$$

On a donc

- (1) Quand l'air est calme, on a $V_{\text{coureur/sol}} = 16.1 \text{ kmh}^{-1}$ et $V_{\text{vent/sol}} = 0$; d'où :

$$V = -16.1 = -16.1 \text{ kmh}^{-1}.$$

La force de traînée est donc orientée vers la gauche de la figure (et s'oppose à la progression du coureur).

- (2) On a $V_{\text{coureur/sol}} = 12.9 \text{ kmh}^{-1}$ et $V_{\text{vent/sol}} = 3.2 \text{ kmh}^{-1}$, car il va dans le même sens que le coureur, vers la droite; d'où :

$$V = -12.9 + 3.2 \text{ kmh}^{-1} = -9.7 \text{ kmh}^{-1}.$$

La force de traînée est donc orientée vers la gauche de la figure (et s'oppose à la progression du coureur). La force de traînée voit son action diminuée par le fait que le vent est arrière !

- (3) On a $V_{\text{coureur/sol}} = 11.3 \text{ kmh}^{-1}$ et $V_{\text{vent/sol}} = -3.2 \text{ kmh}^{-1}$, car il va dans le même sens opposé au coureur, vers la gauche; d'où :

$$V = -11.3 - 3.2 \text{ kmh}^{-1} = -14.5 \text{ kmh}^{-1}.$$

La force de traînée est donc orientée vers la gauche de la figure (et s'oppose à la progression du coureur). La force de traînée voit son action augmentée par le fait que le vent est de face !

Le cas où la force de traînée est la plus grande est donc le dernier cas (norme la plus importante).

REMARQUE 10.1. Supposons que l'on ait un vent arrière de 20 kmh^{-1} et que la vitesse du coureur soit de $V_{\text{coureur/sol}} = 11.3 \text{ kmh}^{-1}$. Dans ce cas, $V_{\text{coureur/sol}} = 11.3 \text{ kmh}^{-1}$ et $V_{\text{vent/sol}} = 20 \text{ kmh}^{-1}$, car il va dans le même sens opposé au coureur, vers la gauche; d'où :

$$V = -11.3 + 20 \text{ kmh}^{-1} = 8.7 \text{ kmh}^{-1}.$$

La force de traînée est donc orientée vers la droite gauche de la figure et aide la progression du coureur !

CORRECTION DE L'EXERCICE 10.2.

(1)

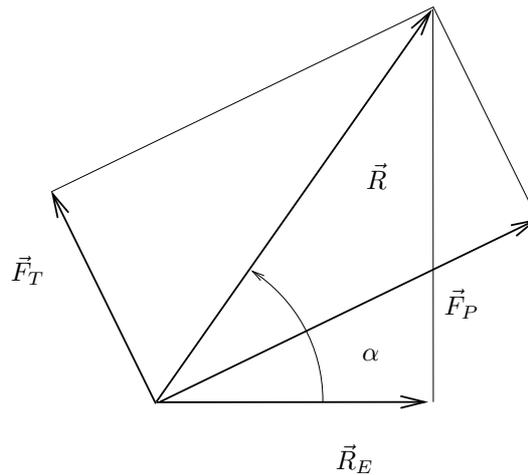


FIGURE 10.2. Les forces de portance \vec{F}_P et de traînée \vec{F}_T sur la main, la résultante \vec{R} et la composante efficace \vec{R}_E .

- (a) Voir la figure 10.2. D'après le chapitre 9 de [Bas15b], la force de traînée est portée par tangente à trajectoire (puisque dans le sens de la vitesse relative entre la main et l'eau) et dans sens opposé à la vitesse; la force de portance est perpendiculaire à cette dernière et des hautes pressions vers les basses pressions. Dans le plan de la main, on a

$$\vec{R} = \vec{F}_P + \vec{F}_T \quad (10.1)$$

et donc d'après le théorème de Pythagore

$$R = \sqrt{F_P^2 + F_T^2} \quad (10.2)$$

En projetant sur l'horizontale, on a ensuite

$$R_E = R \cos \alpha \quad (10.3)$$

Par exemple, pour la position 1, on a

$$R = \sqrt{F_P^2 + F_T^2} = \sqrt{11.1^2 + 17.1^2} = 20.387 \text{ N},$$

et

$$R_E = R \cos \alpha = 20.387 \times \left(\frac{106.5}{180} \times \pi \right) = -5.790 \text{ N}.$$

Voir tous les résultats dans le tableau 10.1.

Positions	Norme R	composante R_E	rapport F_T/F_P
1	20.387	-5.790	0.649
2	50.574	17.629	0.635
3	51.653	31.444	1.808
4	70.512	60.441	1.446
5	94.063	86.064	1.040

TABLE 10.1. Forces R et R_E et rapport F_T/F_P

REMARQUE 10.2. L'égalité (10.2) ne peut permettre de tracer \vec{F}_P et \vec{F}_T , car cette égalité a lieu dans le plan de la main et ne se projette pas dans le plan sagittal. On a représenté en fait, les projections de ces forces sur le plan sagittal!

- (b) Traçons maintenant en chaque position, les vecteurs \vec{F}_P , \vec{F}_T et \vec{R}_E .

Par exemple, pour la position 1, on sait que \vec{F}_P est orthogonale à la vitesse et est dirigée des hautes vers les basses pressions. On admet que les hautes pressions sont sous la main du nageur. On peut ensuite tracer \vec{F}_T , orthogonal à la force précédente et dirigée dans le sens du vecteur vitesse. Enfin, on peut tracer \vec{R}_E , dirigée selon l'horizontale et vers l'arrière (quantité négative).

Voir figure 10.3 page suivante.

- (c) Commentaire succinct :

ce qui porte dans le mouvement, c'est F_E ! toujours vers l'arrière sauf quand la main pénètre dans l'eau ; dans ce cas seulement, les forces de résistance de l'eau freine le mouvement. Dans les autres cas, elles propulsent le nageur vers l'avant ! c'est normal : le nageur prend appuis sur l'eau.

Imaginez de même un soldat qui rampe sur le sol, qui le freine et même temps lui permet de progresser !

- (2) Voir les valeurs numériques de F_T/F_P dans le tableau 10.1.

CORRECTION DE L'EXERCICE 10.3.

Étudions les effet d'une rotation arrière¹. Une rotation de la balle vers l'arrière va provoquer une différence de vitesse entre les molécules d'air accrochées à la balle. La couche limite inférieure s'opposant à l'écoulement relatif de l'air qui passe au dessus de la balle, ces molécules d'air auront une vitesse plus faible que les molécules d'air de la partie supérieure qui vont se déplacer dans le même sens que l'écoulement relatif de l'air. D'après le principe de Bernoulli, les hautes pressions seront donc sous la balle. Ainsi une zone de haute pression se crée sur la partie inférieure de la balle et une zone de basse pression sur la partie supérieure. Cette différence de pression entraîne la création d'une force de portance dirigée des zones de hautes vers les basses pression,

1. Ici, si la balle était posée sur une table, la rotation arrière l'entraînerait vers l'arrière, c'est-à-dire vers la gauche ; on parle aussi de rotation dans le sens trigonométrique.

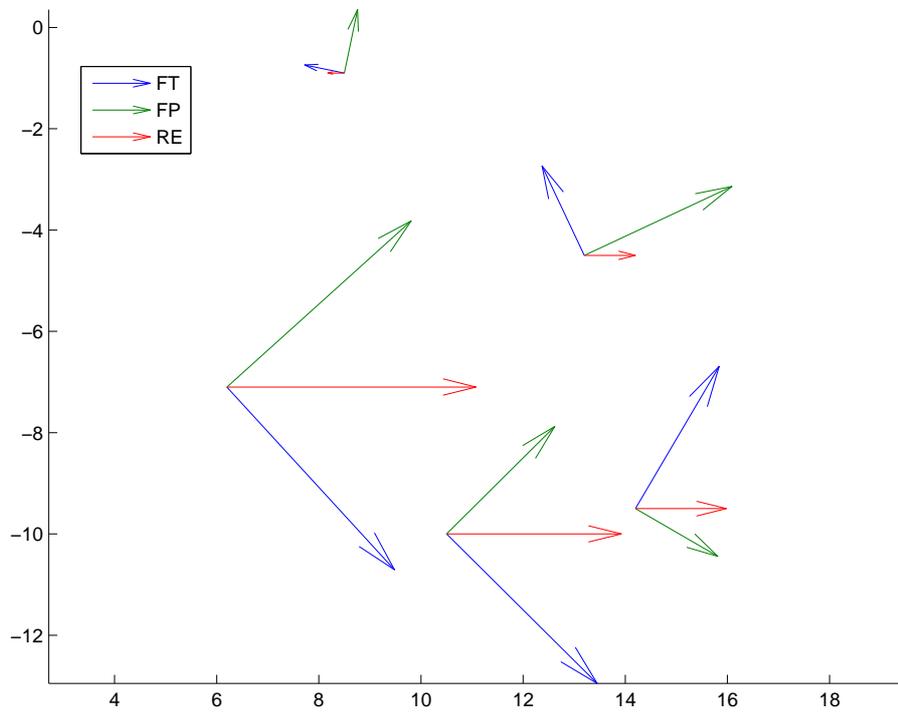


FIGURE 10.3. Les forces de portance \vec{F}_P et de traînée \vec{F}_T sur la main et la composante efficiente \vec{R}_E pour les cinq positions.

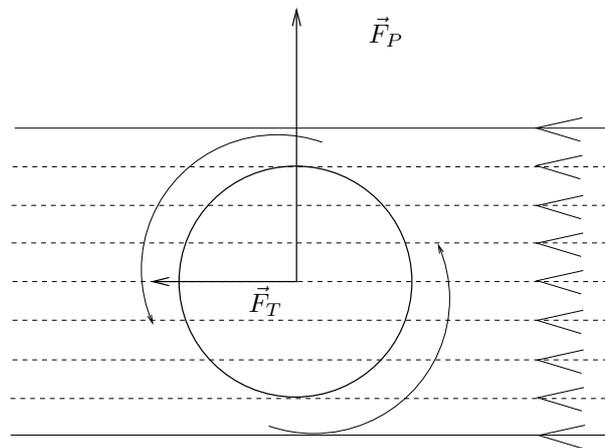


FIGURE 10.4. Une balle avec une rotation "arrière" (ici dans le sens trigo).

c'est-à-dire, ici vers le haut. D'autre part, la force de traînée est dirigée vers l'arrière. La résultante est donc orientée vers le haut et il en résulte que la trajectoire de la balle, au lieu d'être une parabole exacte, est une courbe, "plus haute."

Un autre exemple, celui de la rotation due au "coupé" du tennis, qui provoquerait aussi une rotation arrière de et donc une parabole "haute" et donc une trajectoire "moins directe". L'effet contraire est donné par

un "lifté". Dans le cas du tennis (lifté ou coupé), le rebond de la balle est en outre différent du rebond d'une balle sans effet !

CORRECTION DE L'EXERCICE 10.4.

Cet exercice a été donné lors du CT de juin 2014 avec des valeurs numériques différentes et des questions supplémentaires. On renvoie au site habituel sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html> ou plus précisément sur

- <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CTcorL2biomecaP14.pdf>
- <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CTL2biomecaP14.pdf>

Notons

- $H = 20$ m, la profondeur de l'amphore ;
- $M = 13$ kg, sa masse ;
- $V = 3$ l, son volume ;
- $V_0 = 15$ l, le volume du parachute de relevage ;

- (1) On rappelle que la définition de ma masse apparente d'un objet a été vue en cours dans l'exemple 9.22. On a la règle des plongeurs, valable dans le cas où la masse volumique de l'eau de mer égale à 1 kg/l, avec des masse en kg et des volumes en l. :

$$\mathcal{M} = M - V. \quad (10.4)$$

Ici, on a donc

$$\mathcal{M} = 13 - 3,$$

soit

$$\mathcal{M} = 10 \text{ kg}. \quad (10.5)$$

- (2) Le volume d'air à introduire doit être tel que la masse apparente du système {amphore+parachute} soit nulle, c'est-à-dire

$$0 = \mathcal{M}_t = \mathcal{M}_p + \mathcal{M}_a, \quad (10.6)$$

où \mathcal{M}_p est la masse apparente du parachute et \mathcal{M}_a celle de l'amphore. On néglige la masse du parachute et on suppose que son volume intérieur est égal au volume extérieur (parois d'épaisseur nulle). On a donc

$$\mathcal{M}_p = M_{\text{air}} - V_{\text{air}},$$

qui devient en écrivant que la masse volumique de l'air μ vaut $M_{\text{air}}/V_{\text{air}}$:

$$\mathcal{M}_p = V_{\text{air}} (\mu - 1).$$

On a donc

$$M - V + V_{\text{air}} (\mu - 1) = 0 \quad (10.7)$$

et donc

$$V_{\text{air}} = \frac{M - V}{1 - \mu}. \quad (10.8)$$

Il est dit que la masse volumique de l'air est négligeable devant celle de l'eau. Ainsi, on écrit

$$1 - \mu \approx 1 \quad (10.9)$$

et (10.8) donne donc

$$V_{\text{air}} = M - V. \quad (10.10)$$

Numériquement, on a

$$V_{\text{air}} = 10 \text{ l}. \quad (10.11)$$

On vérifie que ce volume est bien inférieur au volume $V_0 = 15$ du parachute.

REMARQUE 10.3. À une profondeur h , d'après (10.7), La masse apparente de l'ensemble {amphore+parachute} est égale à

$$\mathcal{M}_t(h) = M - V + V_{\text{air}}(\mu - 1), \quad (10.12)$$

ici approchée par

$$\mathcal{M}_t(h) = M - V - V_{\text{air}}. \quad (10.13)$$

Cette masse est nulle pour $h = H$. Quand h diminue, la pression diminue et la loi de Mariotte implique que le volume de l'air vaut augmenter, jusqu'à atteindre la volume du parachute (voir question 3). Ainsi, $\mathcal{M}_t(h)$ diminuera, en étant négative. Ainsi, la force du parachute de levage sera de plus en plus importante.

- (3) En remontant, le parachute va commencer à fuir quand le volume $V_{\text{air}}(h)$ sera égal à V_0 . On écrit la loi de Mariotte qui donne, à une profondeur quelconque h :

$$P(h)V(h) = P(H)V(H),$$

et donc

$$V(h) = \frac{P(H)V(H)}{P(h)}. \quad (10.14)$$

On sait que

$$P(h) = ah + P_0, \quad (10.15)$$

où $P_0 = 1$ et $a = 0.1$. On a donc, selon (10.14),

$$V(h) = \frac{(aH + P_0)V(H)}{ah + P_0}. \quad (10.16)$$

Déterminons h tel que ce volume soit V_0 . On résoud

$$\frac{(aH + P_0)V(H)}{ah + P_0} = V_0,$$

soit encore

$$\frac{ah + P_0}{(aH + P_0)V(H)} = \frac{1}{V_0}$$

soit encore

$$ah + P_0 = \frac{(aH + P_0)V(H)}{V_0}$$

soit encore

$$h = \frac{1}{a} \left(\frac{(aH + P_0)V(H)}{V_0} - P_0 \right) \quad (10.17)$$

où $V(H)$ est donné par (10.10), soit

$$h = \frac{1}{a} \left(\frac{(aH + P_0)(M - V)}{V_0} - P_0 \right) \quad (10.18)$$

Numériquement

$$h = 10 \text{ m} \quad (10.19)$$

REMARQUE 10.4. La masse apparente de l'ensemble {amphore+parachute} est toujours donnée par (10.13), soit encore puisque $V_{\text{air}} = V_0$

$$\mathcal{M}_t(h) = M - V - V_0, \quad (10.20)$$

et est donc constante et égale à

$$\mathcal{M}_t = -5 \text{ kg}. \quad (10.21)$$

REMARQUE 10.5. Reprenons ce qu'il se passe si on considère maintenant que la masse volumique non négligeable devant celle de l'eau de mer.

On donne la masse volumique de l'air à la surface de l'eau :

$$\mu_0 = 0.00130 \text{ kg/l} \quad (10.22)$$

- On applique la loi de Mariotte à une quantité d'air de masse m donnée, utilisée à la surface et à une profondeur h ,

$$P(h)V(h) = P_0V_0$$

où P_0 et V_0 désignent les pression et volume à la surface. D'autre part, par définition,

$$\mu(h) = \frac{m}{V(h)} \text{ et } \mu_0 = \frac{m}{V_0}$$

ainsi,

$$\frac{\mu(h)}{\mu_0} = \frac{V_0}{V(h)} = \frac{P(h)}{P_0}$$

et

$$\mu(h) = \frac{\mu_0 P(h)}{P_0}, \quad (10.23)$$

où $P(h)$ et P_0 désignent respectivement la pression à la profondeur h et à la surface de l'eau.

- Ainsi, si on considère que (comme dans le cours)

$$P(h) = ah + P_0, \quad (10.24)$$

où $P_0 = 1$ et $a = 0.1$, on a

$$\mu(h) = \frac{\mu_0 (ah + P_0)}{P_0}, \quad (10.25)$$

- Si on reprend la question 2, les équations (10.8) et (10.25) donnent donc avec $v = H$

$$V_{\text{air}} = \frac{M - V}{1 - \frac{\mu_0 (aH + P_0)}{P_0}}. \quad (10.26)$$

Numériquement, on a

$$V_{\text{air}} = 10.039153 \text{ l}, \quad (10.27)$$

ce qui n'est guère différent de (10.11).

- Si on reprend la question 3, on constate que h est donné par (10.17) où $V(H)$ est cette fois donné par (10.27). On a donc

$$h' = \frac{1}{a} \left(\frac{(aH + P_0)(V_{\text{air}})}{V_0} - P_0 \right). \quad (10.28)$$

Numériquement, on a

$$h' = 10.078305 \text{ l}, \quad (10.29)$$

ce qui n'est guère différent de (10.19).

- Les résultats établis précédemment en négligeant la masse volumique de l'air sont donc très satisfaisants. Cela ne serait peut-être pas vrai aux grandes profondeurs où la masse volumique de l'air peut être beaucoup plus importante!
- À une profondeur $h \geq h'$, d'après (10.8), La masse apparente de l'ensemble {amphore+parachute} est donnée par à (10.12) où $V_{\text{air}} = V_0$ et μ est donné par (10.25). On a donc

$$\mathcal{M}_t(h) = M - V + V_0 \left(\frac{\mu_0 (ah + P_0)}{P_0} - 1 \right). \quad (10.30)$$

Pour $h = 0$, on a donc

$$\mathcal{M}_t = -4.980500 \text{ kg}, \quad (10.31)$$

ce qui n'est guère différent de (10.21). Le plongeur devra se méfier. De nulle, la masse apparente est passée à cette valeur et cela peut le faire remonter trop rapidement !

Rappels des formules principales de la chute libre

On se place dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, le point O correspondant à la position initiale du solide étudié (à $t = 0$).

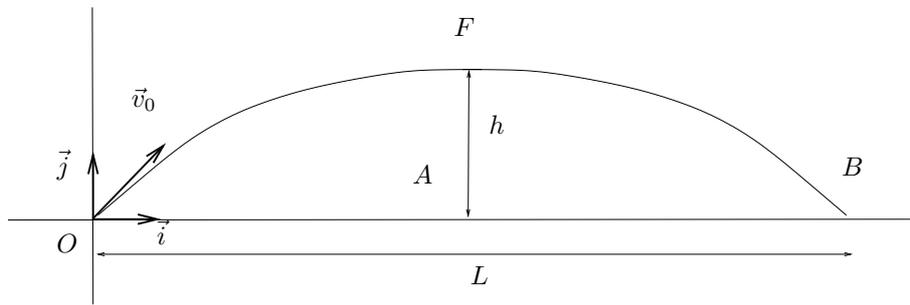


FIGURE A.1. Les conventions adoptées.

On appelle g la constante de gravité, v_0 la norme de la vitesse initiale, qui fait un angle α avec le vecteur \vec{i} . Voir la figure A.1.

- Équations paramétriques de la chute libre (le paramètre est le temps t) :

$$a_x(t) = 0, \quad (\text{A.1a})$$

$$a_y(t) = -g, \quad (\text{A.1b})$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (\text{A.1c})$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha, \quad (\text{A.1d})$$

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad (\text{A.1e})$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \quad (\text{A.1f})$$

- Équation cartésienne de la paraboles (valables si $\cos \alpha \neq 0$, c'est-à-dire si α n'est pas égal à $\pi/2$ ou un de ses multiples impairs)

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x. \quad (\text{A.2})$$

- Longueur L (portée horizontale, distance OB) :

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad (\text{A.3})$$

- hauteur h (distance FA , où F est la flèche de la parabole)

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (\text{A.4})$$

- demi-temps de vol t_2 (temps pour parcourir la partie de la parabole de 0 à F) :

$$t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (\text{A.5})$$

Annexe B

Quelques références

Voir les références en bibliographie (page 194).

On pourra, entre autres, consulter :

- un ouvrage très ludique et néanmoins rigoureux [**Pie07**] (on pourra en particulier consulter les chapitre 7 et 10 à 13) ; aussi sur le web <http://www.piednoir.com/index.html> On pourra aussi consulter, dans le même esprit, [**Gla15**] ;
- très bon ouvrage, complet et proche des exigences de ce cours [**LM07**] ;
- très vulgarisateur (moins complet que le précédent) [**Bla06**] ;
- sur le muscle (très détaillé) [**GLC03**] ;
- ainsi, qu'en guise de révision ou de remise à niveau ce qui a été donné lors de la semaine de remise à niveau en tutorat de L2 [**Bas15a**].

Bibliographie

- [Bas15a] Jérôme Bastien. *Biomécanique du mouvement*, 2015. Tutorat de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca.
- [Bas15b] Jérôme Bastien. *Biomécanique du mouvement*, 2015. Notes de cours de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca.
- [Bla06] Thierry Blancon. *La physique et la mécanique à l'usage de la pratique sportive : formation initiale-formation continue*, volume Dossiers EPS, 69. Revue EP.S, 2006. disponible à la BU de Lyon I sous la cote 612.7 BLA.
- [Gla15] Max Glaskin. *Cyclisme & science : comment fonctionne le couple homme-machine ?* Vigot, 2015. Traduit de l'anglais par Jean-Pascal Bernard ; titre original Cycling science. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 796.6 GLA, 2 ième étage).
- [GLC03] Francis Goubel et Ghislaine Lenseil-Corbeil. *Biomécanique : éléments de mécanique musculaire*. Collection STAPS. Masson, 2003. disponible à la BU de Lyon I sous la cote 612.74 GOU.
- [LM07] Romuald Lepers et Alain Martin. *Biomécanique, cours et exercices corrigés*. Ellipses, 2007. disponible à la BU de Lyon I sous la cote 612.7 LEP.
- [Pie07] François Piednoir. *Pédaler intelligent, La biomécanique du cycliste*. Fédération Française de Cyclotourisme, 2007. voir le web : <http://www.piednoir.com/index.html>.