



Corrigé de l'examen CC2 de Biomécanique du mouvement

Correction de l'exercice 1.

(1) Dans tout cette question 1, on se place à $t = 0.39$.

On rappelle les données de l'énoncé :

$$g = 9.810 \text{ ms}^{-2}, \tag{1}$$

$$m = 70.5941 \text{ kg}, \tag{2}$$

$$l_1 = 0.15234 \text{ m}, \tag{3}$$

$$m_1 = 2.0472 \text{ kg}, \tag{4}$$

$$a_{G,x} = 1.50353 \text{ ms}^{-2}, \tag{5}$$

$$a_{G,y} = 9.80593 \text{ ms}^{-2}, \tag{6}$$

$$a_{G_p,x} = -0.45744 \text{ ms}^{-2}, \tag{7}$$

$$a_{G_p,y} = 3.40486 \text{ ms}^{-2}, \tag{8}$$

$$R_x = 81.65368\text{N}, \tag{9}$$

$$R_y = 1385.30314\text{N}. \tag{10}$$

(a) Le système considéré est le corps du sujet. Il est soumis à :

- Son poids, \vec{p} ;
- l'action du sol sur le corps, \vec{R} .

Le poids est donné par

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 692.5281 \end{pmatrix} \tag{11}$$

On en déduit donc

$$\vec{p} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{CG du corps} \\ \text{Norme :} & 692.5281 \\ \text{Direction :} & \text{verticale} \\ \text{Sens :} & \text{Bas} \end{cases}$$

La force \vec{R} était donnée par (9)-(10).

On en déduit donc

$$\vec{R} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \textit{interfacesol - pied} \\ \text{Norme :} & 1388.83 \\ \text{Direction :} & 85.617 \\ \text{Sens :} & \text{Droite Haut} \end{cases} \quad (12)$$

- (b) Le système considéré est l'ensemble des deux pieds. Il est soumis à :
- Son poids, \vec{p} ;
 - l'action du sol sur le corps, \vec{R} .
 - l'action des deux jambes sur les deux pieds, \vec{R}_{jp} .

Le poids est donné par

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ (m - m_1)g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 672.4451 \end{pmatrix} \quad (13)$$

On en déduit donc

$$\vec{p} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{CG des deux pieds} \\ \text{Norme :} & 672.4451 \\ \text{Direction :} & \text{verticale} \\ \text{Sens :} & \text{Bas} \end{cases}$$

La force \vec{R} était toujours donnée par (9)-(10)-(12). Enfin, d'après la RFD, en dynamique,

$$\vec{p}_p + \vec{R} + \vec{R}_{jp} = m_1 \vec{a}_{G_p}$$

On a donc

$$\vec{R}_{jp} = -\vec{p}_p - \vec{R} + m_1 \vec{a}_{G_p}$$

et

$$R_{jp,x} = -R_x + m_1 a_{G_p,x},$$

$$R_{jp,y} = m_1 g - R_y + m_1 a_{G_p,y}.$$

Numériquement, il vient

$$R_{jp,x} = -82.59016\text{N}, \quad (14)$$

$$R_{jp,y} = -1358.24930\text{N}. \quad (15)$$

On en déduit donc

$$\vec{R}_{jp} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & \text{cheville} \\ \text{Norme :} & 1360.758 \\ \text{Direction :} & 86.52 \\ \text{Sens :} & \text{Gauche Bas} \end{cases}$$

(2) *Tous les tableaux sont donnés à la fin du corrigé, à partir de la page 15.*

- (a) Dans tout cette question 2a, on se place de nouveau à $t = 0.39$.

- (i) Le moment d'inertie de l'ensemble des deux pieds vaut

$$I_1 = m_1 r_1^2$$

Grâce au tableau 1 page 15, on a donc

$$I_1 = 0.01072 \text{kgm}^2 \quad (16)$$

Remarque 1. Attention, les rapports de rayon d'inertie/longueur de segment utilisés pour les calculs (voir tableau 5) sont légèrement différents de ceux de votre fascicule de cours qui proviennent de calcul réalisés par Winter ; ils ont été calculés directement à partir d'une expérience faite au CRIS.

(ii) De façon générale, on considère un solide indéformable dont on connaît

- m_1 , la masse
- I_1 , le moment d'inertie
- $y_{G,p}$, l'altitude du centre de gravité
- $v_{G,p}$, la vitesse du centre de gravité
- ω , la vitesse angulaire de rotation autour de G , par rapport à un axe fixe

On note

- E_p , l'énergie potentielle
- E_c , l'énergie cinétique
- E_{ct} , l'énergie cinétique de translation
- E_{cr} , l'énergie cinétique de rotation

Alors, l'énergie mécanique est égale à

$$\begin{aligned} E &= E_p + E_c, \\ &= E_p + E_{ct} + E_{cr}, \\ &= m_1 g y_{G,p} + \frac{1}{2} m_1 v_{G,p}^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega^2. \end{aligned}$$

Ici, le système étudié est l'ensemble des deux pieds.

On a donc successivement

$$\begin{aligned} E_p &= 2.047 \times g \times 0.653 = 2.047 \times 9.810 \times 0.653 = 13.120 \text{ J}, \\ E_{ct} &= \frac{1}{2} \times 2.047 \times (0.133)^2 = 0.018 \text{ J}, \\ E_{cr} &= \frac{1}{2} \times 0.011 \times (1.190)^2 = 0.008 \text{ J}, \end{aligned}$$

et donc

$$E = 13.146 \text{ J}.$$

(b)

Sur la figure 1(a) page suivante est représentée l'énergie mécanique totale des deux pieds au cours du temps.

On renvoie au document de cours [Bas10], chapitre 7, théorèmes 7.17 page 11 et 7.16 page 11.

L'énergie mécanique totale des deux pieds n'est pas constante ; ce système n'est donc pas mécaniquement isolé. C'est bien un solide rigide indéformable, mais l'ensemble des deux pieds est soumis aux muscles de la cheville, dont le soléaire, qui apporte de l'énergie mécanique au système, ce qui contribue à l'impulsion. D'après l'équation (7.28) page 12 de [Bas10], la variation d'énergie mécanique des deux pieds est non nulle et est égale au travail de ces forces externes. On peut constater sur la figure 1(a) page suivante que l'énergie mécanique ne varie peu avant $t = 0.39$; avant cet instant, le pied ne bouge pratiquement pas et son énergie ne varie donc pas.

(c) Pour déterminer l'énergie mécanique totale de tout le corps à l'instant $t = 0.39$, on déterminerait comme précédemment l'énergie potentielle, cinétique, puis totale pour chacun des segments (jambes, cuisse, tronc).

Par exemple : pour les deux jambes

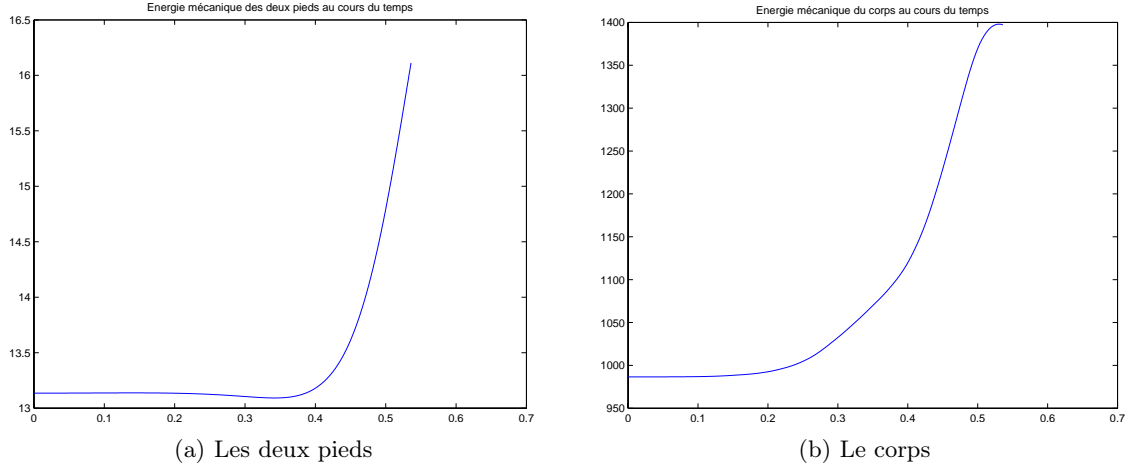


FIGURE 1. Énergie mécanique totale au cours du temps.

Le système étudié est l'ensemble des deux jambes.

On a donc successivement

$$E_p = 6.565 \times g \times 0.910 = 6.565 \times 9.810 \times 0.910 = 58.597 \text{ J},$$

$$E_{ct} = \frac{1}{2} \times 6.565 \times (0.360)^2 = 0.424 \text{ J},$$

$$E_{cr} = \frac{1}{2} \times 0.108 \times (0.629)^2 = 0.021 \text{ J},$$

et donc

$$E = 59.042 \text{ J}.$$

La somme de chacune des énergies mécanique est l'énergie mécanique du corps.

- (d) On renvoie au document de cours [Bas10], chapitre 7, théorèmes 7.17 page 11 et 7.16 page 11.

Sur la figure 1(b) est représentée l'énergie mécanique totale du corps au cours du temps. On constate qu'elle n'est pas constante : Le corps n'est donc pas mécaniquement isolé. En effet, ce n'est pas un solide rigide indéformable ; de plus, le travail des forces internes est non nul. Ce travail provient des différents muscles qui activent la hanche, le genou et la cheville, en provoquant leur extension et donc l'impulsion. D'après l'équation (7.28) page 12 de [Bas10], la variation d'énergie mécanique du corps est non nulle et est égale au travail de ces forces internes.

- (3) On fait un changement de repère en temps et en espace, de telle sorte que, pour toute la fin de l'énoncé, on se donne à $t = 0$, les coordonnées du centre de masse du corps

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0. \quad (17)$$

et celles de la vitesses du centre de masse données par La norme de la vitesse initiale du centre de masse est donnée par

$$v_0 = 2.11471 \text{ ms}^{-1}, \quad (18)$$

cette vitesse fait un angle initial avec l'horizontale

$$\alpha = 86.15618^\circ \quad (19)$$

On renvoie au chapitre 8 de [Bas10].

(a) La vitesse est très faible et on peut négliger les forces de frottement de l'air.

On procède comme dans la section 8.1.1 page 17 du chapitre 8 de [Bas10] :

On déduit de (17) que les équations horaires (ou paramétriques) du centre de masse sont données par

$$a_x(t) = 0, \quad (20a)$$

$$a_y(t) = -g, \quad (20b)$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (20c)$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha, \quad (20d)$$

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad (20e)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \quad (20f)$$

(b) On procède comme dans la section 8.1.2 page 20 du chapitre 8 de [Bas10] :

On utilise (20e) pour exprimer $x(t)$ en fonction de t :

$$t = \frac{v_0}{\cos \alpha} \quad (21)$$

On substitue cette valeur dans (20f) :

$$y(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{\cos \alpha t}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{v_0}{\cos \alpha t}$$

et donc, on obtient

$$y(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}x^2 + \tan \alpha x. \quad (22)$$

(c) On procède comme dans la section 8.2.2 page 21 du chapitre 8 de [Bas10] :

Au sommet de la parabole (à la "flèche"), la composante verticale de la vitesse est nulle ; avant, elle est positive, après, elle est négative. On a donc

$$v_y(t) = 0.$$

Déterminons donc le demi-temps de vol t (temps pour parcourir la partie de la parabole de 0 à F , la flèche) : d'après (20d), on a donc

$$0 = v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha$$

et donc

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (23)$$

On réinjecte cette valeur dans (20f) et on trouve :

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right),$$

soit

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}\frac{gv_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0 \sin^2 \alpha}{g}, \\ &= -\frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + \frac{v_0 \sin^2 \alpha}{g}, \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} \left(-\frac{1}{2} + 1\right), \end{aligned}$$

et donc

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (24)$$

Après conversion de la vitesse en mètres par seconde et de l'angle en radian, on obtient

$$h = 0.22691 \text{ m.} \quad (25)$$

(d) On procède comme dans la section 8.2.1 page 21 du chapitre 8 de [Bas10] :

Notons, comme sur la figure 8.1 page 17 de [Bas10], L la distance horizontale parcourue, c'est-à-dire l'abscisse correspondant à y nul. On cherche donc $L = x$ la valeur correspondant à $y = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} 0 = y &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x, \\ &= x \left(-\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul ; on a donc deux solutions :

- soit $x = 0$, ce qui donne l'origine du mouvement, solution physiquement acceptable, mais ce n'est pas celle que l'on cherche !
- soit

$$-\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha = 0$$

ce qui donne successivement

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x &= -\tan \alpha \iff \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x = \tan \alpha, \\ &\iff gx = 2 \tan \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha, \\ &\iff x = 2 \frac{\tan \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}, \\ &\iff x = 2 \frac{\sin \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha g}, \\ &\iff x = 2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha v_0^2}{g}, \end{aligned}$$

et puisque $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$

$$\iff x = \frac{\sin(2\alpha)v_0^2}{g}$$

Bref, on obtient pour la portée L

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad (26)$$

Après calcul, on obtient

$$L = 0.06098 \text{ m.} \quad (27)$$

Correction de l'exercice 2.

On renvoie au chapitre 9 de [Bas10]

Les figures avec des courbes et les tableaux sont tous donnés à partir de la page 16.

(1) Sur la figure 5 page 17, se trouvent représentées sa trajectoire au début du mouvement, ainsi que les normes de son poids et des forces de traînée et de portance au cours du temps.

(a) Sur la courbe 5(a) page 17, on constate que la courbe de la chute libre est très proche de celle avec frottement. La parachutiste qui tombe est un système soumis à son propre poids, ainsi qu'aux forces de portance et de traînée exercée par l'air ambiant. Sur la figure 5(b) page 17, on constate que les normes des forces de traînée et de portance sont très petites par rapport au poids. Ainsi

au début du mouvement tout du moins, ces forces de frottement de l'air sont négligeables par rapport au poids, qui prédomine : la chute s'apparente donc à celle de la chute libre.

On peut aussi remarquer que la trajectoire avec frottement va moins loin et moins bas ; ceux-ci ralentissent en effet (légèrement) la chute.

- (b) On utilise directement le résultat de la question 3b page 5 de l'exercice 1. D'après (22), on a donc

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x. \quad (28)$$

Attention, conformément aux calcul de la question 3b page 5 de l'exercice 1, cette expression est valable dans un repère placé à la position du parachutiste à $t = 0$. Si on l'écrit dans un repère absolu, il suffit de rajouter la hauteur H :

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x + H. \quad (29)$$

On utilise le fait que la vitesse est horizontale, donc $\alpha = 0$. Ainsi, après conversion de la vitesse en USI, on obtient pour $x = 5\text{m}$,

$$y = -5.00000 \text{ m}. \quad (30)$$

On a donc une diminution d'altitude de 5 m.

- (2) Sur la figure 6 page 18, se trouvent représentées sa trajectoire complète (jusqu'au moment où le parachutiste ouvre son parachute), ainsi que les normes de son poids et des forces de traînée et de portance représentées en fonction de l'altitude y .

Toute la suite est donc relative à l'étude du mouvement de la chute du parachutiste, *parachute fermé*.

Notons qu'on avait fait l'hypothèse d'un air calme ; ainsi la vitesse V intervenant dans les équations (9.1) et (9.2) page 24 de [Bas10] est égale à v , la vitesse du parachutiste par rapport au sol ; on peut donc réécrire (9.1) et (9.2) page 24 de [Bas10] sous la forme

$$F_P = \frac{1}{2} C_P S d v^2, \quad (31a)$$

$$F_T = \frac{1}{2} C_T S d v^2. \quad (31b)$$

- (a) On peut constater sur la figure 6(a) page 18 que la trajectoire semble rectiligne en dessous de 700 m. De plus, on constate sur la figure 6(b) page 18, que les normes des forces de traînée et de portance semblent constantes pour une altitude inférieure à 700 m.

- (b) On y voit qu'elles valent respectivement environ 600 N et 150 N.

- (c) (i) L'étude du tableau 6 page 16 confirme l'analyse précédente : en dessous de 700 m, on observe que

- la norme de la vitesse v semble constante et vaut environ $32,7 \text{ ms}^{-2}$.
- la norme de la force de traînée F_T semble constante et vaut environ 600 N.
- la norme de la force de portance F_P semble constante et vaut environ 150 N.
- Le rapport F_P/F_N est égal à 4.

On a vu que le mouvement était rectiligne : la direction de la vitesse \vec{v} est donc constante ; de plus, sa norme est constante en deça de 700 m ; Ainsi, on peut donc tenir la vitesse comme à peu près constante en deça de 700 m.

- (ii) L'accélération est la dérivée de la vitesse constante ; elle est donc nulle !

Remarque 2. La fait que la norme de la vitesse v soit constante ne suffit pas à affirmer que \vec{a} est nulle. Il faut que \vec{v} soit de norme, de sens et de direction constants. C'est l'aspect rectiligne de la trajectoire qui permet d'admettre que sens et direction de la vitesse ne varient

pas. Penser par exemple à un mouvement circulaire avec vitesse de rotation constante. La norme v est constante, mais l'accélération (centripète) n'est pas nulle !

On considère le système formé par le parachutiste, supposé ponctuel. Il est soumis à son propre poids, ainsi qu'à la force de portance et de traînée exercée par l'air ambiant. La RFD donne

$$m\vec{g} + \vec{F}_T + \vec{F}_P = m\vec{a}_G.$$

En dessous de 700 m, l'accélération est nulle ; on a donc

$$m\vec{g} + \vec{F}_T + \vec{F}_P = \vec{0}. \quad (32)$$

Dans cette équation, d'après les observations faites en question 2(c)i et (31), F_P et F_T sont à peu près constantes en dessous de 700 m.

(iii)

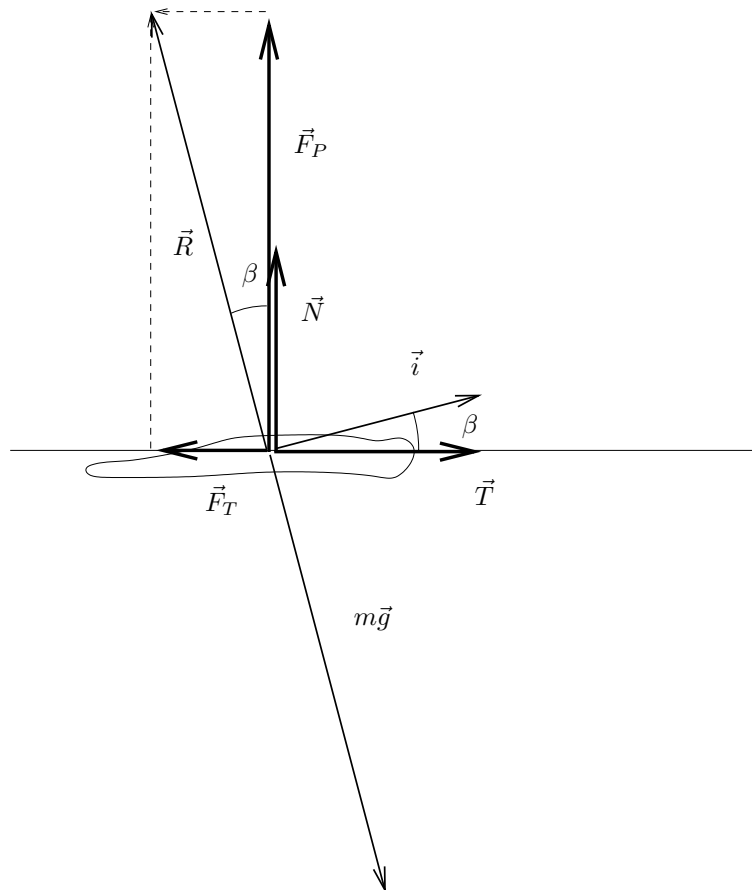


FIGURE 2. Le parachutiste en vol et les forces \vec{F}_T , \vec{F}_P et $m\vec{g}$.

(A) Sur la figure de l'énoncé, on avait tracé le vecteur \vec{T} de norme 1 et dans le sens de la vitesse \vec{v} , de sorte que $\vec{v} = v\vec{T}$. On avait aussi tracé \vec{N} de norme 1 et perpendiculaire à \vec{T} .

On rajoute sur la figure de l'énoncé, la force de traînée \vec{F}_T portée par l'opposé du vecteur \vec{T} (ou $vecv$), dirigée vers l'arrière du parachutiste ainsi que la force de portance

\vec{F}_P perpendiculaire à \vec{T} , dirigée vers le haut de la figure ; obtient la figure 2 page ci-contre. Sur cette figure, on aussi tracé $\vec{R} = \vec{F}_T + \vec{F}_P$. La norme de \vec{F}_P est 4 fois celle de \vec{F}_T .

(B) Par ailleurs, d'après (32), on a

$$m\vec{g} + (\vec{F}_P + \vec{F}_T) = m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}. \quad (33)$$

Ainsi, le poids $m\vec{g}$ est opposé à \vec{R} . On peut donc le tracer sur la figure. Il permet donc de connaître la position de la verticale de la figure et d'orienter la figure !

(C) On note β , l'angle entre l'horizontale et le vecteur vitesse, représenté sur la figure 2 page précédente, où \vec{i} désigne l'horizontale. Grâce à cette figure, on constate que l'angle β est donc négatif ; pour simplifier, on considérera l'angle β non orienté, donc positif. Dans le triangle rectangle formé par \vec{R} , \vec{F}_P et \vec{F}_T , on a donc

$$\tan \beta = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}} = \frac{F_T}{F_P},$$

et donc

$$\frac{F_P}{F_T} = \frac{1}{\tan \beta}. \quad (34)$$

On en déduit aussi

$$\beta = \text{arctg} \frac{F_T}{F_P}, \quad (35)$$

Application numérique : d'après les observation faite en question 2(c)i, on donc

$$\beta = \text{arctg} \frac{F_T}{F_P} = \text{arctg} \left(\frac{1}{4} \right),$$

et donc

$$\beta = 14.03^\circ. \quad (36)$$

Cela nous permet donc d'orienter convenablement la figure 2 : voir la figure 3 page suivante.

Remarque 3. Si on écrit cela avec l'angle $\beta < 0$, orienté, on aurait donc

$$\beta = -\text{arctg} \frac{F_T}{F_P}, \quad (37)$$

(D) On introduit γ_P et γ_T tels

$$F_P = \gamma_P v^2, \quad (38a)$$

$$F_T = \gamma_T v^2. \quad (38b)$$

On renvoie à la figure 2 page précédente. Dans le triangle rectangle formé par \vec{R} , \vec{F}_P et \vec{F}_T , on a d'après le théorème de Pythagore

$$R = \sqrt{F_P^2 + F_T^2}.$$

D'après (33), \vec{R} et $m\vec{g}$ ont la même norme. On a donc

$$mg = \sqrt{F_P^2 + F_T^2}.$$

Enfin, d'après (38), on a donc

$$mg = \sqrt{(\gamma_P v^2)^2 + (\gamma_T v^2)^2} = v^2 \sqrt{\gamma_P^2 + \gamma_T^2},$$

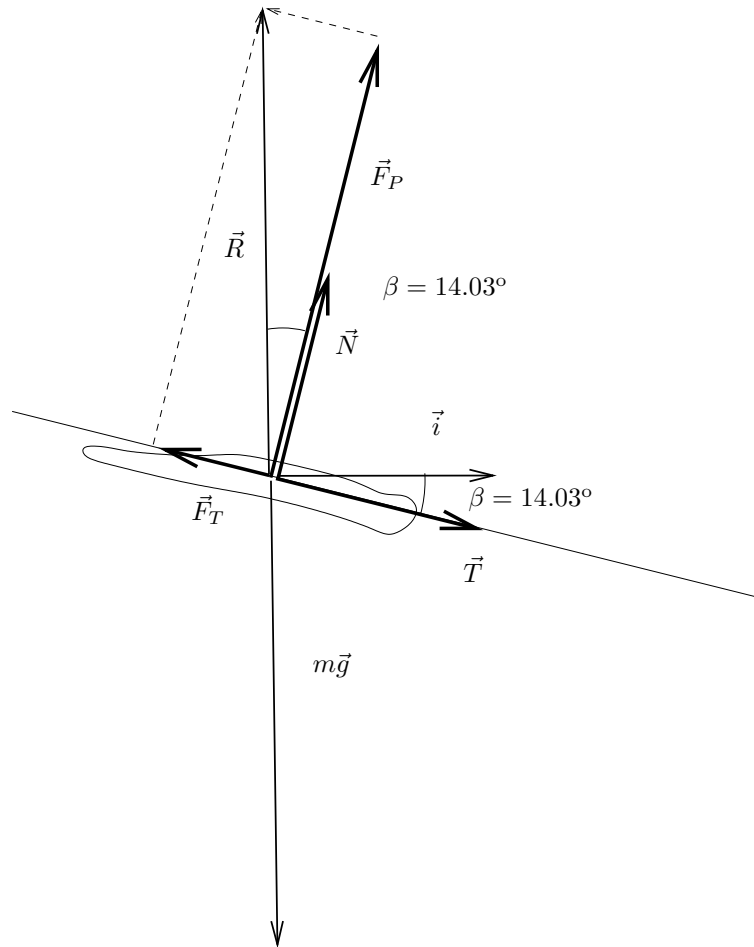


FIGURE 3. Le parachutiste orienté en vol et les forces \vec{F}_T , \vec{F}_P et $m\vec{g}$.

dont on déduit l'expression de la vitesse limite

$$v_l = \frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{\sqrt{\gamma_P^2 + \gamma_T^2}}} = \frac{\sqrt{mg}}{\sqrt[4]{\gamma_P^2 + \gamma_T^2}}. \quad (39)$$

Application numérique :

On peut remarquer que d'après (31), on a

$$\gamma_P = \frac{1}{2} C_P S d, \quad (40a)$$

$$\gamma_T = \frac{1}{2} C_T S d. \quad (40b)$$

où

- C_P et C_T sont les coefficient de portance et de traînée ;
- S est la surface maître-couple ;
- d la masse volumique du fluide.

On donne

$$C_P = 1.62172 \quad (41a)$$

$$C_T = 0.40543 \quad (41b)$$

$$S = 0.56000 \quad (41c)$$

$$d = 1.22900. \quad (41d)$$

On en déduit

$$v_l = 32.77778 \text{ ms}^{-2}. \quad (42)$$

soit encore

$$v_l = 118.00000 \text{ kmh}^{-1}. \quad (43)$$

Remarque 4. Remarquons que (42) confirme bien les observations faites en question 2(c)i. On peut aussi calculer F_P et F_T :

$$F_P = 599.57717 \quad (44a)$$

$$F_T = 149.89429. \quad (44b)$$

(E) On pose

$$f = \frac{F_P}{F_T}. \quad (45)$$

Si d_h est la distance horizontale parcourue et d_v , la distance verticale parcourue au cours d'un mouvement à vitesse constante et rectiligne, il est aisé de constater que la vitesse étant proportionnelle à la distance parcourue, on a

$$\frac{d_h}{d_v} = \frac{v_h}{v_v}, \quad (46)$$

où v_h et v_v sont les composantes horizontale et verticale de la vitesse. La vitesse est colinéaire au vecteur \vec{T} ; on a donc

$$v_h = v \cos \beta,$$

$$v_v = v \sin \beta,$$

et donc

$$\frac{v_h}{v_v} = \frac{1}{\tan \beta}.$$

D'après (34), on a donc

$$\frac{v_h}{v_v} = \frac{F_P}{F_T}.$$

Grâce à (45) et (46), on a donc

$$f = \frac{d_h}{d_v}. \quad (47)$$

On a aussi, grâce à (38)

$$f = \frac{C_P}{C_T}. \quad (48)$$

Selon (41b)-(41c), on a donc numériquement

$$f = 4. \quad (49)$$

On peut remarquer que l'on a aussi, grâce à (35) :

$$\beta = \arctg \frac{F_T}{F_P} = \arctg \frac{C_T}{C_P} = \arctg \frac{1}{f}. \quad (50)$$

Cette finesse doit être la plus grande possible, de façon à parcourir une grande distance horizontale, par rapport à la distance verticale parcourue. Il faut donc un grand coefficient de portance et un faible coefficient de traînée.

Remarque 5. Cette observation peut être corroborée par le fait que la pente du parachutiste de la figure 3 page 10 est exactement celle de la partie rectiligne de la figure 6(a) page 18.

On peut donc comprendre la phrase suivante (due à Loic-Jean Albert, qui a beaucoup contribué au développement du wingsuit) : «On ralentit la vitesse verticale de chute, que l'on transforme grâce à la combinaison en vitesse horizontale, et l'on parvient à parcourir 4 à 5 kilomètres à l'horizontale».

Remarque 6. On a tracé en figure 7 page 19 la trajectoire étudiée et celle qu'aurait le même sujet avec un C_P deux fois moindre. On remarque que l'angle β est plus important :

$$\beta = \arctg \frac{F_T}{F_P/2} = \arctg \left(\frac{1}{2} \right) = 26.5650^\circ.$$

Le sujet plane donc moins.

Remarque 7. Pour conclure, le mouvement se décompose en trois phases :

- Une phase au tout début où les forces de frottement n'agissent pas (ou peu), cette phase étant proche de la chute libre (question 1).
- Vient ensuite une phase où les forces de frottement augmentent puis oscillent, phase non étudiée.
- Enfin, dans la dernière phase, les forces de frottement sont constantes, la somme des forces est nulle et \vec{v} est constante (question 2).
- Le mouvement après l'ouverture du parachute n'est pas étudié !

Remarque 8. En fait, les calculs présentés ont été réalisés à partir de simulations numériques, en faisant l'hypothèse que C_P , C_T et d sont constants, ce qui n'est pas tout à fait le cas, surtout sur des grandes hauteurs de saut, où la température de l'air peut varier, le parachutiste peut tourner sur lui-même. De plus, il y a souvent du vent, jamais à vitesse constante. Enfin, les équations (31) sont une simplification du réel, beaucoup plus complexe ! Néanmoins, on a essayé avec ces calculs simples, de vous faire comprendre la notion de force de traînée et de portance. Ceux qui sont intéressés par l'équation différentielle gérant le vol avec force de traînée et de portance pourront lire l'annexe A.

On pourra, pour plus de détails, consulter les URL suivantes :

<http://wwwwingsuit.blogspot.com/2009/12/1-chute-verticale-dun-homme.html>

<http://wwwwingsuit.blogspot.com/2009/12/3-exemples-de-moyens-datterrissage-sans.html>

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Wingsuit>

<http://fr.wikipedia.org/wiki/A%C3%A9rodynamique>

Annexe A. Établissement de l'équation différentielle gouvernant la chute avec frottement

Pour plus de détails sur la loi de frottement visqueux considérée, on pourra lire le chapitre 9 de [Bas10].

On étudie ici le vol d'un objet.

Voir la figure 4.

L'objet est soumis à son propre poids $\vec{p} = m\vec{g}$. Notons, pour une vitesse non nulle, (\vec{T}, \vec{N}) , le repère local de Frenet.

Si \vec{v} est sa vitesse non nulle, on sait que la force de traînée \vec{F}_T , est colinéaire à $-\vec{v}$ et que la force de portance \vec{F}_P est colinéaire à \vec{N} . Cela reste vrai si la vitesse est nulle : dans ce cas, les deux forces de traînée et de portance

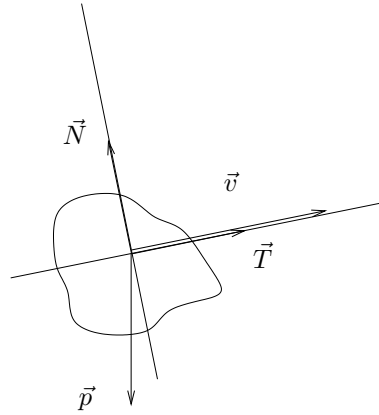


FIGURE 4. L'objet en vol.

sont nulles. Leurs normes sont définies par :

$$F_T = \frac{1}{2} C_T S d v^2, \quad (51a)$$

$$F_P = \frac{1}{2} C_P S d v^2, \quad (51b)$$

où

- C_P et C_T sont les coefficients de traînée et portance ;
- S est la surface maître-couple, c'est-à-dire ici πR^2 où R est la rayon de la balle ;
- d la masse volumique de l'air.

Si la vitesse est nulle, cela est encore vrai. En remarquant que $\vec{v} = v\vec{T}$, on a donc

$$\vec{F}_T = -\gamma_T v \vec{v}, \quad (52a)$$

$$\vec{F}_P = \gamma_P v^2 \vec{N}, \quad (52b)$$

où

$$\gamma_T = \frac{1}{2} C_T S d, \quad (53a)$$

$$\gamma_P = \frac{\varepsilon}{2} C_P S d, \quad (53b)$$

où $\varepsilon = \pm 1$; il vaut 1 si la force de portance est dirigée vers la haut, -1 sinon. Cette force de portance est responsable de l'effet Magnus. Notons enfin que $v\vec{N} = r(v\vec{T}) = r(\vec{v})$, où r est la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$, définie par

$$r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$v\vec{N} = r(v\vec{T}) = r(\vec{v}),$$

et

$$\vec{F}_T = -\gamma_T v \vec{v}, \quad (54a)$$

$$\vec{F}_P = \gamma_P v r(\vec{v}). \quad (54b)$$

L'objet, de masse m , est supposée ponctuel. La RFD donne donc

$$\sum \vec{F}_{\text{exterieures}} = m\vec{a},$$

soit

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_T + \vec{F}_P. \quad (55)$$

Grâce à (54), cela est équivalent à

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - \gamma_T v \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \gamma_P v \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

On a donc l'équation différentielle ordinaire

$$m\ddot{x} = -\gamma_T v \dot{x} - \gamma_P v \dot{y} \quad (56a)$$

$$m\ddot{y} = -mg - \gamma_T v \dot{y} + \gamma_P v \dot{x}, \quad (56b)$$

avec

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \quad (56c)$$

En posant

$$F(t, (x_1, x_2, x_3, x_4)) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m}(-\gamma_T v x_2 - \gamma_P v x_4) \\ x_4 \\ \frac{1}{m}(-mg - \gamma_T v x_4 + \gamma_P v x_2) \end{pmatrix} \quad (57a)$$

où

$$v = \sqrt{x_2^2 + x_4^2} \quad (57b)$$

$$(57c)$$

Ainsi, on peut réécrire (56) sous la forme

$$\dot{X}(t) = F(t, X(t)), \quad (58)$$

où

$$X(t) = (x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t)). \quad (59)$$

Remarque 9. On fera l'hypothèse forte sur des mouvements de courtes durées, avec des vitesses élevées et des coefficients de traînée et de portance faible, que ceux-ci peuvent être considérés comme constants.

Si les conditions initiales en déplacement x_0 et y_0 et vitesse (norme v_0 et angle α) sont connues, on peut donc résoudre cette équation différentielle de façon numérique, et calculer pour tout $t \geq 0$, $x(t)$ et $y(t)$.

Ensemble des tableaux de l'exercice 1

pied	0.072
jambe	0.128
cuisse	0.136
tronc	0.313

TABLE 1. Rayon de giration de chaque segment

temps	$y_{G,p}$
0.00000	0.65402
0.19000	0.65405
0.29000	0.65270
0.39000	0.65327
0.49000	0.69061

TABLE 2. Quelques ordonnées (en m) du centre de masse de l'ensemble des deux pieds

temps	$v_{G,p}$
0.00000	0.00069
0.19000	0.01519
0.29000	0.02940
0.39000	0.13312
0.49000	0.75466

TABLE 3. Quelques normes de vitesses (en ms^{-1}) du centre de masse de l'ensemble des deux pieds

temps	ω
0.00000	-0.00286
0.19000	0.00074
0.29000	0.19348
0.39000	1.19024
0.49000	2.40367

TABLE 4. Quelques vitesses angulaires (en radian par seconde) du pied

pied	0.475
jambe	0.302
cuisse	0.323
tronc	0.528

TABLE 5. rapport du rayon de giration sur longueur de chaque segment

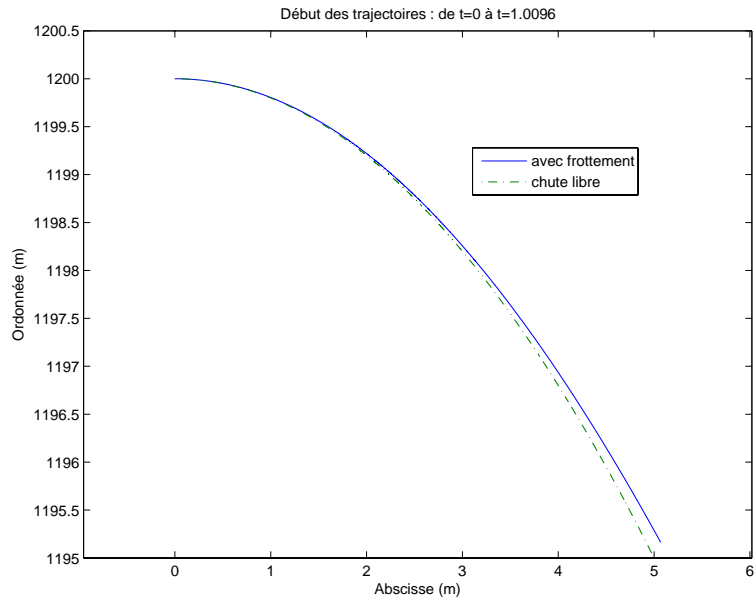
Ensemble des figures et des tableaux de l'exercices 2

temps	y	v	F_P	F_T	F_P/F_T
27.99160	902.14445	32.47059	588.39168	147.09792	4.00000
34.99300	848.36757	32.77743	599.56461	149.89115	4.00000
41.99440	791.16055	32.84917	602.19173	150.54793	4.00000
48.99580	736.46014	32.71703	597.35664	149.33916	4.00000
55.99720	680.28089	32.81597	600.97510	150.24377	4.00000
62.99860	624.87694	32.75698	598.81665	149.70416	4.00000
70.00000	569.09957	32.78711	599.91849	149.97962	4.00000

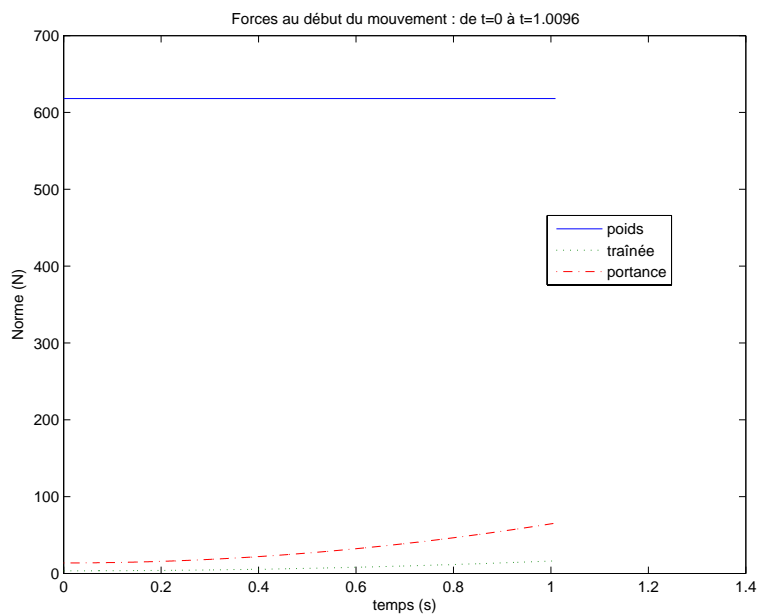
TABLE 6. Quelques valeurs de l'altitude y , la vitesse v , de forces de portance F_P et des forces de traînée F_T (en N) et leurs rapports

Références

- [Bas10] Jérôme Bastien. Biomécanique du mouvement. Notes de cours, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca, 2010.

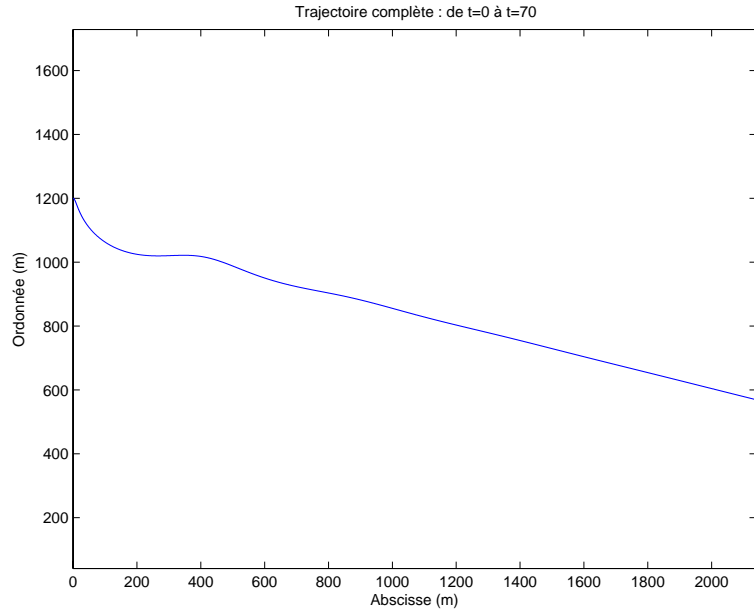


(a) La trajectoire et celle de la chute libre

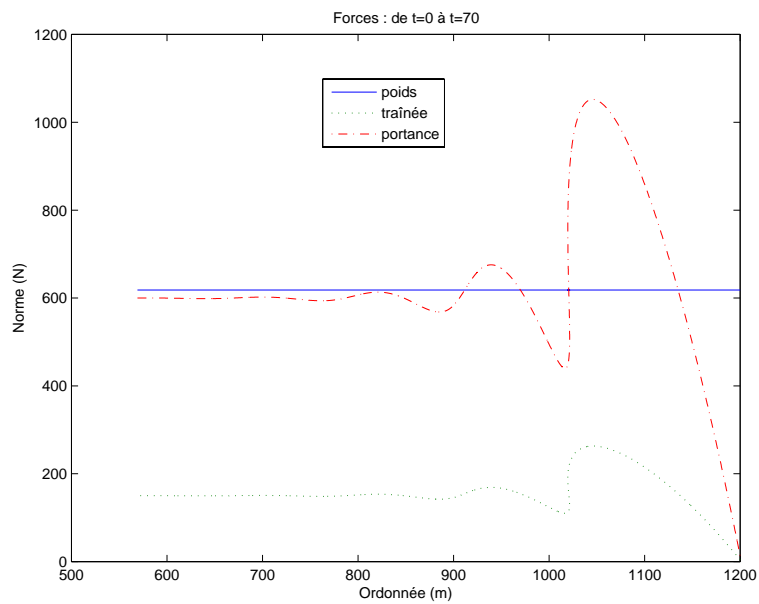


(b) Les normes du poids et des forces de traînée et de portance en fonction du temps

FIGURE 5. Le début du mouvement.



(a) La trajectoire



(b) Les normes du poids et des forces de traînée et de portance en fonction de l'altitude

FIGURE 6. Le mouvement complet.

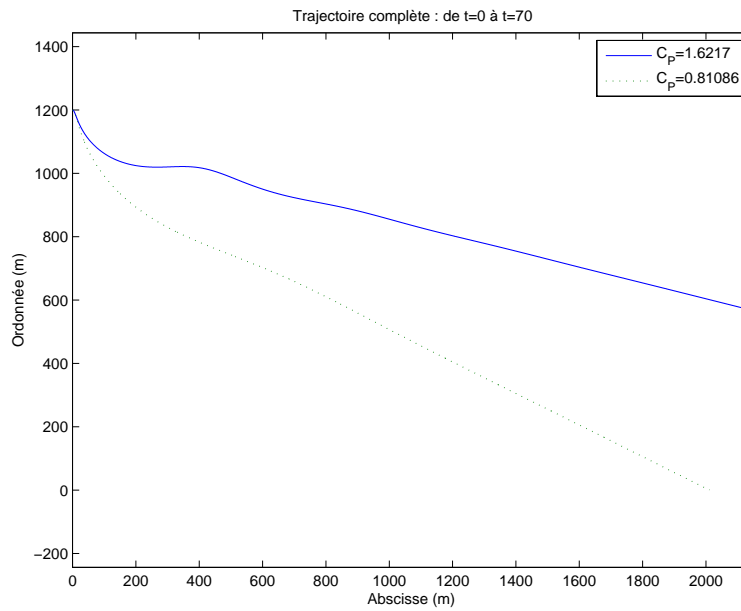


FIGURE 7. La mouvement étudié et la trajectoire avec un C_p deux fois plus petit.