Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 2 (Semestre 4)

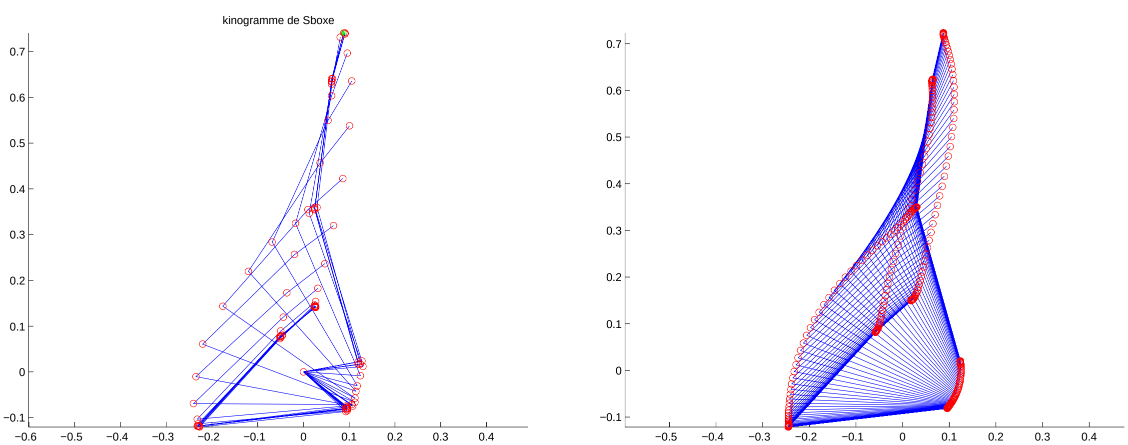
3LTC4
19 mars 2008

Corrigé de l'examen CCF1 de Biomécanique du mouvement

Correction de l'exercice 1 (Étude d'un kinogramme)**.**

(1) (a) Le traitement qui a permis l'obtention du kinogramme brut (figure 1(a)) est le suivant :

- **Phase d'acquisition** : il faut
  - Placer des capteurs au niveau des articulations étudiées : soit l'épaule, le coude, le poignet et l'extrémité distale de la main repliée.
  - Puisque la norme est PAL/SECAM, la fréquence d'acquisition est de 25 Hz.
  - Préciser le plan par rapport auquel on filme : Ici, il s'agit du plan transverse
- **Phase de digitalisation** : on détermine grâce aux images enregistrées les coordonnées des capteurs au cours du temps. On dispose donc d'un fichier contenant ces coordonnées (généralement aux format `txt` ou `xls` ; voir tableau 6 page 11 fournis dans l'énoncé).
- **Phase de modélisation** : on relie les points représentant les articulations par des segments, supposés étre rigide et indéformables.



(a) : Kinogramme brut

(b) : Kinogramme reconstitué

FIG. 1. Kinogramme du mouvement de boxe reconstitué

(b) Le kinogramme est constitué de 20 images, ce qui correspond à 19 intervalles de temps, chacun d'entre eux étant de durée de $1/f = 1/25$ s, soit encore une durée de temps de

$$\boxed{\Delta t = 19/25 = 0.76 \text{ s}} \tag{1}$$

(c) Le kinogramme reconstitué (figure 1(b)) est composé de 96 images. Ainsi, il y a 95 intervalle de temps, chacun d'entre eux étant de durée de $1/f'$. On a donc, grâce à l'équation (1), $\Delta t = 95/f'$, soit

$$\boxed{f' = 95/\Delta t = 125 \text{ Hz}} \tag{2}$$

(2) Si le mouvement est supposé se dérouler dans le plan transverse $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la composante verticale, selon $0\vec{k}$, de l'accélération du membre supérieur est donc nulle. La RFD donne

$$\sum \vec{F}_e = m\vec{a}_G,$$

où m est la masse du membre supérieur, $\vec{a}_G$ est l'accélération du centre de gravité du membre supérieur et $\sum \vec{F}_e$ la somme des forces exctérieures, qui sont réduites au poids $\vec{p}$ et à la réaction du membre supérieur à l'épaule $\vec{R}$. Cela fournit trois équations, sur chacun des axes $0\vec{i}$, $0\vec{j}$ et $0\vec{k}$:

$$R_x = ma_x, \tag{3a}$$

$$R_y = ma_y, \tag{3b}$$

$$R_z - mg = ma_z = 0. \tag{3c}$$

et donc

$$\boxed{R_z = mg} \tag{4}$$

que l'on ne peut calculer car la masse du membre supérieure n'était pas fournie dans l'enoncé.

Une réponse du type

$$\boxed{R_x = ma_x} \tag{5a}$$

$$\boxed{R_y = ma_y} \tag{5b}$$

$$\boxed{R_z - mg = ma_z = 0} \tag{5c}$$

sera aussi comptée juste.

Remarque 1. Si on donne le rapport masse membre supérieur/masse totale= 0.050, on en déduit

$$m = 0.050 \times 76 = 3.8 \text{ kg} \tag{6}$$

ce qui donnerait

$$\boxed{R_z = 38 \text{ N}} \tag{7}$$

Pour toute la suite, d'après cette question, le poids du bras n'intervient plus ! Les vecteurs auront systématiquement deux composantes dans le plan $\left(\mathbf{0}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\right)$.

(3) Pour déterminer les longueurs du bras et de l'avant-bras, on utilise non pas les données anthropométrique de Winter non fournies ici, mais les normes des vecteurs. Par exemple pour l'image 1, les coordonnées de l'épaule sont $(x_E, y_E) = (0.0955, -0.0811)$ et celles du coude $(x_C, y_C) = (-0.2450, -0.1212)$ ce qui fournit une longueur du bras égale à

$$\boxed{l_b = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2} = 0.3428 \text{ m}} \tag{8}$$

De même, pour l'avant bras, on obtiendrait :

$$\boxed{l_b = \sqrt{(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2} = 0.2757 \text{ m}} \tag{9}$$

Si les données anthropométriques de Winter étaient données sous la forme du tableau 1, on pourrait trouver

bras	0.1860
avant-bras	0.1460
main	0.0540

Tab. 1. rapport des longueurs de chaque segment sur la taille du sujet

les longueurs prévues, puisque la taille du sujet étaint fournie (1.86 m), en divisant approximativement la taille de la main repliée par deux. Voir tableau 2 Voir tableau 3. On observe peu de différence ! ◇

bras	0.3460
avant-bras	0.2716
main	0.1004

Tab. 2. Longueurs de chaque segment prévues par Winter

bras	0.3428
avant-bras	0.2757
main	0.1021

Tab. 3. longueurs mesurées

(4) Considérons maintenant le membre supérieur à la première image pour laquelle l'accélération du centre de gravité est supposée nulle. Le membre supérieur n'est soumis qu'à la réaction $\vec{R}$ à l'épaule (le poids n'a pas de composante sur les axes $0\vec{i}$ et $0\vec{j}$)

D'après les équations (3a) et (3b), on a

$$\boxed{R_x = R_y = 0}$$

En toute rigueur un vecteur nul n'a ni direction, ni sens ! Sa norme est nulle. On a donc :

$$\boxed{\vec{R} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{Centre de gravité du membre supérieur à l'image 1} \\ \text{Norme :} & 0 \\ \text{Direction :} & \text{non défini} \\ \text{Sens :} & \text{non défini} \end{cases}}$$

Pour le poids, on a classiquement

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{Centre de gravité du membre supérieur à l'image 1} \\ \text{Norme :} & mg \\ \text{Direction :} & \text{verticale} \\ \text{Sens :} & \text{bas} \end{cases}}$$

Une réponse du type

$$\boxed{R_x = R_y = 0, \quad R_z = 0}$$

et

$$\boxed{\vec{R} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{Centre de gravité du membre supérieur à l'image 1} \\ \text{Norme :} & mg \\ \text{Direction :} & \text{verticale} \\ \text{Sens :} & \text{haut} \end{cases}}$$

sera aussi considérée comme juste.

(5) – Pour démontrer comment ont été calculées les valeurs figurant en gras dans les tableaux 7, il faut calculer le centre de gravité du bras et de la main.

De façon générale, si on calcule les coordonnées du centre de gravité du segment $[PD]$ où P désigne l'extrémité proximale et D l'extrémité distale, on utilise les coefficients k_D ou k_P (dont la somme vaut 1) et qui sont définis par

$$k_P = \frac{GP}{PD}, \quad k_D = \frac{GD}{DP},$$

dont on déduit les deux formules équivalentes (O désigne l'origine du repère) :

$$\overrightarrow{OG} = k_P\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{OP}, \quad \overrightarrow{OG} = k_D\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{OD}.$$

Elles s'écrivent aussi sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} x_G = k_P(x_D - x_P) + x_P, \\ y_G = k_P(y_D - y_P) + y_P, \end{cases} \tag{10a}$$

$$\begin{cases} x_G = k_D(x_P - x_D) + x_D, \\ y_G = k_D(y_P - y_D) + y_D. \end{cases} \tag{10b}$$

Ces deux formules sont équivalentes puisque $k_D + k_P = 1$. Elles sont aussi équivalentes à

$$\begin{cases} x_G = k_Dx_P + k_Px_D, \\ y_G = k_Dy_P + k_Py_D. \end{cases}$$

Par exemple, pour le bras à l'image 1, on considère son extrémité distale égale au coude de coordonnées $(-0.2450, -0.1212)$ et d'extrémité proximale égale à l'épaule de coordonnées $(0.0955, -0.0811)$. On trouve le coefficient proximal $k_P = 0.436$ dans le tableau fourni 4 page 11. La formule (10a) donne :

$$\boxed{\begin{cases} x_G = 0.436 \times (-0.245 - 0.0955) + 0.0955 = -0.0529, \\ y_G = 0.436 \times (-0.1212 + 0.0811) - 0.0811 = -0.0986, \end{cases}}$$

ce qui fournit bien la case en gras du tableau 7 page 12 à l'image 1.
Pour la main à l'image 61, on procède de même.

– Pour démontrer comment ont été calculées les valeurs figurant en gras dans le tableau 8 page 12, il faut calculer le centre de gravité de l'ensemble du membre supérieur.
De façon générale, pour déterminer le centre de gravité du membre supérieur, on écrit l'une des deux formules équivalentes :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\displaystyle\sum_i m_i x_{Gi}}{M}, \\[2ex] y_G = \dfrac{\displaystyle\sum_i m_i y_{Gi}}{M}, \end{cases} \tag{11a}$$

ou

$$\begin{cases} x_G = \displaystyle\sum_i \frac{m_i}{M} x_{Gi}, \\[2ex] y_G = \displaystyle\sum_i \frac{m_i}{M} y_{Gi}, \end{cases} \tag{11b}$$

où, pour chaque i, m_i est la masse du segment i et (x_{Gi}, y_{Gi}) les coordonnées du centre de gravité du segment i et $M = \sum_i m_i$ est la somme des masses de chacun des segments. Les coefficients $\frac{m_i}{M}$ se lisent directement dans le tableau fourni 5 page 11. Par exemple, pour l'abscisse du centre de gravité à l'image 61, on obtient grâce aux données du tableau 7 page 12 à l'image 61 :

$$x_G = 0.56 \times 0.0181 + 0.32 \times (-0.0448) + 0.12 \times 0.0754,$$

soit

$$\boxed{x_G = 0.0049}$$

De même, on obtiendrait

$$\boxed{y_G = 0.1956}$$

(6)

(a) La figure 2 présente l'accélération du main en fonction du temps.
On constate qu'au milieu du mouvement, l'accélération s'annulle à peu près vers $t_0 \approx 0.45$
On constate que l'accélération est positive sur l'intervalle $[0, t_0]$ puis négative sur $[t_0, 0.76]$

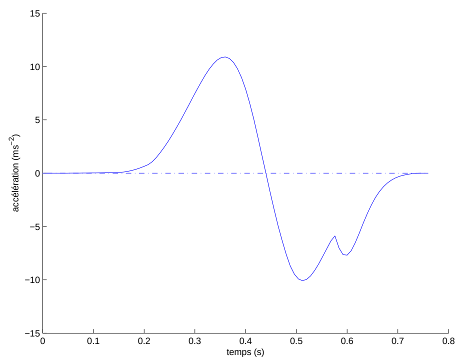


FIG. 2. Accélération du main en fonction du temps.

(jusqu'à la fin du mouvement). Ainsi la vitesse est croissante sur $[0, t_0]$ et décroissante sur $[t_0, 0.76]$. Elle est donc maximale à l'instant $t = t_0$.

Le numéro n de l'image s'obtient grâce à une équation similaire à l'équation (1)

$$\boxed{n = t_0 \times f' + 1 \approx 0.45 \times 125 + 1 = 57.25} \tag{12}$$

Remarque 2. **Deux remarques s'imposent ici !** Ici, la valeur trouvée n'est pas entière car la valeur de t_0 n'est qu'approximative car lue sur le graphique. Par le calcul, on trouve $t_0 = 0.44$ et

$$\boxed{n = t_0 \times f' + 1 = 0.44 \times 125 + 1 = 56}$$

qui est rigoureusement entière !

Par ailleurs, la valeur donnée dans l'énoncé n'était pas 0.44 mais 0.4960 et était donc erronée. Nous sommes désolés de cette erreur et prendrons une décision permettant de ne pas disqualifier les étudiants pour cette question. **Pour la suite de l'énoncé et du corrigé, on supposera que l'on travaillera avec l'image numéro 62**.

(b) Pour caractériser l'accélération du centre de gravité de la main entre les images 61 et 63, soit à l'image 62, il faut d'abord déterminer les vitesses du centre de gravité entre les images 61 et 62, puis entre les images 62 et 63. Comme en TD, on écrit que la vitesse du centre de gravité de la main entre les images 61 et 62 est égale à

$$\vec{v}_{Gm\,61,62} = f'\overrightarrow{Gm_{61}Gm_{62}}$$

où Gm_{61} et Gm_{62} désignent respectivement le centre de gravité de la main aux image 61 et 62. D'après le tableau 7, on a

$$\boxed{\vec{v}_{Gm\,61,62} = f'\begin{pmatrix} x_{Gm_{62}} - x_{Gm_{61}} \\ y_{Gm_{62}} - y_{Gm_{61}} \end{pmatrix} = 125 \times \begin{pmatrix} 0.0785 - 0.0754 \\ 0.4999 - 0.4817 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3875 \\ 2.2750 \end{pmatrix}} \tag{13}$$

De même, on obtient

$$\boxed{\vec{v}_{Gm\,62,63} = \begin{pmatrix} 0.3074 \\ 2.1672 \end{pmatrix}} \tag{14}$$

On recommence : on écrit que l'accélération du centre de gravité de la main à l'images 62

$$\vec{a}Gm\,62 = f'\left(\vec{v}_{Gm\,62,63} - \vec{v}_{Gm\,61,62}\right).$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\vec{a}_{Gm\,62} = 125 \times \begin{pmatrix} 0.3074 - 0.3875 \\ 2.1672 - 2.2750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10.0125 \\ -13.4750 \end{pmatrix}} \tag{15}$$

Comme en TD, on a

$$\boxed{\vec{a}_{Gm\,62} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{Centre de gravité de la main à l'image 62} \\ \text{Norme :} & 16.7877\,\text{ms}^{-2} \\ \text{Direction :} & 53.3861^{\text{o}} \\ \text{Sens :} & \text{gauche-bas} \end{cases}}$$

(7) Le boxeur est en équilibre stable lorsque son centre de gravité se projette dans sa surface de sustentation définie par ses appuis au sol. Il est en déséquilibre lorsque son centre de gravité se projette à l'extérieur de la surface de sustentation. Il est en équilibre instable lorsque son centre de gravité se projette à la limite de la surface de sustentation. Lorsque le boxeur projette son bras vers l'avant, son centre de gravité va également avancer. Il s'ensuit qu'il va passer de l'équilibre stable à l'équilibre instable au déséquilibre.

Afin de garder son équilibre, il peut d'une part avancer un pied vers l'avant pour agrandir la surface de sustentation ainsi que baisser son centre de gravité en fléchissant les jambes.

(8) Pour cette dernière question, le boxeur atteint sa cible à l'image 62.

(a) Pendant le choc, le boxeur exerce sur la cible une force dont les composantes sont $(166, 249)$, dans le repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Les composantes de l'accélération du centre de gravité du membre supérieur sont $(-3.800, -7.809)$.

On étudie le système composé du membre supérieur, soumis à l'action de la cible sur le membre supérieur et la réaction de l'épaule. L'action de la cible sur le membre supérieur est l'opposé de l'action du membre supérieur sur la cible, soit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -166 \\ -249 \end{pmatrix} \tag{16}$$

On a donc, après calculs :

$$\boxed{\vec{r} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{Point de contact main-cible} \\ \text{Norme :} & \sqrt{166^2 + 249^2} = 299.2608 \text{ N} \\ \text{Direction :} & \text{atan}(249/166) = 56.3099^{\text{o}} \\ \text{Sens :} & \text{bas-Gauche} \end{cases}} \tag{17}$$

La réaction de l'épaule $\vec{R} = (R_x, R_y)$ est inconnue. D'après la RFD, appliquée à l'ensemble du membre supérieur, on a donc

$$\vec{R} + \vec{r} = m\vec{a},$$

dont on tire

$$\vec{R} = m\vec{a} - \vec{r},$$

et donc

$$\boxed{\vec{R} = \begin{pmatrix} ma_x - r_x \\ ma_y - r_y \end{pmatrix}} \tag{18}$$

D'après la remarque 1 page 2, on peut calculer numériquement $\vec{R}$:

$$\boxed{\vec{R} = \begin{pmatrix} -3.8 \times 3.8 + 166 \\ -3.8 \times 7.809 + 249 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 151.5600 \text{ N} \\ 219.3258 \text{ N} \end{pmatrix}} \tag{19}$$

et donc

$$\boxed{\vec{R} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{épaule} \\ \text{Norme :} & \sqrt{219.3258^2 + 151.5600^2} = 266.5975 \text{ N} \\ \text{Direction :} & \text{atan}(219.3258/151.5600) = 55.3545^{\text{o}} \\ \text{Sens :} & \text{Haut-Droite} \end{cases}} \tag{20}$$

(b) On applique cette fois-ci la RFD au bras seul, soumis à l'action de l'épaule sur le bras, égale à $\vec{R}$ définie par 18 et à l'action de la main sur le bras $\vec{r'}$ que l'on définit comme précédemment par

$$\boxed{\vec{r'} = \begin{pmatrix} ma_x - R_x \\ ma_y - R_y \end{pmatrix}} \tag{21}$$

où a_x et a_y sont les coordonnées de l'accélération du centre de gravité du bras seul et m la masse bu bras seul.

Correction de l'exercice 2 (Étude des données cinématiques de la course pour différentes distances du 100 m au 10 000 m.)**.**

(1) Notons successivement (grandeur exprimée en USI)
- d la distance en mètre ;
- t le temps en seconde ;
- A l'amplitude en mètre ;
- f la fréquence en Herz ;
- n le nombre de foulée.

On a la relations fondamentales

$$v = \frac{d}{t}, \quad A = \frac{d}{n}, \quad v = fA \tag{22}$$

dont on tire successivement

$$\boxed{v = \frac{d}{t}}$$

$$\boxed{A = \frac{d}{n}}$$

$$\boxed{f = \frac{v}{A} = \frac{d}{t}\frac{n}{d} = \frac{n}{t}}$$

$$\boxed{n = \frac{d}{A}}$$

$$\boxed{t = \frac{d}{v}}$$

$$\boxed{d = vt}$$

On trouve donc successivement, en convertissant les données de l'énoncé en USI :

$$v = 100/9.9 \times 3.6 = 36.36 \text{ km/h}$$
$$A = 100/44.4 = 2.25 \text{ m}$$
$$f = 44.4/9.9 = 4.5 \text{ Hz}$$
$$n = 800/2.1 = 380.5$$
$$t = 1500/(25.452/3.6) = 212.1641 \text{ s} = 3 \text{ min } 32.1641 \text{ s}$$
$$d = (22.716/3.6) \times (13 \times 60 + 12.9) = 5000\text{m}$$

(2) Ces poulaines correspondent au déplacement de la cheville par rapport au genou. Soit C la cheville et G le genou. Déterminer les coordonnées de C dans un repère lié à G revient à déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG}$.

On obtient donc les poulaines de la figure donnée dans l'énoncé.

(3) L'impulsion est définie par $I = Ft$ où F correspond à la norme de la réaction du sol et t le temps d'application de cette force . L' impulsion est exprimée en Ns.

La différence entre le spécialiste de 100 m et celui de 10 000 concerne l'intensité de la réaction du sol. Ainsi, celle du 100 m est plus importante que celle du 10 000. Puisque l'impulsion reste constante, il s'ensuit que le temps de contact au sol est plus important pour le spécialiste de 10 000 m que celui de 100.

Ensemble des tableaux

	proximal	distal
bras	0.436	0.564
avant-bras	0.430	0.570
main	0.506	0.494

TAB. 4. Centres de masse des segments

bras	0.5600
avant-bras	0.3200
main	0.1200

TAB. 5. rapport des masses de chaque segment sur la masse du membre supérieur

	X épaule	Y épaule	X coude	Y coude	X poignet	Y poignet	X doigts	Y doigts
Image 1	0.0955	−0.0811	−0.2450	−0.1212	−0.0585	0.0818	0.0179	0.1496
Image 2	0.0955	−0.0811	−0.2450	−0.1212	−0.0585	0.0818	0.0179	0.1496
Image 3	0.0955	−0.0811	−0.2450	−0.1212	−0.0585	0.0818	0.0179	0.1496
Image 60	0.1165	−0.0461	−0.1226	0.1996	0.0376	0.4239	0.1051	0.5005
Image 61	0.1176	−0.0433	−0.1106	0.2126	0.0425	0.4418	0.1076	0.5205
Image 62	0.1187	−0.0403	−0.0986	0.2249	0.0469	0.4590	0.1094	0.5398
Image 63	0.1197	−0.0373	−0.0868	0.2364	0.0507	0.4753	0.1105	0.5581
Image 64	0.1206	−0.0341	−0.0754	0.2472	0.0540	0.4907	0.1109	0.5755
Image 95	0.1237	0.0201	0.0304	0.3500	0.0648	0.6235	0.0879	0.7230
Image 96	0.1237	0.0201	0.0304	0.3500	0.0648	0.6235	0.0879	0.7230

TAB. 6. coordonnées des points pour quelques images

	Bras X	bras Y	Avant bras X	Avant bras Y	main X	main Y
Image 1	**−0.0529**	**−0.0986**	−0.1648	−0.0339	−0.0198	0.1161
Image 2	−0.0529	−0.0986	−0.1648	−0.0339	−0.0198	0.1161
Image 3	−0.0529	−0.0986	−0.1648	−0.0339	−0.0198	0.1161
Image 60	0.0123	0.0610	−0.0537	0.2960	0.0717	0.4627
Image 61	0.0181	0.0683	−0.0448	0.3112	**0.0754**	**0.4817**
Image 62	0.0239	0.0753	−0.0361	0.3255	0.0785	0.4999
Image 63	0.0296	0.0821	−0.0277	0.3391	0.0810	0.5172
Image 64	0.0352	0.0886	−0.0197	0.3519	0.0828	0.5336
Image 95	0.0830	0.1639	0.0452	0.4676	0.0765	0.6738
Image 96	0.0830	0.1639	0.0452	0.4676	0.0765	0.6738

TAB. 7. Coordonnées des centre de gravité des segments

	Bras X	bras Y
Image 1	−0.0848	−0.0521
Image 2	−0.0848	−0.0521
Image 3	−0.0848	−0.0521
Image 60	−0.0017	0.1844
Image 61	**0.0049**	**0.1956**
Image 62	0.0113	0.2063
Image 63	0.0174	0.2165
Image 64	0.0233	0.2262
Image 95	0.0701	0.3223
Image 96	0.0701	0.3223

TAB. 8. quelques coordonnées du centre de gravité du membre supérieur au cours du temps

Distance (m)	Temps	Vitesse (km/h)	Amplitude (m)	Fréquence (Hz)	Nombre de foulées
100	9,9 s	**36.36**	**2.25**	**4.5**	44.4
400	43,8 s	32.868	2.2	4.15	181.8
800	1 min 43,4 s	27.828	2.1	3.68	**380.5**
1 500	**3 min 32,16 s**	25.452	2	3.53	750
5 000	13 min 12,9 s	22.716	1.8	3.5	2777.7
10 000	27 min 30,5 s	21.816	1.75	3.46	5714.2

TAB. 9. Comparaison des courses pour différentes distances du 100 m au 10 000 m.