

**NOTES DE COURS DE BIOMÉCANIQUE DU
MOUVEMENT**

Formation : L2

UE : BIOMÉCANIQUE DU MOUVEMENT

2015-2016, Automne

Jérôme BASTIEN

Document compilé le 15 juillet 2022

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons : Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification ; 3.0



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

ou en français

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.fr>

Identification Apogée

Matière	Biomécanique du mouvement
Formation	Licence STAPS 2ème année
Formation (code)	SP56L2
UE	3LTC3 Biomécanique du mouvement
UE (code)	SPT3003L

Table des matières

Identification Apogée	i
Avant-propos	v
Chapitre 0. Quelques références	1
Chapitre 6. Équilibre statique - Théorème des moments	3
6.1. Équilibre d'un système soumis à deux forces	3
6.2. Moment d'une force	3
6.3. Équilibre d'un système soumis à plus de trois forces	5
6.4. Équilibre optimal d'un système soumis à trois forces	15
Chapitre 7. Énergie (version courte)	23
7.1. Énergies potentielle, cinétique, mécanique (totale)	23
7.2. Théorèmes de conservation de l'énergie mécanique	24
7.3. Preuve du théorème 7.1	24
Chapitre 8. Chute libre	25
8.1. Introduction sur la modélisation de la chute libre	25
8.2. Détermination géométrique de la parabole	25
8.3. Équations de la paraboles	26
8.4. Caractéristiques de la parabole	30
8.5. Exemple de mouvement de chute libre contraint	33
8.6. Application et exemple	36
8.7. Parabole de sûreté	36
8.8. Application et exemple dans un cas où les frottements de l'air ne sont plus négligés	36
Chapitre 9. Introduction à la mécanique des fluides élémentaire	39
9.1. Introduction	39
9.2. Définition des fluides	39
9.3. Fluides au repos	40
9.4. Généralités sur les fluides parfaits en dynamique	54
9.5. Écoulement de fluides réels en dynamique	64
9.6. Applications et exemples donnés en examens	75
Annexe A. Vitesse, temps, distance	77
A.1. Introduction	77
A.2. Des problèmes de trains et de rugbymen	78
A.3. Des montres, des planètes et le sud	80
A.4. Des rivières, des crocodiles et des montagnes	85
A.5. Paradoxes de la flèche, d'Achille et la tortue et le problème de la mouche	91

Annexe B. Coefficient de Frottement	101
Annexe C. Énergie	103
C.1. Introduction	103
C.2. Hypothèse fondamentale du repère galiléen	103
C.3. Travail	104
C.4. Puissance	105
C.5. Énergies potentielle, cinétique, mécanique (totale)	107
C.6. Théorèmes énergétiques	109
C.7. Quatre exemples	111
Annexe D. Démonstration du théorème de König (Équation (C.22))	115
Annexe E. Démonstration simplifiée du théorème de l'énergie C.16	117
Annexe F. Rappels des formules principales de la chute libre	119
Annexe G. Détermination géométrique de la parabole de la chute libre	121
G.1. Un lien GeoGebra	121
G.2. Quelques rappels géométriques sur la paraboles	121
G.3. Construction géométrique d'une parabole	125
G.4. Un exemple	136
G.5. Quelques patrons	141
G.6. Ensemble des courbes tracées	151
Annexe H. Écart entre la parabole et son approximation polygonale	159
H.1. Méthode des deux tangentes	159
H.2. Méthode de De Casteljau	163
H.3. Calculs numériques	163
Annexe I. Parabole de sûreté	167
Énoncé	167
Corrigé	167
Annexe J. Différents modèles de nivellement barométrique	175
Annexe K. Étude d'un service de tennis	179
K.1. Introduction	179
K.2. Équation différentielle	179
K.3. Détermination de l'équation cartésienne et calcul de l'angle α	181
K.4. Application à l'étude d'une vol d'une balle de tennis sans portance	183
K.5. Quelques rappels mathématiques	184
Annexe L. Étude de l'effet Magnus sur un tir au football	189
L.1. Un exemple de joli tir	189
L.2. Calcul de cet effet	190
Bibliographie	193

Avant-propos

Ces notes de cours constituent un support de cours pour l'UE Biomécanique du mouvement du L2 (2015-2016, Automne) pour les chapitres 7, 8 et 9. Quelques très brefs éléments sont donnés pour le chapitre 6.

Ce polycopié de cours est normalement disponible à la fois

- en ligne sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html> à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
 - 'Poste de travail',
 - puis sur le répertoire 'P:' (appelé aussi '\\teraetu\Enseignants'),
 - puis 'jerome.bastien',
 - puis 'UFRSTAPS',
 - enfin sur 'L2'.

Des notes en petits caractères comme suit pourront être omises en première lecture :

Attention, passage difficile! ◇

Quelques références

Voir les références en bibliographie (page 194).

On pourra, entre autres, consulter :

- un ouvrage très ludique et néanmoins rigoureux [**Pie07**] (on pourra en particulier consulter les chapitre 7 et 10 à 13) ; aussi sur le web <http://www.piednoir.com/index.html> On pourra aussi consulter, dans le même esprit, [**Gla15**] ;
- très bon ouvrage, complet et proche des exigences de ce cours [**LM07**] ;
- très vulgarisateur (moins complet que le précédent) [**Bla06**] ;
- sur le muscle (très détaillé) [**GLC03**] ;
- ainsi, qu'en guise de révision ou de remise à niveau ce qui a été donné lors de la semaine de remise à niveau en tutorat de L2 [**Bas15b**].

Équilibre statique - Théorème des moments

6.1. Équilibre d'un système soumis à deux forces

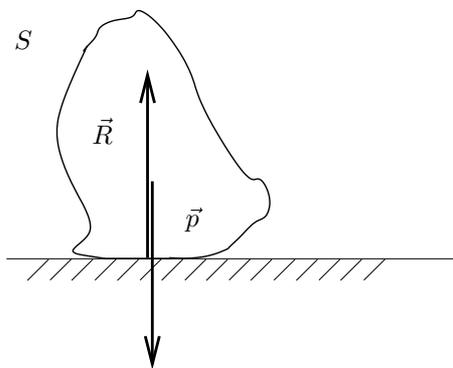


FIGURE 6.1. Équilibre d'un système soumis à deux forces \vec{p} et \vec{R} .

Supposons que l'on étudie un système S soumis à deux forces, par exemple un objet, au repos, reposant sur le sol (voir figure 6.1), soumis à son poids \vec{p} et à la réaction du sol \vec{R} . Le principe fondamental de la dynamique nous fournit

$$\sum \vec{F}_e = m\vec{a}_G$$

et donc

$$\sum \vec{F}_e = \vec{0}, \quad (6.1)$$

puisque l'on se place en statique. Cette équation donne donc, dans notre cas,

$$\vec{p} + \vec{R} = \vec{0}.$$

Ainsi, les deux forces \vec{p} et \vec{R} sont opposées, c'est-à-dire, de même norme, de même direction et de sens opposés. Si l'une des forces est connue (souvent le poids l'est), alors on en déduit l'autre.

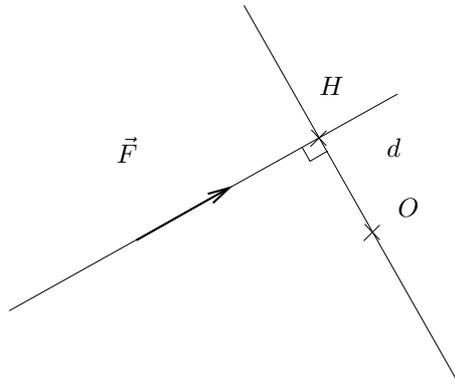
6.2. Moment d'une force

Introduisons le moment $\mathcal{M}_O(\vec{F})$ de la force \vec{F} par rapport à un point O . Il est défini par (voir figure 6.2)

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}) = \pm Fd. \quad (6.2)$$

où F est la norme de \vec{F} et d est la plus courte distance entre O et la droite portant \vec{F} (c'est-à-dire la distance HO où H est la projection orthogonale de O sur cette droite). La distance d est appelée le bras de levier de \vec{F} par rapport à O . Ce moment est positif si la force F fait tourner¹ le système S autour de O dans le sens

1. dans une rotation qui n'est pas nécessairement réelle!

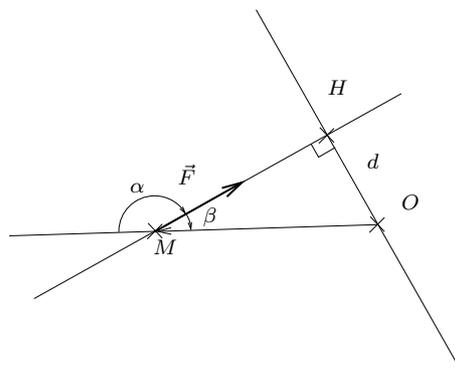
FIGURE 6.2. Le moment de \vec{F} par rapport à O .

trigonométrique et négatif sinon ; sur la figure 6.2, il est négatif. Le moment $\mathcal{M}_O(\vec{F})$ de la force \vec{F} traduit l'action de cette force dans une rotation (qui existerait) autour de O .

Pour ceux qui connaissent les produits vectoriels, si $(0, \vec{i}, \vec{j})$ désigne le repère direct orthonormé dans lequel on travaille, alors, on a l'expression du moment (vectoriel)

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OP} \wedge \vec{F}, \quad (6.3)$$

où P est le point d'application de la force \vec{F} . Dans ce cas, le moment est un vecteur porté par $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$. Le lien peut aussi être fait avec l'expression du moment présentée ci-dessus.

FIGURE 6.3. Le moment de \vec{F} , appliquée en M , par rapport à O .

L'expression du bras de levier est gênante puisqu'elle doit être calculée à partir des données, \vec{F} , O et M . On peut remarquer, que, dans le triangle rectangle OHM de la figure 6.3, on a

$$\sin \beta = \frac{d}{OM},$$

et donc

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}) = \pm FOM \sin \beta.$$

Dans le cas de la figure, on a un moment négatif :

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}) = -FOM \sin \beta. \quad (6.4)$$

Pour s'affranchir de la détermination graphique du signe du moment, on introduit l'angle de vecteurs entre les vecteurs \vec{OM} et \vec{F} (voir figure 6.3). Cette angle est défini à 2π près contrairement aux angles de droites, définis à π près, intervenant dans

les caractéristiques des vecteurs. On remarque que, dans le cas de la figure 6.3, on a $\alpha + \beta = \pi$ et donc $\sin \beta = \sin(\pi - \alpha) = -\sin(\alpha - \pi) = \sin \alpha$. Or, l'angle α , orienté, est négatif. On peut donc écrire (6.4) sous la forme

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}) = OMF \sin \alpha.$$

Cette expression est vraie pour toute situation. On a donc l'expression algébrique suivante

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}) = OMF \sin \alpha. \quad (6.5)$$

où $\alpha = (\widehat{OM, \vec{F}})$. \diamond

Notons qu'un moment est nul si la force est nulle ou si $d = 0$, c'est-à-dire que le point O appartient à la droite portant \vec{F} .

On retrouve cela avec la formule (6.5) : $\mathcal{M}_O(\vec{F})$ est nul si et seulement si $OM = 0$ ou $\sin \alpha = 0$ ou $F = 0$. \diamond

À l'égalité (6.1), on adjoint le fait que, en statique, si un corps est soumis à des forces extérieures \vec{F}_e , alors la somme des moments par rapport à tout point O est nulle :

$$\sum \mathcal{M}_O(\vec{F}_e) = 0. \quad (6.6)$$

REMARQUE 6.1. Cette égalité se généralise aussi en dynamique et fournit le théorème du moment cinétique, cela de la même façon que la relation fondamentale de la dynamique est une généralisation de l'équilibre statique. Ces deux théorèmes (relation fondamentale de la dynamique et théorème du moment cinétique) permettent d'étudier de façon complètes les systèmes dynamiques.

On peut montrer que dans le cas de la figure 6.1 page 3, (6.6) implique que les deux forces ont la même droite d'action. Si ce n'est pas le cas, le solide bascule.

6.3. Équilibre d'un système soumis à plus de trois forces

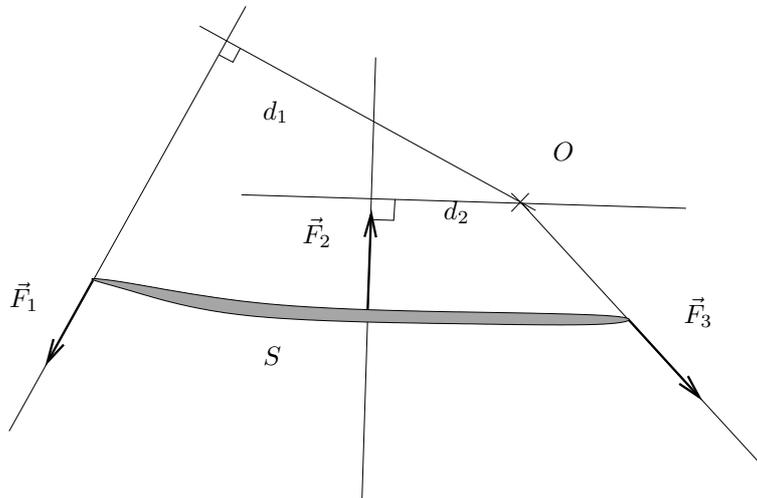


FIGURE 6.4. Un système soumis à trois forces.

Supposons maintenant que l'on étudie un solide S soumis à trois forces \vec{F}_1 , \vec{F}_2 et \vec{F}_3 (voir la figure 6.4). Si deux d'entre elles sont connues (par exemple \vec{F}_1 et \vec{F}_2), on déduit la troisième grâce à (6.1) qui donne

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2. \quad (6.7)$$

Si seule une d'entre elle est connue, par exemple \vec{F}_1 , (6.1) ne suffit plus car, on ne peut trouver deux inconnues à partir d'une égalité. Supposons que \vec{F}_1 soit connue, que la direction de \vec{F}_2 soit connu et que \vec{F}_3 soit inconnue, mais de point d'application connu.

6.3.1. Méthode par le calcul

Pour la méthode par le calcul, il faut supposer de plus, le sens de \vec{F}_2 connu. Nous allons utiliser (6.6) qui nous donne

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_O(\vec{F}_2) + \mathcal{M}_O(\vec{F}_3) = 0 \quad (6.8)$$

Dans cette équation, il y a deux inconnues. Le point O étant quelconque, il nous faut le choisir de façon à annuler l'un des deux termes $\mathcal{M}_O(\vec{F}_2)$ ou $\mathcal{M}_O(\vec{F}_3)$. Choisissons O quelconque sur la droite d'application² de \vec{F}_3 ; alors

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}_3) = 0,$$

et donc

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_O(\vec{F}_2) = 0.$$

Puisque que la direction de \vec{F}_2 est connue, on peut déterminer son bras de levier d_2 , par rapport à O . Puisque que \vec{F}_1 est connue, on peut déterminer son bras de levier d_1 , par rapport à O . On a donc

$$\pm F_1 d_1 \pm F_2 d_2 = 0, \quad (6.9)$$

avec les signes corrects. De cela, on déduit la valeur de F_2

$$F_2 = \pm \frac{d_1}{d_2} F_1 \quad (6.10)$$

et donc la force \vec{F}_2 (grâce à sa norme, sa direction et son sens). Grâce aux connaissances de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 , on pourrait calculer \vec{F}_3 grâce à (6.7). Notons aussi que dans (6.9), un des moments doit être positif l'autre doit être négatif, de sorte que cette équation est équivalente à

$$F_1 d_1 - F_2 d_2 = 0,$$

et ainsi (6.10) devient

$$F_2 = \frac{d_1}{d_2} F_1$$

et on a bien une norme F_2 positive. Si on trouve

$$F_1 d_1 + F_2 d_2 = 0, \quad (6.11)$$

l'une des normes est négative, ce qui est absurde. Dans ce cas, on a fait une erreur de signe pour l'un des moments!

Si on a affaire à un système soumis à n forces, $(\vec{F}_i)_{1 \leq i \leq n}$ que la première (\vec{F}_1) est connue, que la direction et le sens de la seconde (ou son bras de levier) (\vec{F}_2) sont connus, que la troisième (\vec{F}_3) est connue et que toutes les autres $(\vec{F}_i)_{4 \leq i \leq n}$ sont connues, on peut naturellement utiliser la même méthode pour déterminer \vec{F}_2 et éventuellement \vec{F}_3 .

6.3.2. Méthode graphique

Nous reprenons maintenant la détermination purement graphique de \vec{F}_2 et \vec{F}_3 dans le seul cas valide où *seules trois* forces sont appliquées au système.

2. Souvent, on prendra O au point d'application de \vec{F}_3 .

6.3.2.1. *Cas où les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 ont des droites d'application sécantes.*

Dans ce cas, on peut considérer O l'intersection de ces deux droites d'action (c'est-à-dire la droite D_1 , portée par \vec{F}_1 et passant respectivement par le point d'application, connue, et la droite D_2 , portant \vec{F}_2 et passant par son point d'application, connue). Nécessairement, la droite d'application de \vec{F}_3 sont concourantes et passent toutes les trois par O . En effet, soit d_3 le bras de levier de \vec{F}_3 par rapport à O . D'après (6.8), il vient

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_O(\vec{F}_2) \pm d_3 F_3.$$

Puisque O appartient aux deux droites d'actions de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 , les deux bras de levier de ces forces par rapport à O sont donc nuls, ainsi que leur moment et on a donc

$$\pm d_3 F_3 = 0.$$

On peut supposer F_3 non nul (sinon, seules deux forces sont appliquées) et ainsi $d_3 = 0$ et donc O appartient aussi à la droite d'action de \vec{F}_3 .

On trace donc la droite D_3 , passant par O et le point d'application de la force \vec{F}_3 , qui est donc la droite portant \vec{F}_3 . On sait que

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -F_1, \quad (6.12)$$

est connue. On cherche ensuite à construire \vec{F}_2 et \vec{F}_3 portées par des droites connues.

La relation (6.12) nous permet d'affirmer que (voir figure 6.7) que $ABCO$ est un parallélogramme et donc que (AB) est parallèle à $(OC) = D_3$. Il suffit donc de tracer la droite parallèle à D_3 passant par B ; elle coupe D_2 en A , ce qui définit le vecteur $\vec{OA} = \vec{F}_2$. De même, (BC) est parallèle à $(OA) = D_2$. Il suffit donc de tracer la droite parallèle à D_2 passant par B ; elle coupe D_3 en C , ce qui définit le vecteur $\vec{OC} = \vec{F}_3$. En d'autres termes, on projette le vecteur $-\vec{F}_1$ sur la droite D_2 , parallèlement à D_3 : on obtient le vecteur \vec{F}_3 . De même, on projette le vecteur $-\vec{F}_1$ sur la droite D_3 , parallèlement à D_2 : on obtient le vecteur \vec{F}_2 . On reporte ensuite ces vecteurs aux points d'application connus.

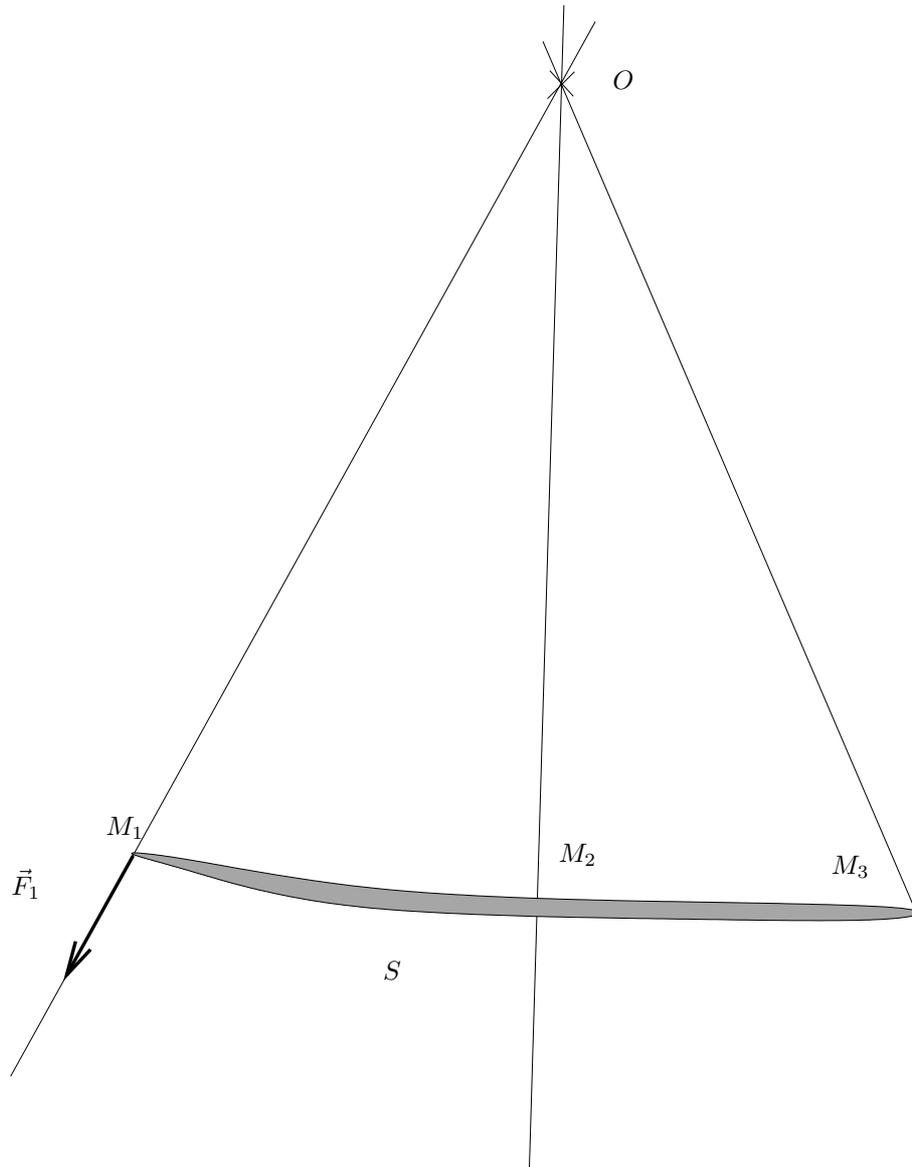


FIGURE 6.5. Un système soumis à trois forces : détermination de la direction de \vec{F}_3 .

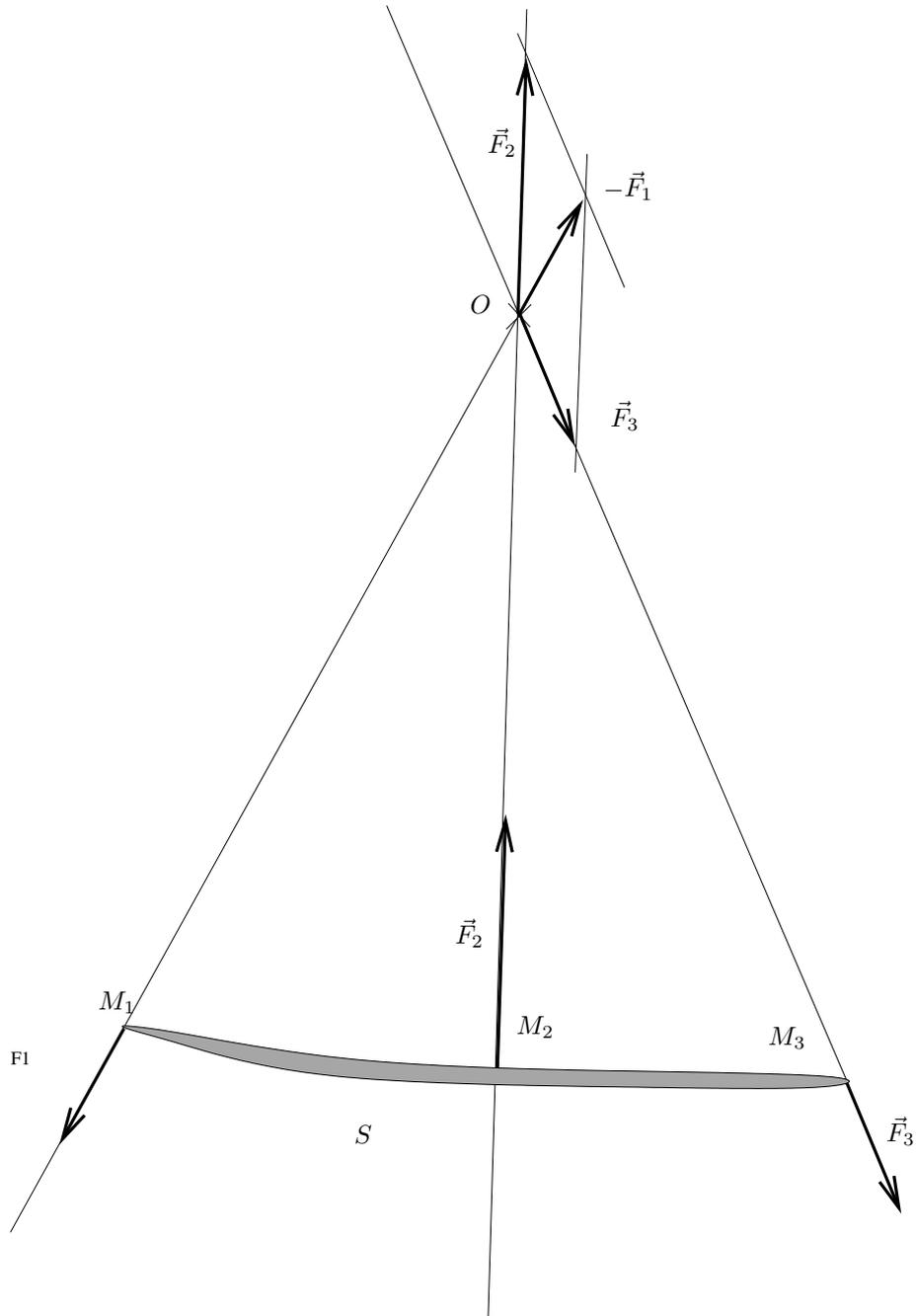


FIGURE 6.6. Un système soumis à trois forces : détermination de la détermination de \vec{F}_2 et \vec{F}_3 .

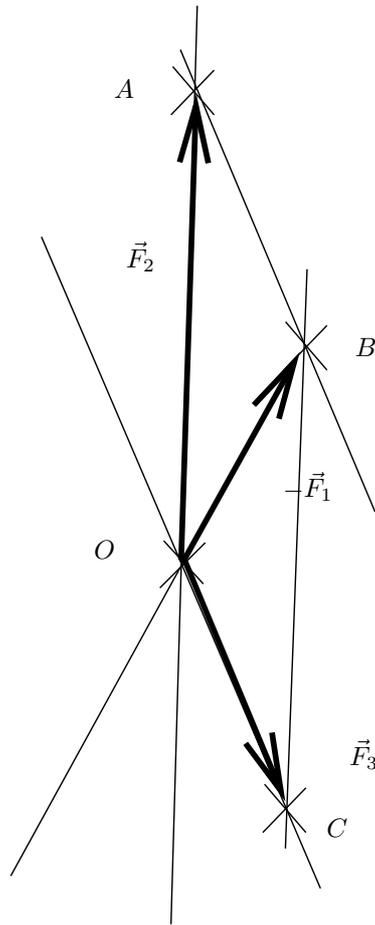


FIGURE 6.7. Un système soumis à trois forces : détermination de la détermination de \vec{F}_2 et \vec{F}_3 par le parallélogramme $ABCO$.

EXEMPLE 6.2.



FIGURE 6.8. Un grimpeur dans un dévers.

Considérons un grimpeur en escalade, sous en dévers. Pour simplifier, on supposera que l'action de la corde est négligable et qu'il a posé un seul pied sur la parois et qu'une seule main le retient (voir photo 6.8³). On note $\vec{F}_1 = m\vec{g}$, la force connue, égale ici au poids, représentée en vert sur la photo de la figure 6.9 page suivante. On note \vec{F}_2 , la force exercée par la falaise sur le pied au point d'application M_2 et \vec{F}_3 , la force exercée par la falaise sur la main⁴ au point d'application M_3 . Supposons connue la direction D_2 de \vec{F}_2 , comme le montre la photo 6.9 page suivante, où cette droite est représentée en rouge.

Appliquer la méthode précédemment vue pour déterminer \vec{F}_2 et \vec{F}_3 .

La construction progressive est donnée sur les photos des figures 6.10 à 6.12.

3. L'url de la photo est

<http://odaces.com/onewebstatic/e67631965b-escalade-4.jpg>

issue du site

<http://odaces.com/escalade/escalade-cachan.html>

4. Il semblerait en fait que ce grimpeur soit en train de faire un relais, vaché ; mais on simplifiera la situation en oubliant cette corde !



FIGURE 6.9. Un grimpeur dans un dévers : le poids (en vert) et la droite d'action de la force exercée par la falaise sur le pied (en rouge).



FIGURE 6.10. Un grimpeur dans un dévers : construction de l'opposé du poids et des droites d'action des forces exercée par la falaise sur le pied et la main (en rouge et rose)). Construction du parallélogramme des forces.



FIGURE 6.11. Un grimpeur dans un dévers : construction des forces exercée par la falaise sur le pied et la main (en rouge et rose)).



FIGURE 6.12. Un grimpeur dans un dévers : translation des forces exercée par la falaise sur le pied et la main (en rouge et rose)) aux niveaux des points d'application.

6.3.2.2. *Cas où les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 ont des droites d'application parallèles.*

Cas non encore rédigé.

6.4. Équilibre optimal d'un système soumis à trois forces

On reprend un système soumis à trois forces \vec{F}_1 , \vec{F}_2 et \vec{F}_3 . On suppose cette fois-ci que \vec{F}_1 est connue mais que \vec{F}_2 et \vec{F}_3 sont inconnues.

Cette fois-ci la direction de \vec{F}_2 est connue, mais nous allons la déterminer de telle sorte que la force \vec{F}_2 , *a priori* inconnue, soit la plus faible possible. L'application à l'escalade sera traitée dans les exemples 6.3 et 6.4.

Utilisons de nouveau la formule (6.8). Nous cherchons à faire disparaître le moment de la force \vec{F}_3 . Si on choisit $O = M_3$, le point d'application de \vec{F}_3 , le moment $\mathcal{M}_O(\vec{F}_3)$ est nul et il vient

$$\mathcal{M}_{M_3}(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_{M_3}(\vec{F}_2) = 0.$$

Puisque \vec{F}_1 est connu, on écrit

$$\mathcal{M}_{M_3}(\vec{F}_2) = -\mathcal{M}_{M_3}(\vec{F}_1).$$

On utilise la formule (6.5) avec $\alpha = \widehat{(\vec{M}_3M_2, \vec{F}_2)}$:

$$M_3M_2F \sin \alpha = -\mathcal{M}_{M_3}(\vec{F}_1). \quad (6.13)$$

6.4.1. Méthode graphique

Si α n'est pas un multiple de π , l'équation (6.13) fournit :

$$F_2 = \frac{|\mathcal{M}_{M_3}(\vec{F}_1)|}{|\sin \alpha| M_2M_3}.$$

Pour avoir F_2 minimal, il est nécessaire et suffisant que le dénominateur soit maximal : $|\sin \alpha|$, correspond à α multiple pair de $\pi/2$ (dans ce cas non multiple de π), c'est-à-dire encore, \vec{F}_2 et (M_2M_3) perpendiculaire. On retrouve le fait qu'une force produit le moment par rapport à un point est le plus important dans le cas où elle est perpendiculaire à la droite qui joint son point d'application et ce point. Bref, pour avoir F_2 minimal, il est nécessaire et suffisant que D_2 , la droite d'action de \vec{F}_2 , soit perpendiculaire à (M_2M_3) ; cette direction est connue et on peut se ramener au cas précédent de la section 6.3!

EXEMPLE 6.3.



FIGURE 6.13. Un grimpeur dans un dévers : le poids (en vert) et la droite main-pied (M_2M_3) (en blanc).

On reprend l'exemple 6.2. On note $\vec{F}_1 = m\vec{g}$, la force connue, égale ici au poids, représentée en vert sur la photo de la figure 6.8 page 11. On note \vec{F}_2 , la force exercée par la falaise sur la main au point d'application M_2 et \vec{F}_3 , la force exercée par la falaise sur le pied au point d'application M_3 . On cherche maintenant la situation la moins fatigante et la plus efficace pour lui : minimiser l'action F_2 de la main, quitte à tout reporter sur le pied. La droite main-pied (M_2M_3) est tracée en blanc sur la photo de la figure 6.13.

Appliquer la méthode précédemment vue pour déterminer \vec{F}_2 et \vec{F}_3 à partir de la figure 6.13.

La construction progressive est donnée sur les photos des figures 6.14 à 6.16.

Un problème resterait à étudier : l'adhérence de la falaise au niveau de la main et du pied. Pour la main, la force \vec{F}_2 peut s'appliquer si la prise est correcte et dans le bon sens. En revanche, pour la force F_3 , il resterait à étudier l'adhérence entre le pied et la falaise, qui dépend là-aussi de l'inclinaison de la prise, mais aussi du frottement entre les chaussons et cette prise, et qui fait intervenir la direction $i(\vec{F}_3)$. Voir annexe B. On pourra aussi consulter [Van].



FIGURE 6.14. Un grimpeur dans un dévers : Construction de la réaction optimale (1/3).



FIGURE 6.15. Un grimpeur dans un dévers : Construction de la réaction optimale (2/3).

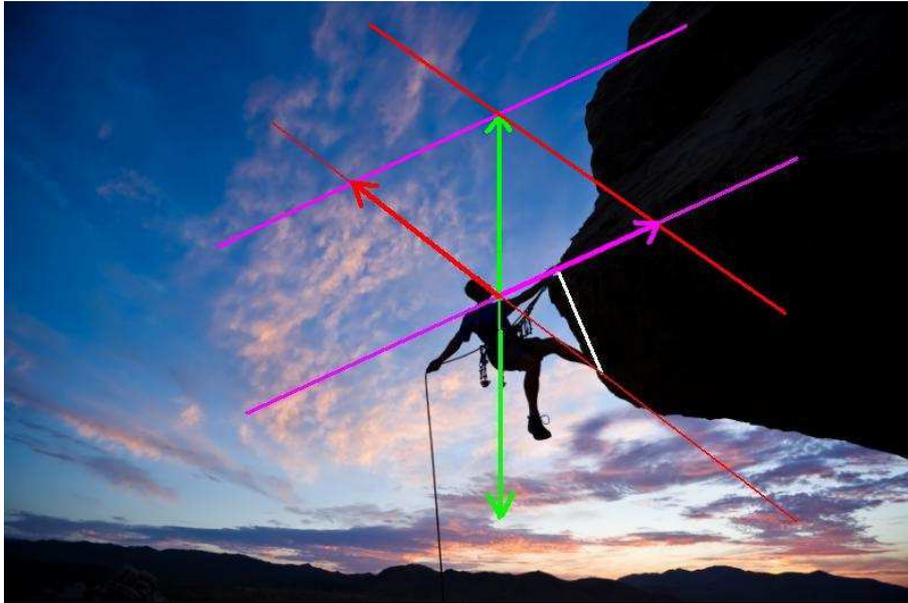


FIGURE 6.16. Un grimpeur dans un dévers : Construction de la réaction optimale (3/3).

6.4.2. Méthode par le calcul

EXEMPLE 6.4. Reprenons l'exemple 6.3. On sait que

$$\mathcal{M}_{M_3}(\vec{F}_1) = mgM_1M_3 \sin\left(\widehat{(\vec{M}_3M_1, \vec{g})}\right).$$

On peut montrer que

$$\widehat{(\vec{M}_3M_1, \vec{g})} = \delta + \theta$$

où

$$\delta = \widehat{(\vec{M}_2M_3, \vec{M}_1M_3)}, \quad (6.14a)$$

et

$$\theta = \widehat{(\vec{g}, \vec{M}_2M_3)}. \quad (6.14b)$$

La formule (6.13) donne donc

$$M_3M_2F \sin \alpha = -mgM_1M_3 \sin(\delta + \theta)$$

ce qui implique

$$F_2 = -\frac{mgM_1M_3 \sin(\delta + \theta)}{M_2M_3 \sin \alpha}$$

Puisque $\alpha = \pm\pi/2$ et que, dans cette formule $F_2 \geq 0$, on a donc nécessairement

$$\alpha = \text{signe}(\sin(\delta + \theta)) \frac{\pi}{2}, \quad (6.15)$$

et

$$F_2 = \frac{M_1M_3}{M_2M_3} mg |\sin(\delta + \theta)|. \quad (6.16)$$

On peut aussi déterminer l'angle de vecteur

$$i(\vec{F}_2) = \widehat{(\vec{i}, \vec{F}_2)},$$

où (\vec{i}, \vec{j}) sont les deux vecteurs du repère orthonormé ; il est défini à 2π près et dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (ce n'est pas un angle de droites défini à π près comme dans les caractéristiques des vecteurs) et vérifie

$$\vec{F}_2 = F_2 \left(\cos(i(\vec{F}_2)) \vec{i} + \sin(i(\vec{F}_2)) \vec{j} \right). \quad (6.17)$$

On peut montrer que

$$i(\vec{F}_2) = \frac{\pi}{2} (1 - \text{signe}(\sin(\delta + \theta))) + \theta \quad (6.18)$$

Ainsi, le vecteur \vec{F}_2 est entièrement défini et on peut calculer \vec{F}_3 donné par

$$\vec{F}_3 = -m\vec{g} - \vec{F}_2 \quad (6.19)$$

et en déduire F_3 et $i(\vec{F}_3)$. De façon pratique, on mesure θ et δ et M_1M_3 , M_1M_3 sur la photo de la figure 6.13.

Par exemple, on mesure approximativement

$$\frac{M_1M_3}{M_2M_3} \approx 1.45/1.55 = 0.935, \quad (6.20a)$$

$$\delta \approx 47.17^\circ, \quad (6.20b)$$

$$\theta \approx 20.69^\circ. \quad (6.20c)$$

Pour

$$m = 70.00, \quad (6.21a)$$

$$g = 10.00, \quad (6.21b)$$

on obtient

$$F_2 = 606.56 \text{ N}, \quad (6.22a)$$

$$i(\vec{F}_2) = 20.69^\circ, \quad (6.22b)$$

$$F_3 = 746.88 \text{ N}, \quad (6.22c)$$

$$i(\vec{F}_3) = 139.44^\circ. \quad (6.22d)$$

ce qui est conforme avec la construction de la figure 6.16.

Supposons maintenant que l'on fasse varier θ dans $[-\pi/2, \pi]$, en supposant la falaise rectiligne et de direction (M_2M_3) et que le grimpeur ne change pas de position.

- (1) Si on choisit $\theta = -90.00^\circ$, ce qui correspond à une falaise horizontale, le grimpeur étant au-dessus (situation guère intéressante pour le grimpeur!), on obtient

$$\begin{aligned} F_2 &= 445.20 \text{ N}, \\ i(\vec{F}_2) &= 90.00^\circ, \\ F_3 &= 254.80 \text{ N}, \\ i(\vec{F}_3) &= 90.00^\circ. \end{aligned}$$

- (2) Si on choisit $\theta = -45.00^\circ$, ce qui correspond à une falaise en biais, le grimpeur étant au-dessus (situation guère intéressante pour le grimpeur!), on obtient

$$\begin{aligned} F_2 &= 24.76 \text{ N}, \\ i(\vec{F}_2) &= -45.00^\circ, \\ F_3 &= 717.72 \text{ N}, \\ i(\vec{F}_3) &= 91.40^\circ. \end{aligned}$$

- (3) Si on choisit $\theta = 0^\circ$, ce qui correspond à une falaise verticale, le grimpeur étant à gauche (situation qui commence à être intéressante pour le grimpeur!), on obtient

$$\begin{aligned} F_2 &= 480.22 \text{ N}, \\ i(\vec{F}_2) &= 0^\circ, \\ F_3 &= 848.89 \text{ N}, \\ i(\vec{F}_3) &= 124.45^\circ. \end{aligned}$$

- (4) Si on choisit $\theta = 45.00^\circ$, ce qui correspond à une falaise en dévers et en biais, le grimpeur étant en-dessous (situation intéressante pour le grimpeur!), on obtient

$$\begin{aligned} F_2 &= 654.37 \text{ N}, \\ i(\vec{F}_2) &= 45.00^\circ, \\ F_3 &= 520.01 \text{ N}, \\ i(\vec{F}_3) &= 152.85^\circ. \end{aligned}$$

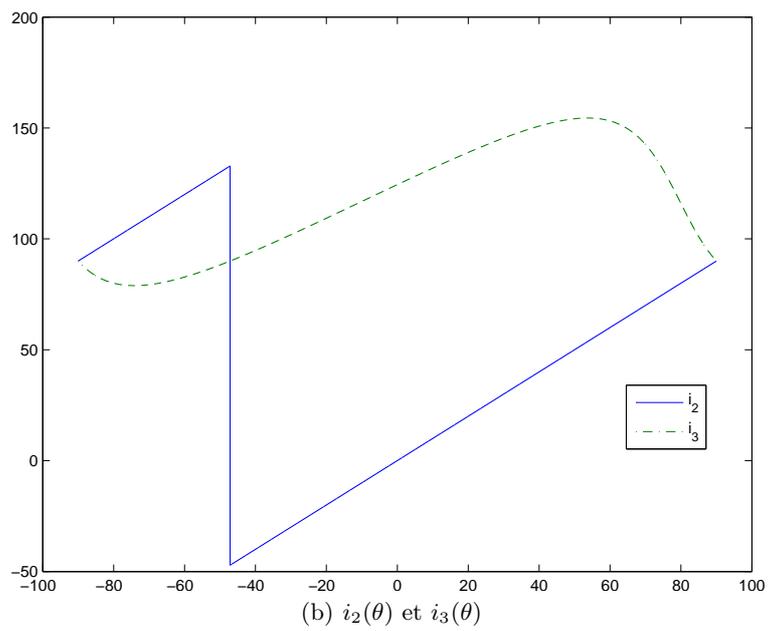
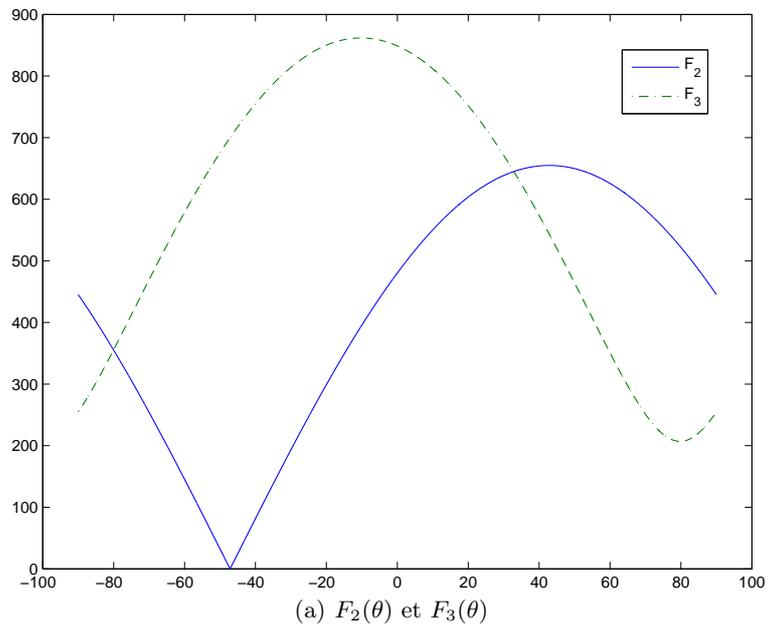
- (5) Si on choisit $\theta = 90.00^\circ$, ce qui correspond à une falaise horizontale en dévers, le grimpeur étant en-dessous (situation intéressante pour le grimpeur mais très difficile!), on obtient

$$\begin{aligned} F_2 &= 445.20 \text{ N}, \\ i(\vec{F}_2) &= 90.00^\circ, \\ F_3 &= 254.80 \text{ N}, \\ i(\vec{F}_3) &= 90.00^\circ. \end{aligned}$$

Pour synthétiser tous ces résultats, on peut tracer les 4 courbes $F_2(\theta)$, $i_2(\theta)$, $F_3(\theta)$, et $i_3(\theta)$, en fonction de $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, comme le montre la figure 6.17. On constate que la situation la plus facile (correspondant à F_2 minimum) est donnée pour $\theta = -47.2^\circ$; elle correspond à $F_2 = 0$ N. On constate que la situation la plus difficile (correspondant à F_2 maximum) est donnée pour $\theta = 42.8^\circ$; elle correspond à $F_2 = 600.0$ N.

Comme précédemment, un problème resterait à étudier : l'adhérence de la falaise au niveau du pied. Voir annexe B. On pourra aussi consulter [Van].

◇

FIGURE 6.17. courbes en fonction de θ .

Énergie (version courte)

Seuls les résultats essentiels sur l'énergie sont donnés dans le cadre de la biomécanique, essentiellement pour des systèmes indéformables. Le lecteur intéressé pourra lire l'annexe C où une présentation plus complète est faite.

7.1. Énergies potentielle, cinétique, mécanique (totale)

Toutes les énergies (potentielle, cinétique et mécanique) sont homogènes et sont exprimées en Joules.

On considère un système indéformable (par exemple, l'un des segments constituant le corps humain, considéré *sans* les actions des muscles et les actions des autres segments) humain dont on connaît

- M la masse (en kg) ;
- r le rayon de giration par rapport au centre de gravité en m ;
- z_G l'altitude du centre de gravité en m ;
- v_G la vitesse du centre de gravité en ms^{-1} ;
- ω la vitesse angulaire de rotation autour de G , par rapport à un axe fixe en rads^{-1} ;

g est la valeur du champ de gravité en ms^{-2} .

On appelle I le moment d'inertie (en kgm^2) défini par

$$I = Mr^2. \quad (7.1a)$$

L'énergie potentielle de pesanteur (en Joules (J)) est égale à

$$E_p = Mgz_G. \quad (7.1b)$$

L'énergie cinétique de translation (en Joules (J)) est égale à

$$E_{ct} = \frac{1}{2}Mv_G^2. \quad (7.1c)$$

L'énergie cinétique de rotation (en Joules (J)) est égale à

$$E_{cr} = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (7.1d)$$

L'énergie cinétique est égale à

$$E_c = E_{ct} + E_{cr}. \quad (7.1e)$$

L'énergie mécanique (totale) est égale à

$$E = E_p + E_c = E_p + E_{ct} + E_{cr} = \underbrace{Mgz_G}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}_{E_c = E_{ct} + E_{cr}} = \underbrace{Mgz_G}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2}M(v_G^2 + r^2\omega^2)}_{E_c}. \quad (7.1f)$$

7.2. Théorèmes de conservation de l'énergie mécanique

THÉORÈME 7.1. *Un système indéformable qui n'est soumis qu'à son poids est dit isolé et son énergie mécanique, entre les instants t_1 et t_2 , est constante, c'est-à-dire :*

$$E(t_2) - E(t_1) = \Delta E = 0 \quad (7.2)$$

DÉMONSTRATION. Voir preuve en section 7.3. \square

DÉFINITION 7.2 (Système isolé). De façon plus générale, un système mécanique quelconque est dit isolé si son énergie mécanique est constante et vérifie donc (7.2).

Il existe des systèmes isolés (comme les système indéformables qui ne sont soumis qu'à leur poids) et des systèmes non isolés, où les forces externes et internes apportent ou enlèvent de l'énergie mécanique, qui n'est donc plus constante.

7.3. Preuve du théorème 7.1

On se place dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On considère un système quelconque de masse M . On écrit la seconde loi de Newton au corps étudié qui n'est soumis qu'à son propre poids $\vec{p} = M\vec{g}$. Notons \vec{a} l'accélération du centre de gravité G du corps étudié. On a donc

$$M\vec{a} = M\vec{g}$$

et donc en projetant en \vec{i} et sur \vec{j} , on obtient les équations

$$Ma_x = 0, \quad (7.3a)$$

$$Ma_y = -Mg, \quad (7.3b)$$

où a_x et a_y désigne l'abscisse et l'ordonnée de l'accélération du centre de gravité du corps étudié.

On peut, comme on fera dans l'étude de la chute libre en section 8.3 page 26, résoudre ces équations. On peut aussi « les traiter de façon énergétique » en procédant comme suit.

Notons que $a_x = x''$ et que $a_y = y''$. On multiplie (7.3a) par x' et (7.3b) par y' et on somme les deux équations obtenues :

$$M(x''x' + y''y') = -Mgy'. \quad (7.4)$$

On peut remarquer que

$$((x')^2)' = 2x'x'',$$

$$((y')^2)' = 2y'y'',$$

et donc, écrire (7.4) sous la forme

$$\frac{M}{2}((x')^2 + (y')^2)' = -Mgy';$$

soit encore, en remarquant que $(x')^2 + (y')^2 = V_G^2$ et $y = z_G$

$$\left(\frac{1}{2}MV_G^2 + Mgz_G\right)' = 0 \quad (7.5)$$

Par ailleurs, notons ω la vitesse angulaire de rotation autour de G , par rapport à un axe fixe, du système étudié. Le théorème du moment cinétique nous dit que

$$I\omega' = \sum \mathcal{M}_G(\vec{F}_e), \quad (7.6)$$

où $\sum \mathcal{M}_G(\vec{F}_e)$ désigne la somme des moments des forces extérieures par rapport à G (voir chapitre 6). Le système est un solide indéformable soumis uniquement à son propre poids, appliqué à G et donc de moment nul. Ainsi,

$$I\omega' = 0, \quad (7.7)$$

et donc ω est constant et donc, en particulier,

$$\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)' = 0,$$

ce qui donne, injecté dans (7.5) :

$$\left(\frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgz_G\right)' = 0. \quad (7.8)$$

Ainsi, la quantité $E = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgz_G$ est constante, ce qui est exactement la conclusion du théorème 7.1! \diamond

Chute libre

On pourra aussi consulter l'annexe F qui contient les principales formules de la chute libre, ainsi que le corrigé de TD 8 de [Bas15c].

On pourra aussi consulter le chapitre 4 de [Bas15b].

8.1. Introduction sur la modélisation de la chute libre

Quand on étudie un système mécanique soumis à la gravitation terrestre, des tas de forces autres que la gravitation entrent en jeu : les forces de frottement de l'air (parachute), la force de l'attraction lunaire (les marées), la force de Coriolis (due à la rotation de la terre) ... Si le mouvement étudié est long, la variation de la gravitation terrestre peut aussi avoir une influence (étude du mouvement de satellites ou de planètes).

Nous allons prendre le cas le plus simple où seule la force de la gravitation terrestre est prise en compte ; valable pour des objets qui ne présentent pas trop de « prise au vent » (comme une feuille de papier) et pour des durées brèves, de telle sorte que l'on puisse négliger les frottements de l'air.

Nous ferons aussi l'hypothèse fondamentale que le repère considéré est galiléen (voir section C.2 page 103). En théorie, cette hypothèse, sur terre, est vraie pour de faibles amplitudes de durée de mouvement.

Voir par exemple la figure 1(a) page suivante qui représente la chute libre d'un sportif équipé d'un wingsuit où sont tracés la trajectoire en prenant ou non en compte la chute libre. Les deux trajectoires sont très proches (voir section 8.8). En revanche, si l'on étudie la trajectoire complète, on observe une trajectoire très différente de celle de la chute libre sans frottement (voir figure 1(b)).

On pourra consulter la section 8.8 page 36 pour voir des exemples où les frottement de l'air ne sont ni négligeables ni négligés. De toute façon, même la prise en compte des frottement est problématique, puisque la modélisation est en effet très simplifiée par rapport à la complexité du réel !

Avant de commencer les calculs, on pourra étudier l'exemple interactif, donné sous Géogébra (attendre que la feuille qui apparaît devienne interactive) :

<http://tube.geogebra.org/student/m84210>

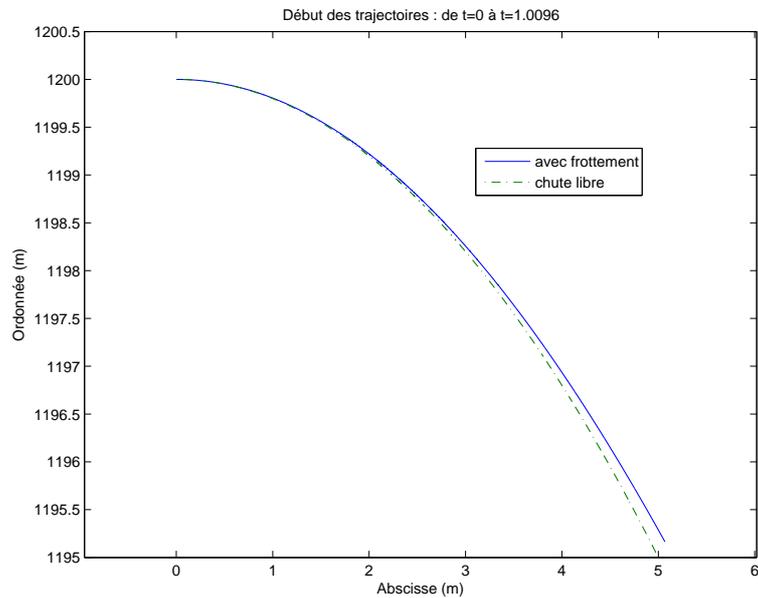
Pour toute la suite, on s'intéresse *au mouvement du centre de gravité* du système étudié.

8.2. Détermination géométrique de la parabole

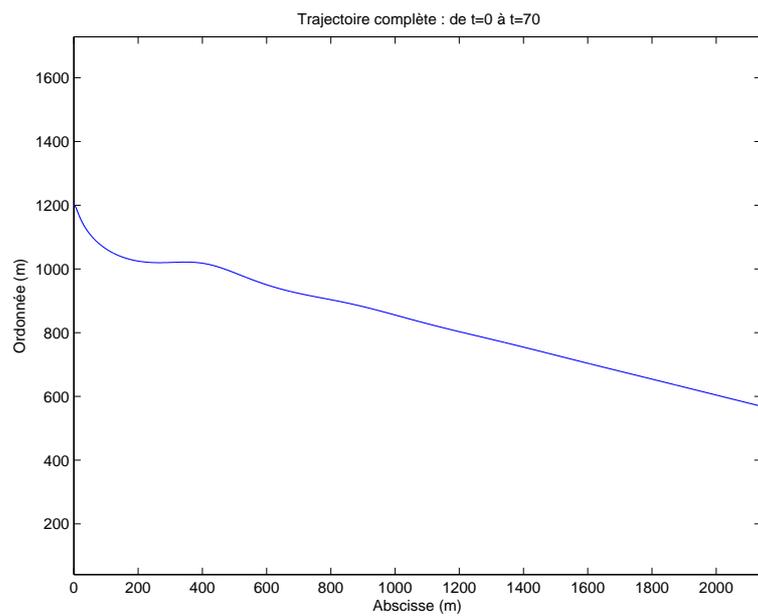
Voir annexe G. On pourra en particulier regarder le très joli lien programmé sous Géogébra¹ où sont proposées les différentes activités de cette annexe (attendre quelques instants que les scripts Géogébra soient actifs) :

<https://www.geogebra.org/m/fRw4jAQ9>

1. Merci à Christian Mercat de ce travail !



(a) Au début du mouvement



(b) Sur l'ensemble du mouvement

FIGURE 8.1. La chute du wingsuit.

8.3. Équations de la paraboles

8.3.1. Équations paramétriques (ou horaires)

On se place dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, le point O correspondant à la position initiale du solide étudié (à $t = 0$).

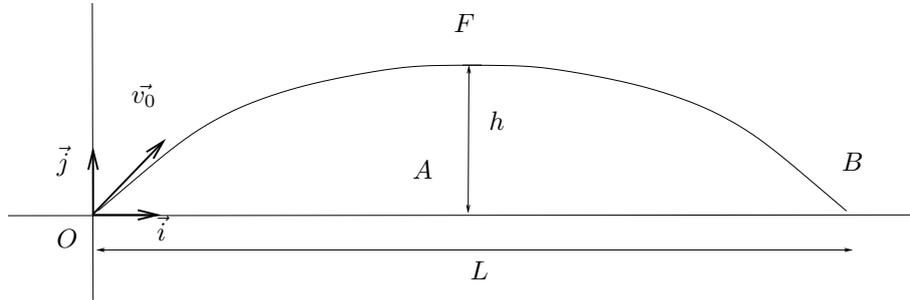


FIGURE 8.2. Les conventions adoptées.

On appelle g la constante de gravité, v_0 la norme de la vitesse initiale, qui fait un angle α avec le vecteur \vec{i} . Voir la figure 8.2.

On écrit la seconde loi de Newton au corps étudié (de masse m), qui n'est soumis qu'à son propre poids $\vec{p} = m\vec{g}$. Notons \vec{a} l'accélération du centre de gravité du corps étudié. On a donc

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

ce qui implique

$$\vec{a} = \vec{g} \quad (8.1)$$

et donc en projetant en \vec{i} et sur \vec{j} , on obtient les équations (F.1a) page 119 et (F.1b) de l'annexe F.

$$a_x(t) = 0, \quad (8.2a)$$

$$a_y(t) = -g, \quad (8.2b)$$

où a_x et a_y désignent l'abscisse et l'ordonnée de l'accélération du centre de gravité du corps étudié. Ces équations ont déjà été vues dans le TD 3! Le premier mouvement (en x) correspond à un mouvement à accélération nulle (voir equation (3.1) page 16 du corrigé de TD **[Bas15c]**). Le second mouvement (en y) correspond à un mouvement à accélération constante (voir equation (3.4) page 17 du corrigé de TD **[Bas15c]**), où $a = -g$. Il suffit donc de recopier ces équations en remplaçant a par $-g$ et v_0 respectivement par $v_{0,x}$ et $v_{0,y}$:

$$a_x(t) = 0,$$

$$a_y(t) = -g,$$

$$v_x(t) = v_{0,x},$$

$$v_y(t) = -gt + v_{0,y},$$

$$x(t) = v_{0,x}t + x_0,$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,y}t + y_0.$$

Ici x_0 et y_0 correspondent aux conditions initiales. On remarque qu'à $t = 0$, x vaut x_0 et y vaut y_0 . On choisit le repère qui coïncide avec la position de la masse étudiée à $t = 0$ de sorte que $x_0 = y_0 = 0$.

Enfin, $v_{0,x}$ et $v_{0,y}$ sont les composantes en x et en y de la vitesse initiale, de norme v_0 et d'angle α avec l'horizontale. On obtient donc les équations (3.1) et (3.4) du corrigé de TD [Bas15c] :

$$a_x(t) = 0, \quad (8.3a)$$

$$a_y(t) = -g, \quad (8.3b)$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (8.3c)$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha, \quad (8.3d)$$

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad (8.3e)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \quad (8.3f)$$

Les deux dernières équations sont dites paramétriques (ou dans notre cas particulier où le paramètre est le temps, on parle aussi d'équations horaires); elles fournissent x et y en fonction du paramètre t .

REMARQUE 8.1. On peut retrouver ces équations autrement en intégrant directement l'équation "vectorielle" (8.1) : l'intégration du vecteur \vec{a} fournit la vitesse \vec{v} et l'intégration du vecteur constant \vec{g} donne $\vec{g}t + \vec{v}_0$, où \vec{v}_0 est le vecteur vitesse à l'instant $t = 0$:

$$\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0. \quad (8.4)$$

Le vecteur vitesse \vec{v} se décompose en \vec{i} et \vec{j} sous la forme

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

De même, le vecteur \vec{g} se décompose en \vec{i} et \vec{j} sous la forme

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

À $t = 0$, les composantes de \vec{v}_0 sont $v_0 \cos \alpha$ et $v_0 \sin \alpha$ et donc

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

On obtient donc en projetant (8.4) sur \vec{i} et \vec{j} et en utilisant (8.5), (8.6) et (8.7),

$$v = v_0 \cos \alpha \text{ et } y = -gt + v_0 \sin \alpha$$

ce qui est exactement les équations (8.3c) et (8.3d). De même, en intégrant (8.4) et en écrivant que l'intégrale de \vec{v} est le vecteur déplacement \vec{OM} , qui se décompose en \vec{i} et \vec{j} sous la forme

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{OM}_0,$$

ce qui fournit (8.3e) et (8.3f).

◇

REMARQUE 8.2. *Attention*, si

$$v_0 \cos \alpha = 0 \quad (8.8)$$

il faut faire un calcul un peu différent ! Deux sous-cas :

(1)

$$\cos \alpha = 0 \quad (8.9)$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \varepsilon \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (8.10)$$

où $\varepsilon = \pm 1$ est k est un entier. On a alors $\sin \alpha = \varepsilon$ et on obtient successivement :

$$a_x(t) = 0, \quad (8.11a)$$

$$a_y(t) = -g, \quad (8.11b)$$

$$v_x(t) = 0, \quad (8.11c)$$

$$v_y(t) = -gt + \varepsilon v_0, \quad (8.11d)$$

$$x(t) = 0, \quad (8.11e)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \varepsilon v_0 t. \quad (8.11f)$$

Dans ce cas, la trajectoire est une droite !

(2) Si

$$v_0 = 0 \quad (8.12)$$

(α n'est pas défini dans ce cas), on obtient un résultat similaire :

$$a_x(t) = 0, \quad (8.13a)$$

$$a_y(t) = -g, \quad (8.13b)$$

$$v_x(t) = 0, \quad (8.13c)$$

$$v_y(t) = -gt, \quad (8.13d)$$

$$x(t) = 0, \quad (8.13e)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (8.13f)$$

Dans ce cas, la trajectoire est une droite !

◇

REMARQUE 8.3. Il est important de noter que ces équations ne font pas intervenir la masse m de l'objet. C'est la simplification de la masse dans l'accélération et dans le poids qui permet cela. Cela n'était pas immédiat à comprendre par les physiciens.

La célèbre expérience de la chute des corps depuis la tour de Pise est bien connue (il est probable qu'en fait, Galilée n'a jamais fait cette expérience depuis la tour de Pise), son objectif consiste à mesurer le temps de chute de corps de différentes masses et de différentes natures. Galilée arriva à la conclusion (aujourd'hui classique), que ce temps de chute est le même pour tous les corps, quelque soient leur poids, leur taille et leur nature. En d'autres termes, la vitesse de chute libre est la même pour tous les corps. Cela allait clairement à l'encontre de l'intuition, et Galilée l'expliquait par un raisonnement simple par l'absurde : Supposons qu'un corps plus massif tombe plus vite qu'un corps léger, alors, si on attache à l'aide d'une ficelle une grosse pierre et une petite et qu'on les lâche, la grosse pierre devrait être ralentie dans son mouvement de chute par la petite qui *a priori* tombe moins vite. Donc l'ensemble {petite pierre+grosse pierre} tombe moins vite que la grosse pierre toute seule. Or, l'ensemble {petite pierre+grosse pierre} est plus lourd que la grosse pierre toute seule, et donc devrait en fait tomber plus vite, ce qui est en contradiction avec ce que l'on a dit plus haut. Cela est donc incohérent, et notre hypothèse de départ est fautive !

Pour en savoir plus sur Galilée, voir par exemple le lien suivant :

<http://www.aim.ufr-physique.univ-paris7.fr/CHARNOZ/homepage/GRAVITATION/grav4.html> dont les quelques lignes qui précèdent sont extraites.

Naturellement, ce calcul est fondé sur le fait que seul le poids intervient et donc que les frottements de l'air sont négligeables, ce qui devient totalement faux si on fait tomber ensemble une bille de plombs et une plume : les frottements agissant sur la plume sont très importants, et cette dernière arrive bien après la bille de plomb. Sauf ... si on fait le vide d'air et que l'on fait tomber ces deux objets dans une colonne en verre dont on a préalablement enlevé l'air en y faisant le vide.

◇

8.3.2. Équations cartésiennes

On cherche maintenant une équation cartésienne sous la forme $y = f(x)$: pour cela, on cherche à éliminer t au profit de $x(t)$ dans l'équation (8.3e). Deux cas se présentent

(1)

$$v_0 \cos \alpha \neq 0. \quad (8.14)$$

Dans ce cas, on peut exprimer t en fonction de $x(t)$:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (8.15)$$

On substitue cette valeur dans (8.3f) :

$$y(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

et donc, on retrouve l'équation (F.2) de l'annexe F.

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x. \quad (8.16)$$

(2) Dans le cas où (8.8) a lieu, il faut réutiliser les formules (8.11) ou (8.13). Dans ces cas, la trajectoire est une droite qui ne peut se réduire à la forme (8.16) !

REMARQUE 8.4. Grâce à (8.3c) et (8.3d), calculons le carré de la norme de la vitesse $\vec{v}(t)$:

$$\begin{aligned} v_x^2(t) + v_y^2(t) &= (v_0 \cos \alpha)^2 + (-gt + v_0 \sin \alpha)^2, \\ &= v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha + g^2 t^2 - 2gtv_0 \sin \alpha, \\ &= v_0^2 - 2g \left(-\frac{1}{2}gt^2 + tv_0 \sin \alpha \right). \end{aligned}$$

On remplace la quantité $-\frac{1}{2}gt^2 + tv_0 \sin \alpha$ par $y(t)$ grâce à (8.3f) :

$$= v_0^2 - 2gy(t).$$

On a donc

$$\frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m(v_0^2 - 2gy(t)),$$

soit encore

$$\frac{1}{2}mv^2(t) + mgy(t) = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Reprenons maintenant les théorèmes énergétiques du chapitre 7 .

- Le terme $\frac{1}{2}mv^2(t)$ correspond à l'énergie cinétique de translation de la masse m .
- Elle n'a pas d'énergie cinétique de rotation.
- Le terme $mgy(t)$ correspond à l'énergie potentielle de pesanteur.
- Enfin, à $t = 0$, $\frac{1}{2}mv_0^2$ correspond à l'énergie cinétique et l'énergie potentielle est nulle.

Bref, on a montré que

$$E(t) = E(0).$$

Bref, l'énergie mécanique totale est constante ! Le système mécanique est donc mécaniquement isolé. Si l'on prend en compte les frottements de l'air, ce n'est plus vrai.

◇

8.4. Caractéristiques de la parabole

8.4.1. "Portée" L

Notons, comme sur la figure 8.2 page 27, L la distance horizontale parcourue, c'est-à-dire l'abscisse correspondant à y nul. On cherche donc $L = x$ la valeur correspondant à $y = 0$. D'après (8.16), on a donc :

$$\begin{aligned} 0 = y &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x, \\ &= x \left(-\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul ; on a donc deux solutions :

- soit $x = 0$, ce qui donne l'origine du mouvement, solution physiquement acceptable, mais ce n'est pas celle que l'on cherche !

- soit

$$-\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha = 0$$

ce qui donne successivement

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x = -\tan \alpha &\iff \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x = \tan \alpha, \\ &\iff gx = 2 \tan \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha, \\ &\iff x = 2 \frac{\tan \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}, \\ &\iff x = 2 \frac{\sin \alpha v_0^2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha g}, \\ &\iff x = 2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha v_0^2}{g}, \end{aligned}$$

et puisque $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$

$$\iff x = \frac{\sin(2\alpha) v_0^2}{g}$$

Bref, on retrouve l'équation (F.3) de l'annexe F : cette distance vaut L :

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad (8.17)$$

REMARQUE 8.5. Si, en tirant au niveau du sol, avec une vitesse v_0 donnée et fixée, la plus grande portée possible correspond à L maximal, soit $\sin(2\alpha) = 1$, soit $2\alpha = \pi/2$ soit

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad (8.18)$$

angle bien connu des lanceurs d'objets ! Plus de détails dans la remarque I.3 page 172.

8.4.2. "Hauteur" h

Au sommet de la parabole (à la "flèche"), la composante verticale de la vitesse est nulle ; avant, elle est positive, après, elle est négative. On a donc

$$v_y(t) = 0.$$

Déterminons donc le demi-temps de vol t (temps pour parcourir la partie de la parabole de 0 à F , la flèche) : d'après (8.3d), on a donc

$$0 = v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha$$

et donc

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (8.19)$$

On remarque que l'on retrouve bien la valeur de t_2 donnée par (F.5). On réinjecte cette valeur dans (8.3f) et on trouve :

$$y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right),$$

soit

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}, \\ &= -\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}, \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right), \end{aligned}$$

et donc

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (8.20)$$

On remarque que l'on retrouve bien la valeur de h donnée par (F.4).

REMARQUE 8.6. Une autre façon de procéder est d'amettre par symétrie que, l'ordonnée du sommet de la parabole correspondant à $x = L/2$, où L est donné par (8.17), que l'on réécrit :

$$\frac{L}{2} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}. \quad (8.21)$$

On réinjecte cette valeur dans (8.16) :

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \right)^2 + \tan \alpha \left(\frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \right).$$

On a donc successivement :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \frac{v_0^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}, \\ &= -\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}, \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{aligned}$$

◇

REMARQUE 8.7. Une deuxième autre façon de procéder et d'utiliser l'équation cartésienne (8.16) et d'écrire qu'au sommet de la parabole, $y'(x) = 0$, ce qui donne

$$-\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha = 0,$$

et donc

$$x = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g},$$

On retrouve donc bien la valeur donnée par (8.21) et le calcul se finit donc de la même façon que dans la remarque 8.6.

◇

REMARQUE 8.8.

Une troisième autre façon de déterminer la hauteur, plus rapidement, est d'utiliser la conservation de l'énergie, démontrée dans la remarque 8.4 page 30. On écrit que cette énergie est constante entre le début de la trajectoire et le sommet, ce qui donne :

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g h = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

soit encore

$$v^2 + 2gh = v_0^2,$$

On écrit $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ et on utilise (8.3c) : on a donc

$$v_0^2 \cos^2 \alpha + v_y^2 + 2gh = v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha,$$

soit encore

$$v_y^2 + 2gh = v_0^2 \sin^2 \alpha,$$

Or, au sommet de la trajectoire, on a $v_y = 0$ et donc

$$2gh = v_0^2 \sin^2 \alpha,$$

soit

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

et l'on retrouve bien la valeur de h donnée par (F.4).

◇

8.5. Exemple de mouvement de chute libre contraint

8.5.1. Plan incliné

Reprenons l'exemple du plan incliné, étudié au cours du tutorat (voir exercice 4.28, page 52 du polycopié du tutorat [Bas15b]).

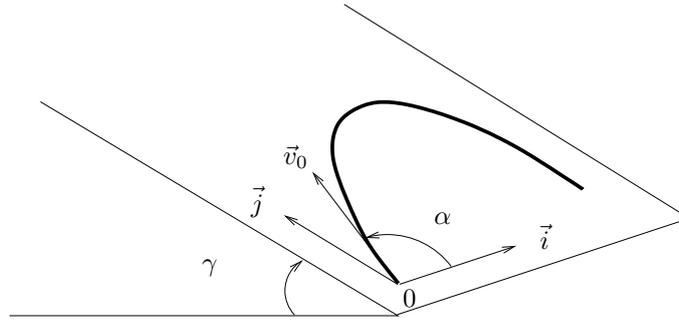


FIGURE 8.3. Le plan incliné.

On s'intéresse maintenant à l'expérience que vous avez déjà peut être vue au lycée, celle du palet lancé sur un plan incliné (voir figure 8.3). Celui-ci est muni d'un dispositif qui propulse de l'air sous lui et lui permet d'évoluer avec des forces de frottements très faibles, qui sont donc négligées par la suite. De même, les forces de frottement de l'air sont négligées. Comme précédemment, on note (x, y) les coordonnées du centre de gravité M du palet dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , de telle sorte qu'au début du mouvement, le point M soit confondu avec O (voir figure 8.3). La palet est donc soumis à la réaction d'appuis \vec{R} , exercée par le plan incliné.

On appelle γ , l'angle entre l'horizontale et le plan incliné. Comme précédemment, notons α , l'angle entre \vec{i} et la vitesse initiale \vec{v}_0 .

Exactement comme au début de la section 8.3.1 page 26, on obtient

$$m\vec{a} = m\vec{g},$$

où $\vec{a} = (x'', y'')$.

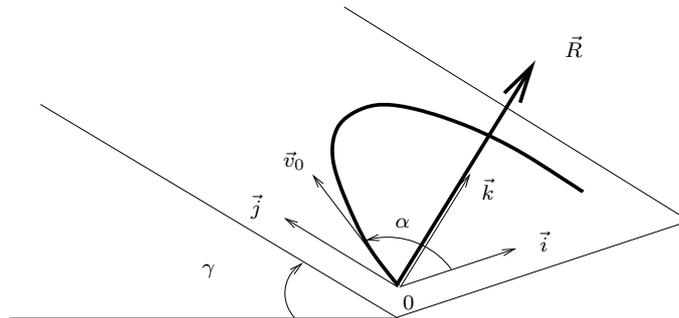


FIGURE 8.4. Le plan incliné, le repère direct orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et la réaction d'appuis \vec{R} .

En fait, on peut considérer les trois coordonnées (x, y, z) où z est la composante sur le troisième vecteur \vec{k} , telle que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit un repère direct orthonormé (Voir figure 8.4) et écrire

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}, \quad (8.22)$$

où $\vec{a} = (x'', y'', z'')$. Comme dans l'exemple de la section C.7.3 page 112, l'absence de frottement entre le plan et le palet implique que la force \vec{R} est perpendiculaire au plan incliné et donc portée par le vecteur \vec{k} . Ainsi, si on projette l'équation (8.22) sur \vec{k} , on obtient

$$a_z(t) = z''(t) = -(\cos \gamma)mg + R. \quad (8.23)$$

L'hypothèse fondamentale est que le palet reste sur le plan et donc z est nul! Ainsi, (8.24) implique

$$R = mg \cos \gamma, \quad (8.24)$$

ce qui implique que R est positif. Si $\gamma = 90^\circ$, R est nul, ce qui physiquement, correspond à une vraie chute libre. Si $\gamma = 0$, $R = mg$, donc égale au poids du palet, ce qui physiquement n'est pas très intéressant non plus. Enfin, si on projette (8.22) sur \vec{i} et \vec{j} , on obtient bien, puisque \vec{R} n'a pas de composante sur \vec{i} et \vec{j} , les équations qui suivent (8.25). \diamond

$$a_x(t) = x''(t) = 0, \quad (8.25a)$$

$$a_y(t) = y''(t) = -(\sin \gamma)g. \quad (8.25b)$$

En guise de première lecture, ces équations sont admises. On constate qu'elles sont exactement équivalentes à (8.2), hormis le fait que g est remplacée par $(\sin \gamma)g$. Bref, on a montré :

THÉORÈME 8.9. *Sur un plan incliné d'angle γ , on obtient les mêmes équations que la chute libre, sauf que g est remplacée par $(\sin \gamma)g$.*

On pourra donc utiliser toutes les équations de la chute libre de ce chapitre en remplaçant g par $(\sin \gamma)g$.

Comme dans la note page 33, on constate que si $\gamma = 90^\circ$, la gravité est donc g , ce qui correspond à une vraie chute libre. Si $\gamma = 0$, la gravité est nulle ce qui physiquement n'est pas très intéressant non plus. Dans le cas où $\gamma \in]0, 90[$, alors la gravité $(\sin \gamma)g$ est dans $]0, g[$ et on a donc une réduction artificielle de la gravité!

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME 8.10. *Sur un plan incliné d'angle γ , la trajectoire décrite par le solide est une parabole (où g est remplacée par $(\sin \gamma)g$).*

8.5.2. Rail

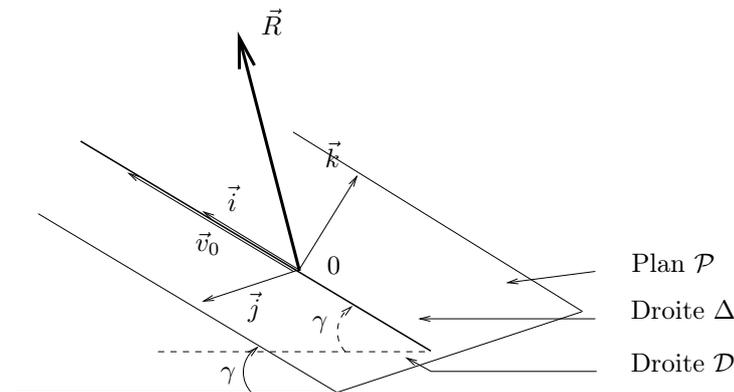


FIGURE 8.5. Un solide évoluant sur un rail. Par souci de clarté, on a indiqué sur cette figure, la droite Δ , qui porte le rail, la droite \mathcal{D} , projetée orthogonale de la droite Δ sur le plan horizontal et le plan \mathcal{P} , qui contient la droite Δ et qui est perpendiculaire au plan contenant \mathcal{D} et Δ . Le vecteur \vec{i} est porté par Δ et \vec{j} est perpendiculaire à Δ , dans le plan \mathcal{P} .

Considérons maintenant un solide évoluant sur un rail, qui ne permet qu'un seul mouvement, le long de ce rail, ce rail étant incliné d'un angle γ par rapport à l'horizontale (voir figure 8.5). Comme dans la section 8.5.1, on note x , l'unique coordonnée du centre de gravité M du palet dans le repère (O, \vec{i}) , de sorte que $\vec{OM} = x\vec{i}$.

De plus, au début du mouvement, le point M est confondu avec O . La vitesse \vec{v}_0 ne peut donc qu'être colinéaire à \vec{i} . La palet est donc soumis à la réaction d'appuis \vec{R} , exercée par le rail.

Comme dans la note page 33, on peut considérer les trois coordonnées (x, y, z) où y et z sont les composante sur les vecteurs \vec{j} et \vec{k} , tels que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit un repère direct orthonormé (Voir figure 8.5) et écrire

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}, \quad (8.26)$$

où $\vec{a} = (x'', y'', z'')$. Comme dans l'exemple de la section C.7.3 page 112, l'absence de frottement entre le plan et le palet implique que la force \vec{R} est perpendiculaire au rail et donc portée par les vecteurs \vec{j} et \vec{k} . On a donc

$$\vec{R} = R_y\vec{j} + R_z\vec{k}. \quad (8.27)$$

Ainsi, si on projette l'équation (8.26) sur \vec{j} , on obtient

$$a_y(t) = y''(t) = R_y. \quad (8.28)$$

L'hypothèse fondamentale est que le palet reste sur le rail et donc y est nul! Ainsi, (8.28) implique

$$R_y = 0. \quad (8.29)$$

De même, si on projette (8.26) sur \vec{k} , on obtient comme dans le cas du plan incliné

$$a_z(t) = z''(t) = R_z - (\cos \gamma)mg. \quad (8.30)$$

L'hypothèse fondamentale est que le palet reste sur le rail et donc z est nul! Ainsi, (8.30) implique

$$R_z = (\cos \gamma)mg. \quad (8.31)$$

Enfin, si on projette (8.26) sur \vec{i} , on obtient bien, puisque \vec{R} n'a pas de composante sur \vec{i} , l'équation qui suit (8.32). \diamond

$$a_x(t) = x''(t) = -(\sin \gamma)g. \quad (8.32)$$

En guise de première lecture, cette équation est admise. On constate qu'elle est exactement équivalente à (8.2b), hormis le fait que g est remplacée par $(\sin \gamma)g$ et que y est remplacée par x . Bref, on a montré :

THÉORÈME 8.11. *Sur un rail incliné d'angle γ , on obtient la même équation que la chute libre, sauf que l'on a une seule composante x et que g est remplacée par $(\sin \gamma)g$.*

On pourra donc utiliser toutes les équations de la chute libre de la section 8.3.1 en remplaçant g par $(\sin \gamma)g$. L'angle α est formellement égal à 90° ! Bien entendu, ici on n'a pas d'équations cartésienne de la parabole (cf. section 8.3.2) : la trajectoire est ici une droite! Les équations (8.3) sont donc remplacées par

$$a_x(t) = -(\sin \gamma)g, \quad (8.33a)$$

$$v_x(t) = -(\sin \gamma)gt + v_0, \quad (8.33b)$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}(\sin \gamma)gt^2 + v_0 t. \quad (8.33c)$$

On suppose que γ est non nul.

La notion de portée L de la section 8.4.1 page 30 n'a pas de sens ici! En revanche, la notion de hauteur h de la section 8.4.2 page 31 prend tous son sens si v_0 est positif! En effet, dans ce cas, le solide va s'élever le long du rail, s'arrêter puis redescendre. Au sommet du mouvement, la vitesse est nulle. On a donc

$$v_x(t) = 0.$$

Déterminons donc le demi-temps de vol t (temps pour parcourir la partie du mouvement de 0 au sommet) : d'après (8.3d), on a donc

$$0 = v_x(t) = -(\sin \gamma)gt + v_0$$

et donc, on retrouve l'analogie de la formule (8.19) :

$$t = \frac{v_0}{(\sin \gamma)g} \quad (8.34)$$

On réinjecte cette valeur dans (8.33c) et on trouve :

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}(\sin \gamma)g \left(\frac{v_0}{(\sin \gamma)g} \right)^2 + v_0 \left(\frac{v_0}{(\sin \gamma)g} \right), \\ &= -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{(\sin \gamma)g} + \frac{v_0^2}{(\sin \gamma)g}, \end{aligned}$$

et donc on retrouve (8.20) avec $\alpha = 90$ et g remplacé par $(\sin \gamma)g$:

$$h = \frac{v_0^2}{2(\sin \gamma)g}. \quad (8.35)$$

Si on calcule le dénivelé maximal H , on écrit $\sin \gamma = H/h$ et on déduit de (8.35) que l'on a

$$H = \frac{v_0^2}{2g}, \quad (8.36)$$

ce qui est exactement (8.20) avec $\alpha = 90$.

8.6. Application et exemple

On pourra consulter deux problèmes donnés en examen :

- (1) Voir l'énoncé et le corrigé de l'exercice 1 du CCF2 (donné au printemps 2014) sur la page habituelle <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html> ou bien voir directement l'énoncé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2L2biomecaP14.pdf> et le corrigé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2corL2biomecaP14.pdf>
- (2) Voir l'énoncé et le corrigé de l'exercice 1 du CT (donné à l'automne 2014) sur la page habituelle <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html> ou bien voir directement l'énoncé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CTL2biomecaA14.pdf> et le corrigé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CTcorL2biomecaA14.pdf>

8.7. Parabole de sûreté

Voir annexe I.

8.8. Application et exemple dans un cas où les frottements de l'air ne sont plus négligés

On pourra aussi consulter deux exercices donnés en examen, portant sur la chute des corps mais dans le cas beaucoup plus complexe où les frottements de l'air ne sont plus négligés². Dans ce cas, les connaissances du chapitre 9 sont nécessaires.

- (1) Voir l'énoncé et le corrigé de l'exercice 2 du CCF2 (donné à l'automne 2012) sur la page habituelle <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html> ou bien voir directement l'énoncé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2L2biomecaA12.pdf>

2. Ils sont même sauveteurs ici !

et le corrigé sur

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/corCCF2L2biomecaA12.pdf>

- (2) Voir l'énoncé et le corrigé de l'exercice 2 du CCF2 (donné au printemps 2011) sur la page habituelle

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>

ou bien voir directement l'énoncé sur

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2L2biomecaP11web.pdf>

et le corrigé sur

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/corCCF2L2biomecaP11.pdf>

Introduction à la mécanique des fluides élémentaire

On pourra consulter les ouvrages suivants :

- sur la théorie (dans un ordre de difficulté croissante) [Bla06, chapitres 6, 7, 12 et 13] et [BMW11, Cau08, GS85, Com06, Com02, Duv90];
- Pour des exemples à la voile [Glé05];
- Pour des exemples en plongée-sous marine [Bon91].

On pourra aussi consulter les liens sur internet suivants :

- sur la théorie des gaz parfaits
http://fr.wikipedia.org/wiki/Gaz_parfait
- Sur la poussée d'Archimède
http://fr.wikipedia.org/wiki/Poussée_d'Archimède
- Sur la force de portance
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Portance>
- Sur la force de traînée
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Traînée>
- Sur l'aérodynamique
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Aérodynamique>

9.1. Introduction

Plan avec les trois sections et les domaines d'applications (Archimède et la couronne, la plongée sous-marine, sports de voile).

Le sportif, ou autre soumis au poids, action de contact (muscle, support, os ...) mais aussi au milieu environnant, jusque là négligé, ce qui est légitime pour des petites vitesses, mais si la vitesse augmente, moins vrai ; deux cas essentiels air et eau.

9.2. Définition des fluides

D'après [GS85, pages 3 et 4], on a :

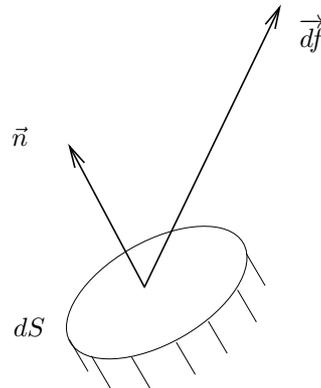
DÉFINITION 9.1. « De façon élémentaire, un liquide a un volume propre mais pas de forme propre, un gaz n'a pas de volume propre et tend à occuper tout l'espace qui lui est offert ».

Remarquons que, contrairement aux liquides et aux gaz, le solide a un volume et une forme propre (mais cette forme peut varier pour des solides déformables).

Liquide et gaz se distinguent considérablement par leur compressibilité ; très faible, voire considérée comme nulle, pour les liquides, elle est plus importante pour les gaz. Dans certains cas, on pourra aussi considérer les gaz légitimement incompressibles (voir cas 1, page 45).

Gaz et liquide se comportent tous les deux comme un fluide.

Dans un milieu continu général (solide ou fluide), on considère une « facette » de taille infinitésimale dS . Cette facette est dirigée par une normale \vec{n} , par définition perpendiculaire à la facette (voir figure 9.1). L'action exercé par le solide, du côté de n , sur la facette est égale à la force élémentaire (ou infinitésimale) \vec{df} donnée

FIGURE 9.1. La facette dS

par

$$\vec{df} = \vec{\tau}dS. \quad (9.1)$$

Cette force n'est pas nécessairement perpendiculaire à la facette : composante normale (sur \vec{n}) et tangentielle. Dans un solide par exemple, il peut exister des contraintes de cisaillement.

DÉFINITION 9.2. Un fluide est un milieu continu qui se déforme aussi longtemps que lui sont appliquées des contraintes tangentielles.

DÉFINITION 9.3. On appelle fluide non visqueux ou parfait, un modèle de fluide dans lequel les contraintes sont toujours normales.

Pour plus de détails, on se reportera à [GS85, p. 2 à 6].

EXEMPLE 9.4. Quand la durée de temps est très brève, l'eau peut se comporter comme un solide! En effet, si on ne laisse pas le temps à la particule d'eau de se mouvoir, le liquide reste très peu déformable. Voir les ricochets, le ski nautique, les plats ...

Voir aussi la fausse course sur l'eau suivante :

<http://www.youtube.com/watch?v=0e3St1GgoHQ>

démentie de façon scientifique par l'émission suivante

http://www.dailymotion.com/video/xvnj6f_em01-peut-on-marcher-sur-l-eau_tv

ou sur d'autres planètes :

http://www.lemonde.fr/sciences/article/2013/09/23/sur-la-lune-on-peut-marcher-sur-l-eau_3483077_1650684.html

EXEMPLE 9.5. De même pour des durées de temps brèves, le verre se comporte comme un solide, mais quand la durée est beaucoup plus importante, il pourrait se comporter de façon analogue à fluide!.

<http://www.linternaute.com/science/magazine/vrai-faux/verre/verre.shtml>

On pourra aussi consulter

http://fr.wikipedia.org/wiki/Mécanique_des_fluides

Commençons maintenant par le cas le plus simple, celui des fluides au repos.

9.3. Fluides au repos

On pourra consulter, pour plus de détails [BMW11, fiches 1 à 4 et 7], [GS85, chapitres 1, 4 et 5] et [Cau08, chapitre A].

Par définition, dans un fluide au repos, toutes les vitesses sont nulles. En fait, dans les gaz, les particules sont en agitation constante. C'est leur vitesse moyenne qui est nulle.

Voir

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Température> et l'animation

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6d/Translational_motion.gif. \diamond

DÉFINITION 9.6. Si on considère un élément de surface infiniment petit dS , l'absence de contraintes tangentielle au repos nous permet d'écrire que cet élément de surface est soumis, de la part du milieu environnant du coté de \vec{n} , à la force infinitésimale

$$\vec{df} = -Pd\vec{S} = -PdS\vec{n}. \quad (9.2)$$

Le nombre P est appelé pression. Elle dépend de l'endroit où l'on est, mais aussi, *a priori* de l'orientation de la facette, donnée par \vec{n} . On peut montrer (voir [GS85, exercice p. 53]) que P est indépendant de \vec{n} .

Il suffit en effet d'écrire que le vecteur \vec{df} de (9.1) est colinéaire à \vec{n} et donc

$$\vec{df} = \bar{\tau}dS = -P\vec{n}dS = -Pd\vec{S}.$$

Dans la plupart des cas, P est positif.

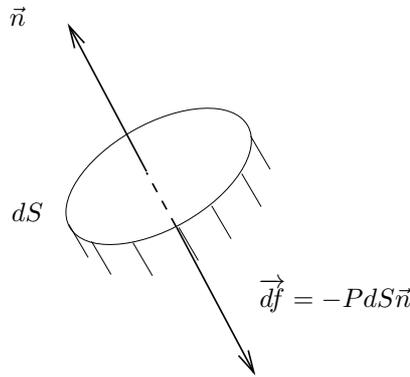


FIGURE 9.2. la facette dS dans un fluide au repos

Voir figure 9.2.

Il existe des liquide à pression négative! Voir [GS85, p. 56]. \diamond

REMARQUE 9.7. il faut bien comprendre que c'est l'action du fluide, du coté de \vec{n} qui exerce la force $-PdS\vec{n}$ sur la facette. L'action du fluide de l'autre de coté de \vec{n} exerce la force opposée $PdS\vec{n}$ sur la facette qui est bien en équilibre. Pour visualiser cela, on peut imaginer un manomètre de plongée, qui peut être considéré comme une petite surface, soumise d'un coté à la pression de l'eau environnante et de l'autre à une pression moindre, connue. C'est la mesure de la différence de pression qui permet la détermination de la pression de l'eau.

REMARQUE 9.8. Si la pression est constante sur une surface S , on a

$$\vec{F} = -PS\vec{n}, \quad (9.3)$$

et on peut définir aussi la pression moyenne F/S , comme par exemple dans le cas d'un sujet debout sur une plate forme de force.

9.3.1. Équation fondamentale de l'équilibre dans un fluide au repos et distribution des pressions

PROPOSITION 9.9. Au sein d'un fluide au repos de masse volumique μ , qui n'est soumis qu'au seules forces de pesanteur, la pression P ne dépend que de l'altitude z et on a

$$P'(z) = -\mu g. \quad (9.4)$$

DÉMONSTRATION. On considère un « parallépipède élémentaire » de fluide de cotés égaux respectivement à dx , dy et dz , qui sont des quantités infinitésimales, de telles sorte que la pression est constante sur chaque face et la densité volumique constante à l'intérieur.

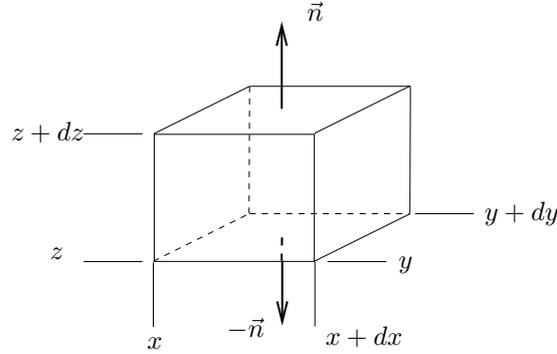


FIGURE 9.3. L'équilibre du « parallépipède élémentaire »

On note $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère orthonormé. On écrit que ce fluide est équilibre (voir figure 9.3). Les forces de pressions exercées par le reste du fluide sur ce cube sont égales respectivement à

- $-P(x, y, z + dz)dxdy\vec{n} = -P(x, y, z + dz)dxdy\vec{k}$ pour la face supérieure ;
- $P(x, y, z)dxdy\vec{n} = P(x, y, z)dxdy\vec{k}$ pour la face inférieure ;
- $P(x, y, z)dydz\vec{i}$ pour la face gauche ;
- $-P(x + dx, y, z)dydz\vec{i}$ pour la face droite ;
- $P(x, y, z)dxdz\vec{j}$ pour la face avant ;
- $-P(x, y + dy, z)dxdz\vec{j}$ pour la face arrière ;

De plus, le cube a un poids égal à $dM\vec{g} = dV\mu\vec{g} = dxdydz\mu\vec{g} = -dxdydz\mu g\vec{k}$. La somme de ces forces est nulle et on a donc

$$(-P(x, y, z + dz)dxdy + P(x, y, z)dxdy - dxdydz\mu g)\vec{k} + (P(x, y, z)dydz - P(x + dx, y, z))\vec{i} + (P(x, y, z)dxdz - P(x, y + dy, z)dxdz)\vec{j} = \vec{0}.$$

On écrit la nullité de l'abscisse, de l'ordonnée et de la cote de ce vecteur et on obtient successivement en divisant par $dxdydz$:

$$\frac{P(x, y, z + dz) - P(x, y, z)}{dz} = -\mu g,$$

en divisant par $dydz$

$$P(x, y, z) = P(x + dx, y, z),$$

en divisant par $dxdz$

$$P(x, y, z) = P(x, y + dy, z).$$

Des deux dernières équations, on déduit que P ne dépend que de z . On écrit ensuite

$$P(x, y, z + dz) = P(z + dz) \approx P(z) + \frac{\partial P}{\partial z}dz = P(z) + P'(z)dz$$

ce qui donne, grâce à la première équation

$$P'(z) = -\mu g.$$

□

AUTRE DÉMONSTRATION. On peut raisonner comme [GS85, p. 51-52] et montrer que l'on a

$$\nabla P = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \mu \vec{g}. \quad (9.5)$$

ce qui est équivalent à (9.4). □

◇

On a alors deux applications de ce résultats :

9.3.1.1. *Distribution des pressions dans un liquide incompressible au repos.*

PROPOSITION 9.10. *Dans le cas d'un fluide incompressible et de température constante (et donc de masse volumique μ constante) qui n'est soumis qu'aux force de pesanteur, la pression ne dépend que l'altitude et, entre deux points d'altitude respectives z et z_0 , on a*

$$P(z) - P(z_0) = -\mu g(z - z_0). \quad (9.6)$$

DÉMONSTRATION. On intègre l'équation (9.4). Puisque μ est constant, on a donc

$$P(z) = -\mu g z + K,$$

où K est une constante. Par différence, on en déduit (9.6) □

AUTRE DÉMONSTRATION.

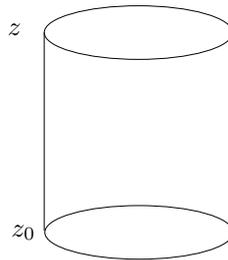


FIGURE 9.4. L'équilibre du « cylindre de fluide »

On considère un « cylindre de fluide », vertical, compris entre les deux cote z et z_0 avec $z \geq z_0$, comme indiqué sur la figure 9.4. On admet que la pression ne dépend que de z . Les pressions sur les côtés ont une composante verticale nulle. De plus, ce cylindre est soumis aux forces verticales de composantes respectives $-P(z)S$ et $P(z_0)S$. L'équilibre de ce cylindre donne donc

$$0 = -P(z)S + P(z_0)S - Mg = -P(z)S + P(z_0)S - \mu Vg = -P(z)S + P(z_0)S - \mu S(z - z_0)g,$$

où S est la surface de cercle de base du cylindre. On en déduit donc (9.6), après division par S . □

EXEMPLE 9.11. Naturellement, cela est vrai pour l'eau. Si on note P_0 la pression du gaz environnant (l'atmosphère) à la surface libre du liquide, on a alors, à la profondeur $h \geq 0$,

$$P(h) = P_0 + \mu gh. \quad (9.7)$$

EXEMPLE 9.12. Pour la pression atmosphérique dans des conditions normales (à 0°), on a, selon [GS85, p. 62]

$$P_0 = 101324,9 \text{ Pa}, \quad (9.8a)$$

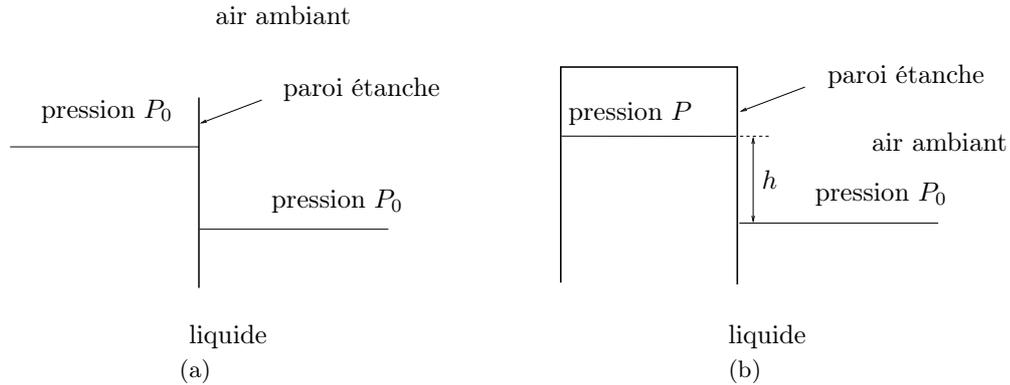


FIGURE 9.5. Deux situations de différence de pression.

soit encore en utilisant l'unité atm, non légale mais usitée

$$P_0 = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}, \quad (9.8b)$$

on a

$$P_0 = 1 \text{ atm} \approx 1 \text{ bar} \approx 10^5 \text{ Pa}. \quad (9.8c)$$

La masse volumique de l'eau¹

$$\mu_0 = 1000 \text{ kgm}^{-3} = 1 \text{ kg l}^{-1}. \quad (9.9)$$

On a donc

$$P(h) = 1000 \times 10h + P_0 = 10^4 h + 10^5. \quad (9.10)$$

Si on exprime toutes les pressions en bar et h en mètres, on a donc

$$P(h) = 0,1h + 1 \quad (9.11)$$

On retrouve donc la règle usuelle des plongeurs : *égale à 1 bar à la surface, la pression augmente de 1 bar tous les 10 mètres.*

EXEMPLE 9.13. On peut revenir sur l'hypothèse de l'incompressibilité de l'eau (voir [GS85, exercice résolu B p. 65]) et montrer que si l'on considère l'eau des océans incompressible, alors la variation de pression entre la surface et le point le plus profond des océans (10 km) est égale à

$$\Delta P = 10^8 \text{ Pa}$$

et si on considère l'eau compressible, alors

$$\Delta P = 1,028 \cdot 10^8 \text{ Pa},$$

soit une variation de 3 %, bien négligeable. On peut montrer que la variation de masse volumique est égale à 5 %.

◇

EXEMPLE 9.14.

Voir [GS85, p. 63 à 65].

La situation de la figure 5(a) est impossible puisque deux points de même altitude au sein d'un liquide doivent avoir la même pression. En revanche, celle de la figure 5(b) est possible avec

$$P - P_0 = \mu gh. \quad (9.12)$$

Ainsi, la pression P est nécessairement plus faible que P_0 . Le cas limite correspondant à $P = 0$, c'est-à-dire le vide.

1. Attention, celle de l'eau de mer salée est un peu plus importante.

— Si on choisit le mercure , on a

$$\mu = 13,59508 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3} \quad (9.13)$$

et P_0 donné par (9.8a), on a

$$h = 76 \text{ cm}, \quad (9.14)$$

ce qui explique le choix de l'ancienne unité de pression : le centimètre de mercure.

— Si on choisit l'eau, on a, grâce à (9.11), $h \approx 10 \text{ m}$ et on ne peut pas tirer l'eau par pompage sur une hauteur supérieure à 10 mètres, ce qu'avait déjà observé les Grecs! ref?

EXEMPLE 9.15 (Théorème et tonneau de Pascal). Non rédigé Voir [GS85, p. 64,65].

9.3.1.2. Distribution des pressions dans l'atmosphère terrestre au repos.

On renvoie à [GS85, section 5.3 p.67]. Dans le cas du gaz, notamment celui de l'atmosphère terrestre, deux caractéristiques interviennent, qui la distingue de l'eau :

- La masse volumique est très faible par rapport à celle des liquides (de l'ordre de 1/1000 usuellement) ;
- La compressibilité est importante.

Nous supposons g uniforme (ce qui est faux pour de grande variations d'altitude). Il convient de distinguer deux cas :

- (1) Le cas usuel des gaz contenus dans des récipients dont les dimensions sont réduites. Dans ce cas, on peut considérer la masse volumique de l'air constante

$$\mu_0 = 1.3 \text{ kgm}^{-3}. \quad (9.15)$$

Dans ce cas, le calcul de la section 9.3.1.1 est encore valable et (9.7) aussi. Si on note z , l'altitude positive, alors (9.7) s'écrit

$$P(h) = P_0 - \mu_0 g h. \quad (9.16)$$

Si on choisit P_0 donné par (9.8a), on a, entre le haut et le bas d'un récipient de hauteur h , $\Delta P = \mu_0 g h$, soit numériquement pour $h = 0.2 \text{ m}$, $\Delta P = 2.5 \text{ Pa}$, soit

$$\frac{\Delta P}{P_0} \approx 1/40000, \quad (9.17)$$

ce qui est très faible. On peut vérifier, *a posteriori* que μ ne varie pas (voir cas 2).

- (2) On considèrera que l'air se comporte comme un gaz parfait.

Voir

http://fr.wikipedia.org/wiki/Gaz_parfait

DÉFINITION 9.16. Dans un gaz parfait, on a

$$PV = nRT, \quad (9.18)$$

où

- P est la pression du gaz (en pascal) ;
- V est le volume occupé par le gaz (en mètre cube) ;
- n est la quantité de matière (en mole) ;
- R est la constante universelle des gaz parfaits : $R = 8,3144621 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$;
- T est la température absolue (en kelvin). Le zéro absolu correspond à une température de $-273,15^\circ$.
Donc $T_K = T_0 + 273,15$.

Pour observer des variations de pression significatives, il faut considérer des hauteurs de colonnes gazeuses importante, de l'ordre de 1000 celles des liquide. On admettra que la température de l'air est constante.

Si on considère M la masse d'une mole d'air, on a

$$\mu = \frac{M}{V},$$

ce qui donne, d'après (9.18),

$$\mu = \frac{PM}{RT}, \quad (9.19)$$

et l'équation d'équilibre (9.4) fournit

$$P'(z) = -\frac{gPM}{RT}.$$

C'est une équation différentielle que l'on peut résoudre. On admet qu'elle est équivalente à

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{gM}{RT}z}, \quad (9.20)$$

où z est l'altitude (positive) et P_0 la pression à l'altitude nulle. Dans ce cas, on a aussi, à l'altitude nulle,

$$\mu_0 = \frac{P_0 M}{RT}, \quad (9.21)$$

et donc

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{gz\mu_0}{P_0}}. \quad (9.22)$$

Dans le cas où x est « petit », on a l'approximation,

$$e^x \approx 1 + x,$$

et donc, on a aussi pour z petit,

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{gz\mu_0}{P_0}} \approx P_0 \left(1 - \frac{gz\mu_0}{P_0}\right)$$

soit encore

$$P(z) = P_0 - gz\mu_0.$$

On retrouve bien l'approximation du cas 1 (voir (9.16)). On a aussi, grâce à (9.19)-(9.21),

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{P}{P_0}$$

et donc

$$\mu(z) = \mu_0 e^{-\frac{gz\mu_0}{P_0}}. \quad (9.23)$$

Si par exemple $z = 20\text{cm}$ et si on suppose g et P_0 donné dans le cas 1, on a

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx 0,999974,$$

ce qui est très proche de un et justifie *a posteriori* le calcul fait dans le cas 1.

Un calcul encore plus réaliste consiste à prendre en compte la variation de température avec l'altitude. Voir [GS85, exercice résolu D p. 69]. \diamond

En fait, on dispose donc de trois modèles :

- Le premier, celui du cas 1, avec une masse volumique constante, donnée par (9.15).
- Le deuxième, celui du cas 2, où l'air est considéré comme un gaz parfait, avec une température constante.
- Le troisième qui prend en compte la variation linéaire de température en fonction de l'altitude. Voir [GS85, exercice résolu D p. 69]

Voir l'annexe J qui montre différentes courbes pour comparer ces modèles. \diamond

9.3.2. Poussée d'archimède

On pourra consulter [GS85, p. 71,72] et http://fr.wikipedia.org/wiki/Poussée_d'Archimède

PROPOSITION 9.17. *Tout corps immergé² dans un fluide³ quelconque reçoit de la part de ce fluide une force verticale égale (en vecteur) à l'opposé du poids du fluide déplacé.*

DÉMONSTRATION. Supposons que ce corps est délimité par une surface S . Le corps est soumis à son poids \vec{P} , à d'autres éventuelles forces et aux forces de pression dues au fluide, notée \vec{P}' , cette dernière ne dépendant que de la surface S . Remplaçons ce corps, par le même fluide que celui dans lequel il est immergé, qui devient alors à l'équilibre. Ce fluide est lui aussi délimité par une surface S et est soumis à son poids \vec{P}' et aux mêmes forces de pression \vec{P} , qui s'équilibre et on a donc bien

$$\vec{P} = -\vec{P}'$$

qui est le poids du fluide déplacé. □

EXEMPLE 9.18 (Flotabilité d'un objet immergé dans un liquide).

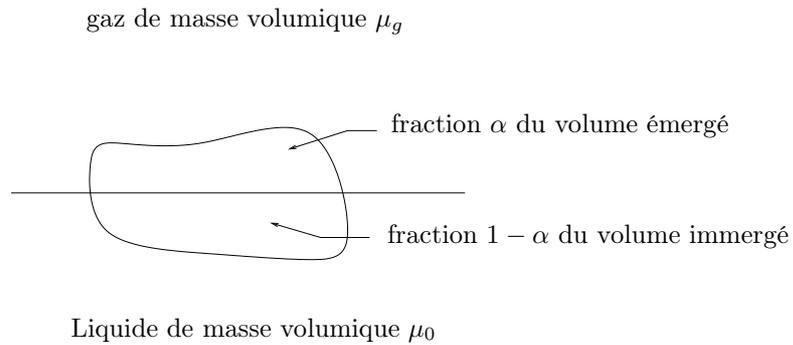


FIGURE 9.6. L'équilibre de l'objet

Soit un objet de volume V et de masse volumique (pas nécessairement homogène) μ (voir figure 9.6). Il est immergé dans un liquide de masse volumique μ_0 , non nécessairement homogène. Ce liquide est surmonté d'un gaz de masse volumique μ_g , non nécessairement homogène.

Soit $\alpha \in [0, 1]$, la fraction du volume du solide qui est au dessus de la surface du liquide. La fraction du volume du solide en dessous de la surface du liquide est donc $1 - \alpha$. L'équilibre des forces donne donc, en notant $M = \mu V$, la masse de l'objet,

$$Mg - (1 - \alpha)\mu_0 Vg - \alpha\mu_g Vg = 0, \quad (9.24)$$

ce qui donne

$$\mu - (1 - \alpha)\mu_0 - \alpha\mu_g = 0,$$

et donc

$$\alpha = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 - \mu_g}. \quad (9.25)$$

On peut vérifier que l'hypothèse $\mu_g < \mu \leq \mu_0$ entraîne que α est compris entre 0 et 1. Si on suppose μ_g négligeable devant μ_0 , ce qui est usuellement le cas, on a

$$\alpha = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0},$$

2. non nécessairement à l'équilibre; néanmoins, le fluide environnant doit être à l'équilibre ou proche de l'équilibre.
3. qui peut être un liquide, un gaz, de deux liquides non miscibles, d'un gaz surmonté d'une atmosphère gazeuse.

et donc

$$\alpha = 1 - \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (9.26)$$

Puisque $\alpha \in [0, 1]$, on a donc nécessairement

$$\mu \leq \mu_0, \quad (9.27)$$

ce qui permet au corps de flotter.

Dans l'approximation usuelle, on a $\mu_0 = 1$; Par exemple, pour le bois de hêtre, on a $\mu = 0.8$ kg/l, ce qui donne $\alpha = 0.2$; pour un iceberg, on a $\mu = 0.895$ kg/l, ce qui donne $\alpha = 0.105$, soit 89.5 % de la partie de l'iceberg immergée.

Le cas limite $\mu \rightarrow 0$ correspond à $\alpha \rightarrow 1$ et le cas limite $\mu \rightarrow \mu_0$ correspond à $\alpha \rightarrow 0$: le solide est entièrement immergé.

REMARQUE 9.19. Si on néglige μ_0 devant μ_g , l'équation (9.24) donne aussi $\mu Vg - (1 - \alpha)\mu_0 Vg$, soit

$$\mu Vg - (1 - \alpha)\mu_0 Vg = 0, \quad (9.28)$$

et donc

$$(1 - \alpha) = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Si $\mu = \mu_0$, on a donc $1 - \alpha = 1$ soit $\alpha = 0$. Ainsi, si le solide a la même masse volumique que le liquide aucune partie n'émerge, ce qui semble assez naturel. Ce qui l'est moins, c'est que cela explique aussi le fait contre-intuitif suivant : si un verre d'eau contient un glaçon qui flotte et que celui-ci fond, le niveau d'eau dans le verre restera identique ! Cela peut s'expliquer de la façon qualitative suivante : l'équation (9.28) traduit le principe d'Archimède : le poids du volume d'eau déplacé par le glaçon est égal au poids du glaçon. Si le glaçon fond, il garde le même poids et déplace donc le même volume d'eau ! Autrement dit la fonte des parties de banquises qui flottent dans l'eau (comme au pôle Nord) ne fera pas monter le niveau d'eau de la mer, contrairement à ce qui se passe pour la fonte des glaciers et de la calotte glaciaire du pôle Sud, qui ne flottent pas mais repose sur la terre ferme et dont la fonte fait monter le niveau de la mer.

Bien entendu, tout cela est valable parce que $\mu \leq \mu_0$, ce qui traduit que l'eau s'expand quand elle gèle, seul liquide à vérifier cette propriété ! Si l'eau se contractait en fondant, les glaçons et les banquises couleraient et ... feraient augmenter le niveau de la mer en fondant !

De plus, ce calcul suppose que l'eau de la banquise possède la même salinité que celle de la mer, dont elle provient en partie. Il est noter qu'en fait, la partie superficielle de la banquise est constituée d'eau douce⁴ et donc que les masses volumiques de l'eau de fonte et l'océan sont légèrement différentes. Voir <http://planet-terre.ens-lyon.fr/article/fonte-banquise-2005-10-06.xml> qui montrent qu'avec la différence de salinité de l'eau de la banquise et de celle de l'océan, on trouve une variation de hauteur de 4,4 mm, ce qui est vraiment négligeable et ce d'autant plus que cette valeur correspond au cas où la banquise supposée composée uniquement d'eau douce fondrait dans sa totalité.

EXEMPLE 9.20 (Archimède et la couronne d'or). *Non rédigé*

Voir

http://fr.wikipedia.org/wiki/Poussée_d'Archimède

EXEMPLE 9.21 (masse volumique ou masse apparente d'un objet totalement immergé dans un liquide). Soit un corps constitué d'un ensemble de p corps, chacun d'entre eux étant de masse m_i , de volume V_i et de masse volumique μ_i , non nécessairement homogène.

On le suppose en équilibre et totalement immergé dans un liquide de masse volumique μ_0 . On a donc

$$0 = \sum_i M_i - M_{\text{liquide déplacé}} = \sum_i \mu_i V_i - V \mu_0 = \sum_i \mu_i V_i - \sum_i \mu_0 V_i$$

4. Les eskimos, qui se servent de cette glace pour boire ou fabriquer des igloos, le savent bien.

et donc

$$\sum_i (\mu_i - \mu_0) V_i = 0. \quad (9.29)$$

Chaque constituant a donc une masse volumique apparente $\mu_i - \mu_0$ ou une masse apparente $M_i - \mu_0 V_i$

Si on ne prend qu'un seul constituant de masse M et de volume V , on a

$$0 = M - V\mu_0,$$

si la masse est exprimée en kilogramme, si le volume est exprimé en litre, et si l'objet baigne dans l'eau de masse volumique μ_0 donnée par (9.9), on retrouve la règle des plongeurs,

$$M - V = 0. \quad (9.30)$$

Si l'on a plusieurs corps, on a alors

$$\sum_i M_i - V_i = 0 \quad (9.31)$$

EXEMPLE 9.22 (Flotabilité d'un objet immergé dans un liquide). On parle aussi de masse volumique apparente ou de masse apparente, pour la notion de flotabilité d'un corps immergé dans l'eau, non nécessairement au repos ; La masse volumique apparente d'un objet de masse M , de volume V et de masse volumique μ est donc donnée par

$$\mu_a = \mu - \mu_0, \quad (9.32)$$

qui peut être positive ou négative. Sa masse apparente est

$$\mathcal{M} = (\mu - \mu_0)V = M - \mu_0 V, \quad (9.33)$$

qui peut être positive ou négative. Si le volume est exprimé en litre, et si l'objet baigne dans l'eau de masse volumique μ_0 donnée par (9.9), on retrouve la règle des plongeurs,

$$\mathcal{M} = M - V. \quad (9.34)$$

Dans le cas de plusieurs objet, on écrit (9.34) sous la forme

$$\mathcal{M} = \sum_i M_i - V_i. \quad (9.35)$$

EXEMPLE 9.23 (Étude d'un ballon sonde ou d'un aérostat).

Non rédigé

Voir [GS85, exercice résolu E p. 72 et 73].

Voir aussi

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Aérostat>

9.3.3. Application à la plongée sous-marine

Concluons cette section par un domaine, typiquement de la mécanique des fluides au repos, car les vitesses sont presque nulles, et intéressant car deux fluides co-existent, l'air et l'eau, celui de la plongée sous-marine.

On renvoie à [Bon91] ainsi qu'aux références suivantes :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Plongée_sous-marine

<http://nicoblon.free.fr/courphysique.htm>

http://fr.wikipedia.org/wiki/Manoeuvres_d'équilibrage

et éventuellement à

<http://www.cibpl.fr/wpFichiers/1/1/Ressources/file/PLONGEE-SOUS-MARINE/APPROFONDIR/NIVEAU-4/ANNALES/Physique/Archimede.pdf>

http://odyssee-sub.org/rokdownloads/telechargement/pdf/2-%20Formation%20thorique%20Niveau%201%20Equilibre%20flottabilit%20et%20pression%20_.pdf

9.3.3.1. Hypothèses faites.

Elles sont de trois ordres

- la pression de l'eau obéit à la loi (9.11)
- l'air est considéré comme un gaz parfait et obéit à la loi (9.18). On considérera de plus la variation de température faible, de telle sorte que cette loi est remplacé par la loi de Mariotte :

$$PV = \text{constante} \quad (9.36)$$

soit encore

$$PV = P_0V_0, \quad (9.37)$$

où P et V désigne la pression et le volume d'une quantité d'air, à une profondeur donnée et P_0 et V_0 désigne la pression et le volume de cette même quantité d'air à la surface.

- à une profondeur donnée, pour respirer confortablement, l'air est délivré⁵ par le ou les détendeurs à la pression (de l'eau) ambiante.

Les pressions usuelles de l'air dans les bouteilles sont de l'ordre de 200 bar.

9.3.3.2. Conséquences.

- (1) Un plongeur respirant avec un tuba trop long ou un scaphandre non autonome ne peut respirer (d'où les Dupondt pompent et pompent encore).
- (2) Étude de l'équilibre d'un plongeur ; voir par exemple l'exercice 5 de

<http://www.cibpl.fr/wpFichiers/1/1/Ressources/file/PLONGEE-SOUS-MARINE/APPROFONDIR/NIVEAU-4/ANNALES/Physique/Archimede.pdf>

donné ici :

EXEMPLE 9.24. Un plongeur tout équipé pèse 100 kg et déplace un volume de 105 l. Combien de plombs doit il mettre pour être équilibré en eau de mer ? (densité 1,03) et en eau douce (densité 1,0) ?

- (a) On considère la masse apparente du plongeur donnée par (9.29). Dans le premier cas, elle vaut $100 - 1.03 \times 105 = -8.15$ kg. Il devra mettre alors 8.15 kg de plomb (en négligeant le volume, faible, occupé par les plombs). Dans le second cas, elle vaut $100 - 1 \times 105 = -5$ kg. Il devra mettre alors 5 kg de plomb (en négligeant le volume, faible, occupé par les plombs).
- (b) Une autre approche, plus précise, consiste à utiliser la formule (9.29) en considérant que le système est formé du plongeur nu, des blocs (la bouteille d'air comprimé), de son matériel autre que les blocs, négligé, de sa combinaison en néoprène et de des poids en plomb. Pour chacun d'eux, on donne le volume et la masse volumique (ou la masse) et on calcule la masse de plomb grâce à (9.29).

Voir par exemple le sujet et le corrigé de l'exercice 2 du CCF2 de printemps 2014, à l'une des url suivantes

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2L2biomecaP14.pdf>

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2corL2biomecaP14.pdf>

- (c) On pourra encore affiner en considérant la quantité variable d'air contenu dans les blocs au cours de la plongée en supposant que le nageur a une bouée qui lui permet de s'équilibrer au cours de la plongée ;
- (d) Voir l'exemple 9.25 donné sous forme d'exercice corrigé.

EXEMPLE 9.25.

Énoncé

5. En deça de 50 bar (lecture sur le manomètre de la bouteille), le plongeur doit rentrer aussitôt, dans la mesure du possible !

Roger, un plongeur des Hommes grenouilles de Champagne-Reims part plonger à Vodelée. Il pèse 80 kg pour un volume de 84 l. Il porte une combinaison de 7 mm et de masse 3 kg pour un volume de 7 l. Son bloc pèse 16 kg pour un volume de 12 l. On suppose que la densité de l'eau est donnée par

$$d = 1. \quad (9.38)$$

Il rentre dans l'eau de la façon suivante :

- il se met à l'eau ;
 - on lui passe sa ceinture de plombs de 4 kg et de volume 0 l (volume négligeable) ;
 - on lui passe son équipement photo de masse 4 kg et de volume 1 l.
- On considère que tout le reste de son équipement a une flottabilité négligeable.

- (i) Déterminer pour chacune de ces étapes la masse réelle et la masse apparente et conclure sur l'équilibre de Roger.
- (ii) Qu'arrivera-t'il à Roger s'il prête son appareil à son binôme au palier pour être pris en photo ?
- (iii) Pourquoi ce lestage ne convient-il pas ? Donner deux explications et une façon d'y remédier.

Corrigé

Exercice issu de

http://www.hgc-reims.com/documents-hgc-reims/documents-nap-hex-gc-reims/doc_download/28-examen-niveau-2-mars-2013

Examen Théorie Niveau 2 ; Session mars 2013. Hommes grenouilles de Champagne-Reims

Dans cet exercice, on utilisera la notion de masse apparente : voir l'équation (9.35) du cours que l'on rappelle ici : chaque élément i a une masse M_i exprimée en kg et un volume V_i exprimé en l :

$$\mathcal{M} = \sum_i M_i - V_i. \quad (9.39)$$

Cette équation est justifiée par l'hypothèse (9.38).

- (i) • À la première étape, il suffit de sommer sur les éléments en présence, c'est-à-dire : le plongeur lui-même de masse M_1 et de volume V_1 , la combinaison M_2 et de volume V_2 et les blocs de masse M_3 et de volume V_3 : on a donc

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^3 M_i - V_i = (M_1 + M_2 + M_3) - (V_1 + V_2 + V_3). \quad (9.40)$$

Numériquement, on a donc

$$\mathcal{M} = 80 + 3 + 16 - (84 + 7 + 12) = -4 \text{ kg},$$

Ici, le nageur n'est pas à l'équilibre et a tendance à remonter.

- Pour la deuxième étape, à la masse apparente déjà calculée, on rajoute la masse apparente des poids qui vaut

$$\mathcal{M} = M_4 - V_4 \quad (9.41)$$

et donc numériquement

$$\mathcal{M} = 0 \text{ kg}.$$

qui devient nulle : le plongeur est donc bien équilibré !

- Enfin, pour la troisième étape, à la masse apparente déjà calculée, on ajoute la masse apparente

$$\mathcal{M} = M_5 - V_5 \quad (9.42)$$

et donc numériquement

$$\mathcal{M} = 3 \text{ kg}.$$

qui devient positive : le nageur coule !

- (ii) Si notre ami Roger prête son appareil photo à son collègue, il sera de nouveau dans le cas de la deuxième étape et sera bien équilibré!
- (iii) Ce lestage est critiquable pour deux raisons :
- Roger n'est bien équilibré que s'il garde son appareil photo⁶. De plus, au cours de la plongée, sa masse va diminuer puisqu'il relâchera progressivement l'air contenu dans ses bouteilles et il sera de nouveau en déséquilibre, trop léger. Il serait donc préférable de prendre plus de poids et de s'équiper d'une bouée, dont il pourra régler le volume, ce qui lui permettra de palier ces deux inconvénients!
 - Il est dangereux de mettre sa ceinture une fois dans l'eau! Il faut la mettre avant de s'immerger!
- (3) L'air comprimé dans les bouteilles et qui en sort occupe un volume qui diminue quand la profondeur augmente, ce qui fait diminuer la durée des plongées profondes.

Voir l'exemple 9.26 donné sous forme d'exercice corrigé.

EXEMPLE 9.26.

Énoncé

Vous faites de la plongée avec bloc et vous êtes en fin de sortie. La pression d'air dans votre bloc de volume 12 l est de 80 bar. Vous avez encore à effectuer 22 minutes de palier à 3 mètres et vous consommez 20 litres par minute (quelque soit la profondeur).

- (a) Quelle sera la pression dans votre bloc à la fin du palier?
- (b) *Question facultative*

En négligeant la consommation d'air à la remontée du palier, déterminer le volume d'air (à pression atmosphérique) qu'il faudra remettre dans votre bloc pour retrouver une pression de 200 bar.

Corrigé

Exercice issu de

http://www.hgc-reims.com/documents-hgc-reims/documents-nap-hex-gc-reims/doc_download/30-examen-niveau-3-mars-2005

Commission Technique ; Évaluation théorique niveau 3. Hommes grenouilles de Champagne-Reims

On utilisera dans cet exercice successivement : les hypothèses de la section 9.3.3.1 que l'on rappelle ici :

— la pression de l'eau obéit à la loi (9.11), soit

$$P(h) = ah + b \quad (9.43)$$

où $a = 0.1$ et $b = 1$, pour une profondeur h en m et une pression en bar.

— la loi de Mariotte (9.36), rappelée ici :

$$PV = \text{constante} \quad (9.44)$$

où on peut exprimer P en bar et V en l.

- (a) Au début du palier, la pression du bloc est égale à $P = 80$ bar. Vous allez consommer un volume d'air (à pression ambiante, à la profondeur donnée) égal à

$$V_1 = \lambda \Delta t \quad (9.45)$$

où λ est la consommation d'air par minute et Δt le temps du palier. Ainsi, le volume intérieur d'air V (à la pression P) de votre bloc se décompose en deux parties :

6. Il devrait pouvoir le prêter, puisqu'en plongée la solidarité est primordiale!

- un volume V_2 d'air consommé, qui occupera, une fois à la pression ambiante $P(h)$, donné par (9.43), le volume V_1 ;
- un volume $V - V_2$ d'air non consommé, qui occupera, une fois le volume V_2 parti, la totalité du volume intérieur de votre bloc V , à la nouvelle pression inconnue P' .

Appliquons donc la loi de Mariotte (9.44) à ces deux quantités d'air :

$$V_2 P = V_1 P(h), \quad (9.46a)$$

$$(V - V_2) P = V P'. \quad (9.46b)$$

De ces équation, déduisons la pression inconnue P' . On a grâce à (9.46b)

$$P' = \frac{V - V_2}{V} P,$$

qui devient en utilisant (9.46a)

$$\begin{aligned} &= \frac{P}{V} \left(V - \frac{P(h)}{P} V_1 \right), \\ &= P - P(h) \frac{V_1}{V} \end{aligned}$$

et enfin, en utilisant (9.43) et (9.45)

$$= P - (ah + b) \frac{\lambda \Delta t}{V}$$

On a donc

$$P' = P - (ah + b) \frac{\lambda \Delta t}{V} \quad (9.47)$$

Numériquement, on obtient donc

$$P' = 32.3 \text{ bar.}$$

Attention, cette valeur est inférieure aux 50 bar recommandés de pression minimale !

- (b) Le raisonnement est identique : Le volume intérieur d'air V (à la pression P_n exigée de 200 bar) de votre bloc se décompose en deux parties :

- un volume V_3 de gaz réintroduit qui a occupé à la pression atmosphérique ambiante $P(0) = b$, donnée par (9.43), le volume V_4 , qui est le volume recherché ;
- un volume $V - V_3$ qui a occupé avant que le bloc ne soit rempli, la totalité du volume intérieur de votre bloc V , à la pression maintenant connue P' , donnée par (9.47).

La lois de Mariotte appliquée à ces deux volumes donne donc respectivement

$$V_4 b = V_3 P_n,$$

$$V P' = (V - V_3) P_n.$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned} V_4 &= \frac{P_n}{b} V_3, \\ &= \frac{P_n}{b} \left(V - \frac{V P'}{P_n} \right), \\ &= \frac{P_n}{b} V - \frac{P'}{b} V, \\ &= \frac{P_n - P'}{b} V \end{aligned}$$

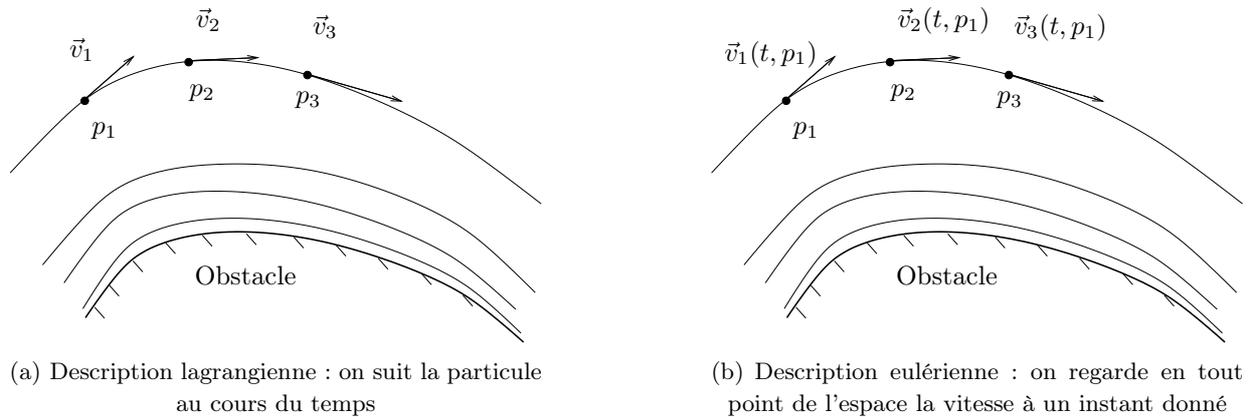


FIGURE 9.7. Deux points de vue différents pour décrire un fluide.

et bref

$$V_4 = \frac{P_n - P'}{b} V. \quad (9.48)$$

Numériquement, on obtient donc

$$P' = 2012.0 \text{ l.}$$

- (4) Les accidents de décompression et barotraumatiques. Voir [Bon91, chapitres 1 et 2].

Non rédigé

Grossièrement, si on descend trop vite, on peut faire imploser certaines cavités (notamment les sinus et le tympan) et si on remonte trop vite, on peut faire exploser les poumons et/ou risquer une embolie.

9.4. Généralités sur les fluides parfaits en dynamique

9.4.1. Généralités

On s'appuie sur (attention, c'est plus dur) sur [GS85, chapitres 2 et 7]. On pourra aussi consulter (plus facile) [BMW11, fiche 9] ou [Cau08, chapitre II].

On suppose maintenant que l'on n'est plus au repos et que les fluides étudiés ont des vitesses non nulles⁷

On suppose dans toute cette section que le fluide est parfait (ou non visqueux) : les définitions 9.3 et (9.1) sont donc valables. Cette approximation est grossière mais permet de donner des résultats satisfaisants sous certaines hypothèses loin des parois et des obstacles (ou la viscosité intervient).

« Regardons » du fluide s'écouler (éventuellement autour d'un obstacle) comme le montre la figure 9.7. Soit, on adopte le point de vue lagrangien : on suit une particule au cours du temps et on regarde, à chaque instant, les positions qu'elles occupent successivement (comme les positions p_1 , puis p_2 puis p_3 aux instants t_1 , t_2 , t_3 , comme l'indique la figure 7(a).) et les vitesses qu'elle a (comme les vitesses \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 , aux instants t_1 , t_2 , t_3). Les vitesses sont tangentes à la trajectoire de la particule. Ce point de vue, implicitement utilisé en biomécanique et en mécanique du solide n'est pas très pratique quand on a un grand nombre de particules comme en mécanique des fluides. Soit, on adopte alors, le point de vue eulérien et on regarde, en chaque point de l'espace, les vitesses des particules, qui passent par un point donné. Par exemple, sur la figure 7(b) (qui représente le même écoulement que la figure 7(a)), on regarde les vitesses $\vec{v}_i(t, p_i)$ aux positions p_i , au cours

7. Conformément à la note de bas de page 9.3 page 40, pour les gaz, seules les vitesses moyennes sont prises en compte, celles qui sont responsables du transport des particules de gaz.

du temps. Dans les deux cas, les lignes de courant sont les trajectoire des particules. En description eulérienne, une ligne de courant est tangente à la vitesse \vec{v} en chacun des points.

Pour la suite, on note $\vec{v}(x, y, z, t)$ ou plus simplement \vec{v} , la vitesse aux point de coordonnées (x, y, z) à l'instant t . On peut aussi considérer, en description eulérienne la masse volumique $\mu(t, x, y, z)$, notée μ , la température notée T , la pression P .

On parle alors des « champs » de vitesse, température, pression qui sont des application de l'espace à deux ou trois dimension dans \mathbb{R} ou un espace à deux ou trois dimensions \diamond

Les écoulement peuvent être *a priori* dépendant du temps.

Une façon de visualiser les lignes de courant est de prendre une photos à longue pose comme pour la figure 8(a) page suivante (cascade⁸ : on regarde les particules d'eau) ou une route encombrée de voitures⁹, dont le mouvement global est considéré comme celui d'un fluide) comme sur la figure 8(b).

Il existe un certain nombre d'équations, généralisant l'équation (9.4).

On dispose de deux équations, données au début de [GS85, chapitre 7] :

$$\nabla \cdot (\mu \vec{v}) = -\frac{\partial \mu}{\partial t}, \quad (9.49a)$$

où l'on pose pour tout champ vectoriel \vec{w}

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}. \quad (9.49b)$$

On a aussi l'équation d'équilibre local, généralisant l'équation (9.4) ou (9.5) :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\mu} \nabla P, \quad (9.49c)$$

où $\frac{D}{Dt}$ est une dérivée totale, adaptée à la description eulérienne, donnée par [GS85, (6.10) p. 82] et \vec{g} est la pesanteur, seule force volumique supposée présente. \diamond

On suppose maintenant, et pour toute la suite, que les écoulement sont stationnaires ou permanents, c'est-à-dire, qu'ils ne dépendent pas du temps.

Nous avons aussi (pour plus de détail, voir [GS85, p. 82 à 84]) la conservation de la masse suivante :

On considère un tube de courant comme représenté sur la figure 9.9, c'est-à-dire, une partie de l'écoulement compris entre deux lignes de courant (ou dans un vrai tube) supposé être unidimensionnel, c'est-à-dire, que la vitesse ne dépend que d'un paramètre d'espace, noté x sur la figure. On a alors

$$\mu_1 S_1 v_1 = \mu_2 S_2 v_2, \quad (9.50)$$

où S_1 et S_2 sont les surfaces d'entrée et de sortie du tube de courant.

9.4.2. Cas particulier des fluides parfaits incompressibles stationnaires

On suppose maintenant¹⁰ que le fluide, en plus d'être parfait stationnaire, est incompressible, c'est-à-dire

$$\mu = \mu_0 = \text{constante}. \quad (9.51)$$

Cette hypothèse pourra être faites avec modération dans le cas des fluides réels (voir section 9.5)

De l'équation (9.50), on déduit donc, dans ce cas, que

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (9.52)$$

8. issues de

<http://www.atoutcode.com/quels-feux-allumer-nuit/>

http://www.atoutcode.com/wp-content/uploads/2011/11/4611181320_286443f3c5_z.jpg

9. issues de

<http://www.google.fr/imgres?imgurl=http://majmajest.com/blog/wp-content/uploads/riviere-mini-cascades-pose-longue.jpg&imgrefurl=http://majmajest.com/blog/cest-dans-la-r>

<http://majmajest.com/blog/wp-content/uploads/riviere-mini-cascades-pose-longue.jpg>

10. Attention, on sort donc du contexte de la section 9.3.1.2.



(a) : cascade



(b) : voitures la nuit

FIGURE 9.8. Illustration des lignes de courant : deux photos avec une longue pose.

soit encore, le long d'un tube de courant,

$$Sv = \text{constante}, \quad (9.53)$$

c'est-à-dire que si les lignes de courant « se ressèrent », alors S diminue et v augmente et réciproquement.

Selon [GS85, p. 107], cette hypothèse, déjà utilisée pour les liquides (en section 9.3.1.1) est valable pour les gaz, si la vitesse des écoulement v est négligeable devant celle du son s dans l'air, de l'ordre de 340 m/s. En pratique, si le nombre de Mach donné

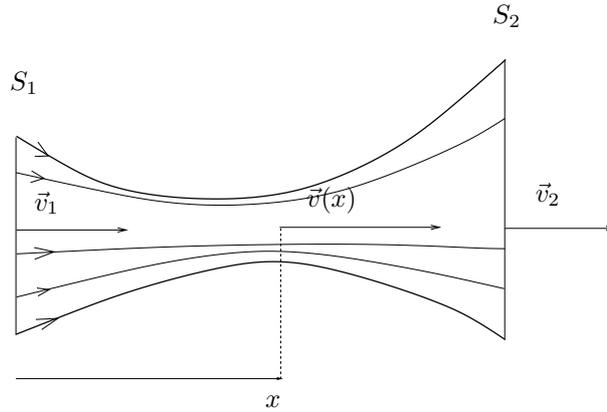


FIGURE 9.9. Un tube de courant

par

$$M = \frac{v}{s}, \tag{9.54}$$

vérifie

$$M \leq 0,3 \tag{9.55}$$

ce qui sera très utilisé dans en aérodynamique subsonique. \diamond

THÉORÈME 9.27 (Théorème de Bernoulli). *Pour un fluide parfait (c'est-à-dire sans viscosité), au sein d'un écoulement permanent et incompressible soumis aux seules forces de pesanteur, la quantité*

$$K = \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\mu_0} \text{ est constante le long d'une ligne de courant.} \tag{9.56}$$

où v est la norme de la vitesse au point considéré, P la pression et z l'altitude. Si de plus, l'écoulement est irrotationnel, c'est-à-dire, sans tourbillon alors, la quantité

$$K = \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\mu_0} \text{ est constante dans tout l'écoulement.} \tag{9.57}$$

DÉMONSTRATION. Voir [GS85, p. 108]. \square

On remarque que dans un contexte statique avec μ constant, on obtient que $P + \mu_0 gz$ est constant, c'est-à-dire (9.6). \diamond

REMARQUE 9.28. On pourra, en fait, aussi appliquer cette formule en aérodynamique (respectant (9.56)), pour des différence d'altitude ne dépassant par quelques mètres, comme observé au cas 1 de la section 9.3.1.2. dans le cas statique.

Pour plus de détail sur l'absence de tourbillon, voir [GS85, p. 11, 12, 116 à 118]. Mathématiquement, cela est équivalent à dire que

$$\nabla \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \vec{v} = \vec{0}. \tag{9.58}$$

Voir la figure 9.10 page suivante communiquée par Jacques Valensi, extraite de [GS85, p. 118]. \diamond

EXEMPLE 9.29 (Effet Venturi). Si on néglige les variations de hauteurs, les deux équations (9.53) et (9.56) nous indiquent donc qu'il existe une constante D appelée débit telle que, pour un écoulement unidimensionnel, on a $Sv = D$ et, le long d'une ligne de courant,

$$\frac{D^2}{2S^2} + \frac{P}{\mu_0} \text{ est constante.} \tag{9.59}$$

Autrement dit, si S augmente, P aussi.

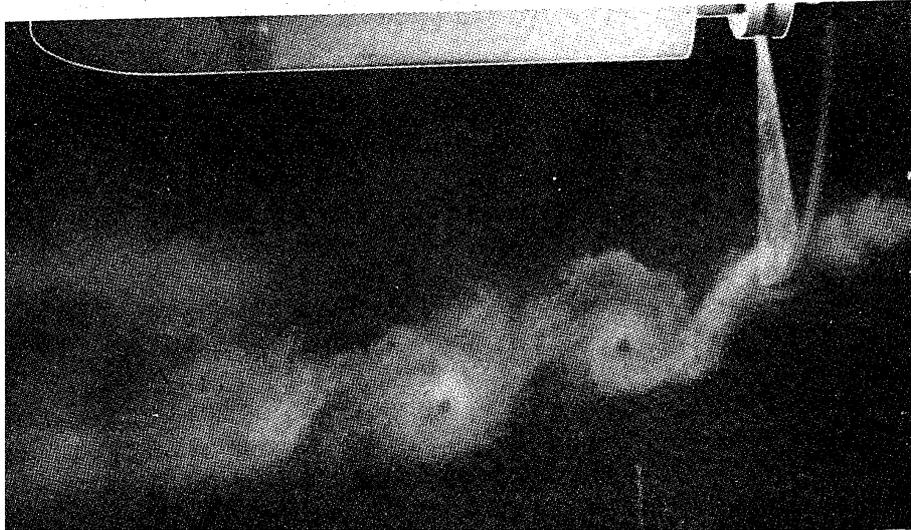


FIGURE 9.10. Tourbillons observés à l'aval d'une hélice

Par exemple, si deux bateaux voguent l'un près de l'autre sont irrémédiablement attiré l'un vers l'autre. Si vous nagez près du bord la piscine, il peut aussi vous attirer !

Pour plus de détail, voir

http://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_Venturi

9.4.3. Cas particulier des fluides parfaits incompressibles irrotationnels plans stationnaires

Étudions un dernier cas particulier. Outre les hypothèses déjà faites et que l'on rappelle

- fluide parfait (non visqueux) ;
- incompressibles (masse volumique constante) ;
- irrotationnels (pas de tourbillon) ;

on suppose de plus que l'écoulement est plan, c'est-à-dire, que

$$\text{la vitesse } v \text{ ne dépend que deux paramètres d'espace, par exemple, de } x \text{ et de } y. \quad (9.60)$$

Sur le plan de la modélisation, cela est assez restrictif, car ces écoulement ne sont pas très représentatifs des écoulements réels (étudiés sommairement en section 9.5), néanmoins (texte qui suit extrait de [Duv90, p. 214] « leur intérêt est important pour les raisons suivantes :

- loin des parois, la viscosité joue souvent in rôle négligeable et l'approximation fluide parfait constitue une hypothèse simplificatrice intéressante ;
- il est possible de construire explicitement, en utilisant les potentiels complexes [...], un grand nombre d'écoulements autour de profils variés ;
- les écoulements ainsi obtenus présentent des défauts – parfois désignés sous le nom de paradoxes – dont l'analyse permet de d'améliorer la compréhension su phénomène et met en lumière les parties de l'écoulement dans les lesquels les approximations ne sont pas valables.

»

Cela permettra de tracer les lignes de courant facilement comme va le montrer la suite.

Les effets de pesanteur dans cette section n'interviennent pas directement dans la distributions de vitesse, mais une fois que celle-ci est connue, on peut calculer la pression en fonction de la hauteur z dans tout l'écoulement en utilisant (9.57).

Pour plus de détails, on pourra consulter les références (difficiles) [GS85, p. 120 à 136], [Duv90, p. 214 à 225] ou [Bas15f, chapitre 5].

Sur le plan mathématique, les hypothèses des fluides parfaits incompressibles irrotationnels plans stationnaires ; l'équation (9.49a) et l'équation (9.58) donnent, en notant l'abscisse et l'ordonnée du champ de vitesse \vec{v} (qui ne dépendent que de x et de y) :

$$U = v_x, \quad (9.61a)$$

$$V = v_y, \quad (9.61b)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (9.61c)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (9.61d)$$

$$(9.61e)$$

On peut alors montrer qu'il existe une fonction ϕ et une fonction ψ (qui ne dépendent que de x et de y) telles que

$$U = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (9.62a)$$

$$V = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (9.62b)$$

Notons qu'en particulier, on a

$$\vec{v} = \nabla \phi. \quad (9.63)$$

Les équations (9.61c) et (9.61d) nous montrent que la fonction f de l'ensemble des complexes dans l'ensemble des complexes donnée par

$$f(z) = f(x + iy) = \phi + i\psi, \quad (9.64)$$

est holomorphe (c'est-à-dire dérivable, au sens des complexes, par rapport à sa variable z). Pour plus de détails, voir par exemple le cours de maths [Bas15f, Première partie]. \diamond

Nous allons, par la suite, donner plusieurs écoulements plans et les figures associés.

EXEMPLE 9.30. (1)

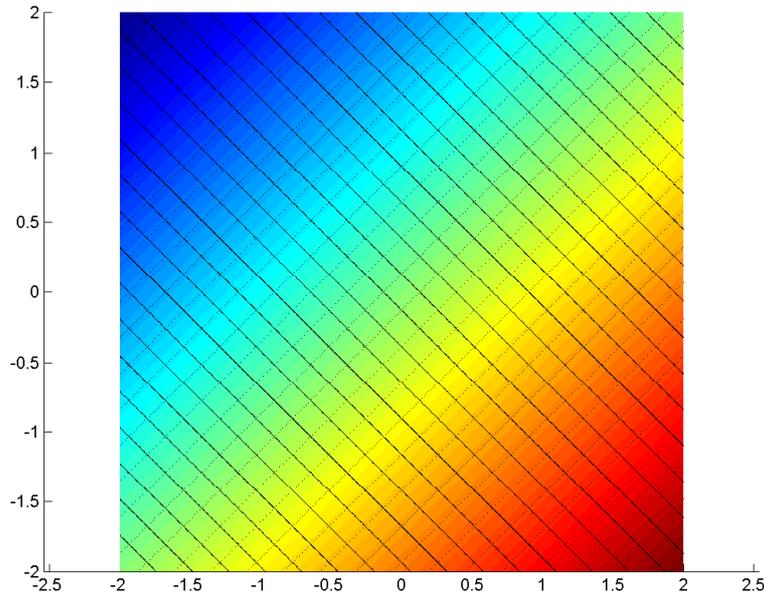


FIGURE 9.11. L'écoulement 1

L'écoulement représenté sur la figure 1 correspond à l'écoulement le plus simple qui suit : celui donné par une vitesse uniforme.

Il correspond à la fonction f donnée par

$$f(z) = e^{-i\alpha Uz}, \text{ pour } U, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (9.65)$$

◇

Sans vouloir refaire la théorie mathématique qui sous-tend la note page 59, il peut être intéressant d'essayer de comprendre les choses suivantes :

- L'équation d'irrotationnalité (9.61c) et sa conséquence (9.63) nous montre que la vitesse se comporte comme un gradient de température : c'est-à-dire que la fonction ϕ peut être considéré comme une température, représentée en couleur sur la figure 9.11, du plus froid (en bleu) au plus chaud (en rouge). La vitesse du fluide va toujours du plus froid au plus chaud. Sur la figure 9.11, les « équipotentiels », correspondant à des lignes où ϕ est constant, sont tracées en pointillé : chaque équipotentielle est donc à couleur constante. Ces lignes correspondent, dans notre analogie avec la température, avec des lignes de température constante.
- De plus, la condition d'incompressibilité (9.61d) nous montre que les lignes de courant, tracées en continu sur la figure 9.11, sont perpendiculaires aux lignes équipotentielle. Dans notre analogie, la température optimise son déplacement, pour aller, le plus rapidement possible, du plus chaud au plus froid, en étant donc à flux perpendiculaire aux équipotentiels. Ces remarques seront valables pour les écoulements vus après.

(2)

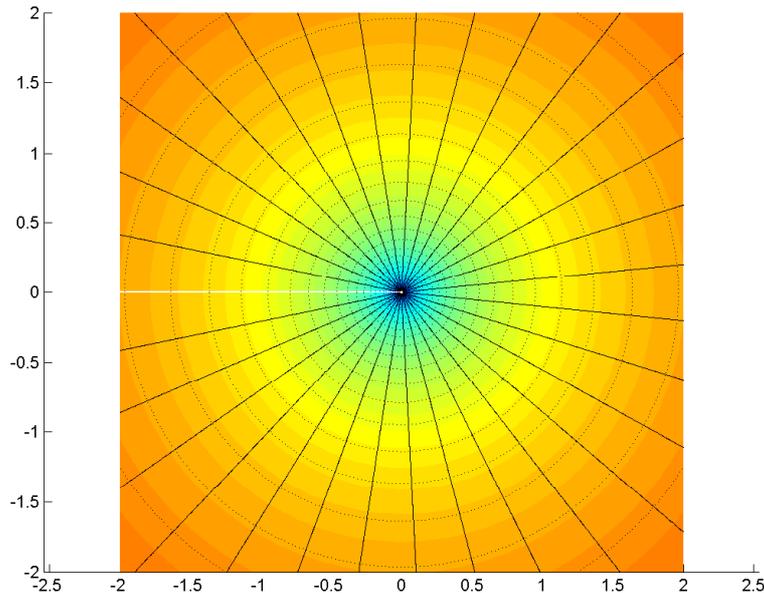


FIGURE 9.12. L'écoulement 2

L'écoulement représenté sur la figure 2 correspond à l'écoulement qui correspond à un écoulement de source, c'est-à-dire, une source qui « émet » ponctuellement du fluide (qui arrive par exemple avec un tuyau d'arrosage).

Il correspond à la fonction f donnée par

$$f(z) = \log z. \quad (9.66)$$

Pour la définition du logarithme complexe, voir [Bas15f, Première partie]. ◇

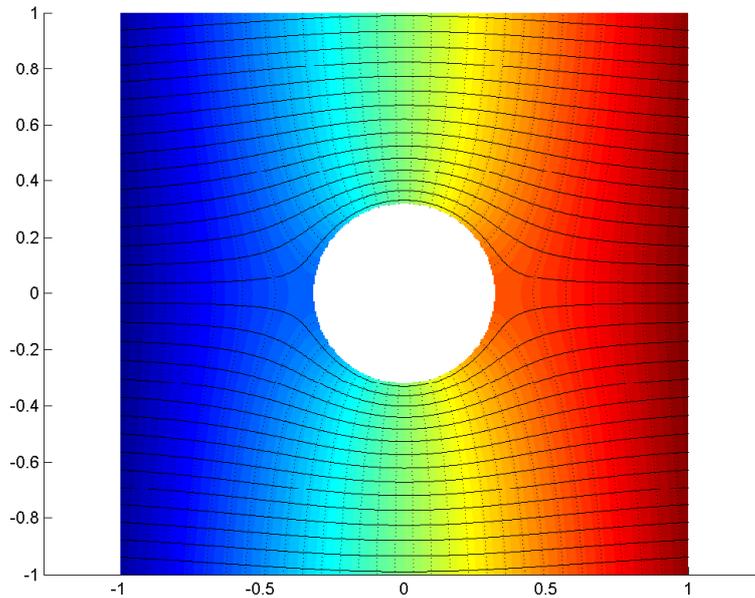


FIGURE 9.13. L'écoulement 3

(3)

L'écoulement représenté sur la figure 3 correspond à l'écoulement autour d'un cylindre de révolution. À l'infini (loin de l'objet), le champ des vitesses est parallèle à l'axe des x de vitesse de coordonnées $(u, 0)$ où u est un réel (ici choisi positif, ce qui signifie que le courant s'écoule vers la droite de la figure).

Il correspond à la fonction f donnée par

$$f(z) = uz + \frac{K}{z}. \quad (9.67)$$

◇

Cet écoulement a lieu autour d'un obstacle circulaire, matérialisé par un disque blanc sur la figure 3. Cet obstacle, immobile, est tel que l'écoulement ne « rentre pas dans la matière », c'est-à-dire, tel que

$$\text{En tout point du bord de l'obstacle, la vitesse est tangente à l'obstacle,} \quad (9.68)$$

ce qui est équivalent à

$$\text{En tout point du bord de l'obstacle, la ligne de courant est tangente à l'obstacle,} \quad (9.69)$$

ce que l'on peut observer sur la figure 3. On constate aussi que les équipotentielles sont perpendiculaires à l'obstacle.

Mathématiquement, le cercle représentant le bord de l'obstacle est une ligne de courant. ◇

(4)

On peut montrer (voir [Duv90, p. 222]) que la force exercée par la fluide sur le cylindre de l'exemple 4 est nulle! Cela constitue le paradoxe de d'Alembert. Or, la viscosité, en fait responsable de la force existant réellement (et qui pousse le cylindre vers l'arrière), ne peut être considérée comme nulle au voisinage d'une paroi.

Nous reviendrons sur ce paradoxe lors de la section 9.5.4.

Notons ici que l'obstacle immobile peut avoir ou non une vitesse de rotation propre, ce qui ne joue en rien sur l'écoulement (voir (9.69)).

(5)

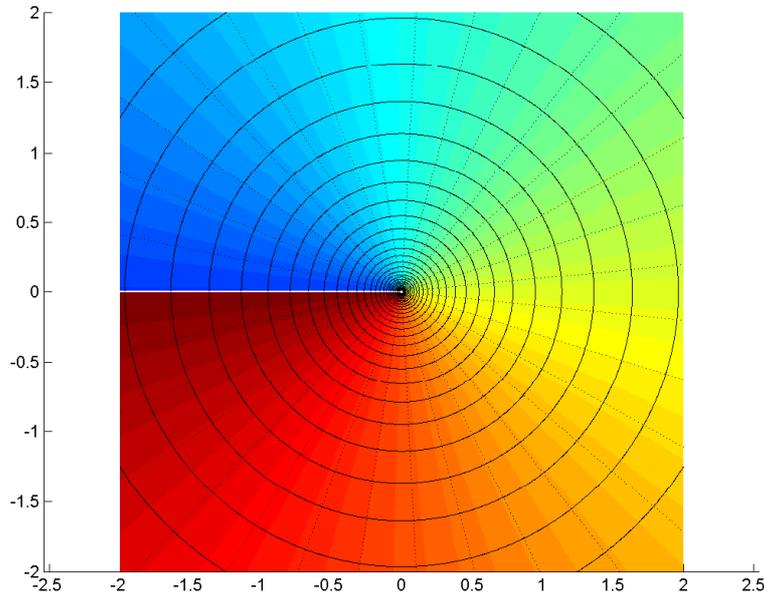
Vérifier irrotationnel!

FIGURE 9.14. L'écoulement 5

L'écoulement représenté sur la figure 5 correspond à l'écoulement de tourbillon ponctuel centré à l'origine.

Il correspond à la fonction f donnée par

$$f(z) = i \log a. \quad (9.70)$$

◇

(6)

Considérons maintenant la « somme » des deux écoulements 3 et 5, qui physiquement correspond à un écoulement autour d'un cylindre avec un tourbillon dont l'intensité dépend d'un paramètre Γ . On note, comme dans l'exemple 3, u la vitesse à l'infini de l'écoulement autour du cylindre. Comme précédemment, on peut montrer que cet écoulement est tangent au cercle de centre R . Le courant s'écoule vers la droite des figures 9.15.

Si Γ est nul, on est de nouveau dans le cas de l'écoulement de l'exemple 3 et la force exercée sur le cylindre est nulle. Sinon, on peut montrer qu'elle est de norme égale à

$$F = \mu_0 \Gamma u, \quad (9.71)$$

qu'elle est verticale et qu'elle est dirigée vers le haut si $\gamma < 0$ et réciproquement. Autrement, dit si le tourbillon tourne dans le sens trigonométrique, la force est dirigée vers le bas et réciproquement.

Notons ici que l'obstacle immobile peut avoir ou non une vitesse de rotation propre, ce qui ne joue en rien sur l'écoulement (voir (9.69)).

On a différents cas représenté sur la figure 9.15 page ci-contre.

AP : dessiner cylindre

Il correspond à la fonction f donnée par

$$f(z) = u \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z. \quad (9.72)$$

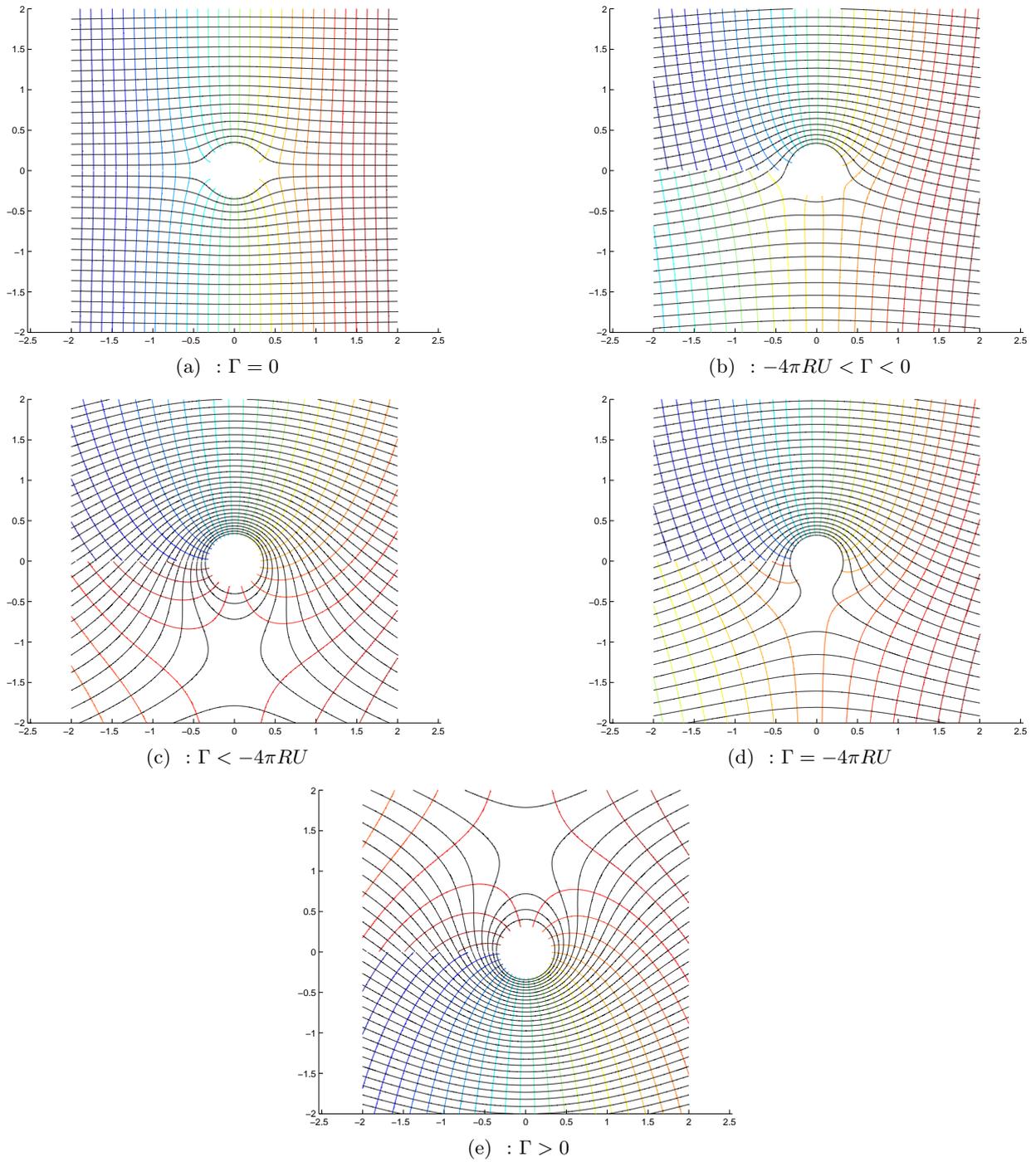


FIGURE 9.15. Différentes simulations pour l'écoulement 6

◇

Cette force est responsable de l'effet Magnus sur lequel on reviendra en section 9.5.6.

Pour plus de détails, consulter [GS85, p. 114 et 115, 132 et 133] et [Duv90, p.220 à 224].

De façon générale, la recherche d'un écoulement pour un fluide parfait incompressible irrotationnel plan stationnaire peut se réduire à la détermination de la fonction ϕ vérifiant l'équation de Laplace

$$\Delta\phi = 0 \quad (9.73)$$

dans l'écoulement. Si un obstacle est présent, il faut rajouter des conditions aux limites de type (9.69) ainsi que du type

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \vec{v}(x,y) = \vec{v}_0, \quad (9.74)$$

où \vec{v}_0 est la vitesse à l'infini, c'est-à-dire loin de l'obstacle. L'existence et l'unicité mathématique est assurée. Pour plus de détails, voir [GS85, p. 119 à 121]. \diamond

9.5. Écoulement de fluides réels en dynamique

Dans la vie courante, sur la terre ferme ce sont les frottements qui permettent de poser les objets, de se déplacer, Imaginez votre vie sur une immense patinoire! Dans les liquides, de la même façon, c'est les frottements des particules entre elles et sur les parois, responsables de la viscosité, qui vont permettre un mouvement possible!

Dans la réalité, un certain nombre d'hypothèses faites en section 9.4.3 sont fausses. Même, si les résultats sont proches de ceux obtenus expérimentalement loin des parois, il faut regarder ce qui se passe si on a plus les hypothèses faites, rappelées ici :

- fluides parfaits (non visqueux);
- écoulement incompressibles;
- écoulement irrotationnel;
- écoulement plan;
- écoulement stationnaire.

Pour la suite, outre aux ouvrages déjà cités [GS85, Duv90] on renverra aux ouvrages (assez théoriques) [Cau08, Com06, Com02].

9.5.1. Généralités

Nous verrons qu'un certain nombre des hypothèses citées ci-dessus doivent être progressivement étudiées et abandonnées pour étudier le comportement réel des fluides, dans des domaines de plus en plus difficiles. Nous souleverons alors certains paradoxes (comme celui de d'Alembert vu dans l'exemple 4 page 61). Nous tâcherons de donner des exemples concrets en section 9.5.9 page 74.

La première hypothèse à abandonner est celle des fluides parfaits. Dans la réalité, il existe des forces de viscosité qui font que d'une part la définition 9.3 n'est plus valable et d'autre part que l'hypothèse (9.68) n'est plus valable.

9.5.2. Fluides (newtonien) visqueux incompressibles

On pourra consulter [Duv90, p.181,182]

ou

http://fr.wikipedia.org/wiki/Fluide_newtonien

Pour permettre de sortir du cadre de la définition 9.3, on autorise des contraintes tangentielles et on fait apparaître une viscosité du fluide.

On note

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (9.75)$$

Dans un cadre dynamique général, on parle alors de fluide newtonien et on remplace (9.2) par l'expression suivante du tenseur des contraintes

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (9.76)$$

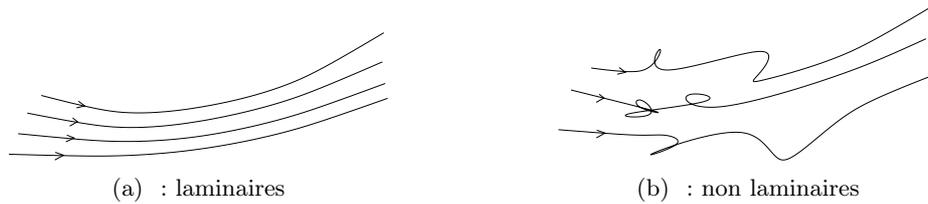


FIGURE 9.16. Deux types d'écoulements.

La force élémentaire donnée par (9.1) est encore valable avec

$$\tau = [\sigma]\vec{n}. \quad (9.77)$$

Dans l'équation (9.76), la pression P apparaît comme dans (9.2). Apparaît aussi un coefficient de viscosité a . Attention, il est usuellement noté μ comme dans [Duv90, Éq. VIII.10 p. 182], lettre que nous avons utilisée ici pour la masse volumique. \diamond

En présence d'un obstacle, la condition (9.69) est cette fois-ci remplacée par

$$\text{En tout point du bord de l'obstacle, la vitesse du fluide est égale à celle de l'obstacle.} \quad (9.78)$$

En effet, cela est dû à la viscosité du fluide qui « frotte » sur l'obstacle. En particulier, pour des obstacles immobiles

$$\text{En tout point du bord de l'obstacle, la vitesse du fluide est nulle.} \quad (9.79)$$

L'incompressibilité des fluides peut être conservée comme hypothèse dans la mesure où l'on étudie

- des liquides ;
- des gaz avec des vitesses pas trop élevées (voir (9.55) et note page 56).

L'hypothèse d'écoulement plan et irrotationnel peut être abandonnée. Dans cette section, on parlera donc d'écoulement de fluides (newtonien) visqueux incompressibles.

Pour plus de détails, on pourra consulter [Duv90, chapitre 9], [Com06, chapitre VIII].

De façon approximative, l'abandon de l'hypothèse fluide parfait et écoulement irrotationnel se traduit par l'apparition de la viscosité, donc de frottements localisés, entre les particules de fluides ou entre le fluide et d'éventuelles parois d'obstacles (où la vitesse est nulle selon (9.78)) mais aussi de turbulences, dues au fait de tourbillons locaux (comme sur la figure 9.10 page 58). Cette turbulence est aussi à l'origine des comportements chaotiques des fluides (très sensibles aux conditions initiales).

On pourra consulter pour plus de détails [Com06, chapitre V]. (*résumer AP*)

Dans ce dernier cas, on n'a plus des écoulements unidimensionnels comme le montre la figure 9.9, ou laminaires (figure 16(a)) (où deux particules fluides voisines à un instant donné restent voisines aux instants suivants) mais des écoulement comme ceux représentés sur la figure 16(b).

Voir

http://fr.wikipedia.org/wiki/Ecoulement_laminaire

De plus, l'hypothèse (9.78) fait apparaître une couche limite. Voir figure 9.17. Dans cette couche, localisée près des parois des obstacles, les variations de vitesse sont élevées et la viscosité du fluide apparaît fortement. Au contraire, en dehors de cette couche, la viscosité n'intervient plus et les fluides se comportent comme des fluides parfaits.

Voir par exemple [Com06, chapitre VIII] ou

http://fr.wikipedia.org/wiki/Couche_limite

L'étude mécanique et physique complète est fort difficile et l'on n'abordera plus que quelques situations, décrites et expliquées de façon qualitatives.

En généralisant la note page 63, les équations de Navier-Stokes gouvernent la recherche d'un d'un écoulement de fluide newtonien incompressible (voir [Duv90, Éq. (VIII.8), (VIII.9), (VIII.10) et (VIII.11)]. En présence d'un obstacle, on rajoute les conditions aux limites (9.78) et éventuellement du type (9.74). On peut classifier les fluides grâce au nombre de Reynolds qui

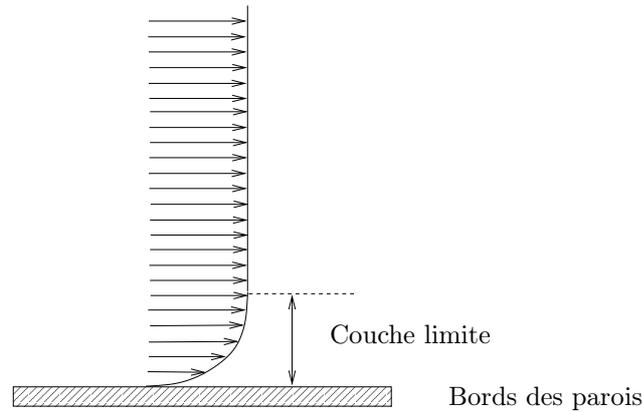


FIGURE 9.17. Couche limite

permet de comparer une grandeur caractéristique à la viscosité du fluide. De façon générale, sur le plan mathématique, l'existence et l'unicité ont été montrée en dimension 2. En dimension 3, le problème reste ouvert ! Pour plus de détails, voir [Duv90, p. 181 à 186 et chapitre 9]. \diamond

9.5.3. Étude d'écoulements uniformes à l'infini autour d'un obstacle

La plupart des exemples que nous traiterons en section 9.5.9 peuvent être décrits dans la situation suivante :

Comme indiqué sur la figure 18(a), on considère l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle indéformable supposé immobile. Cet écoulement est uniforme à l'infini, c'est-à-dire, qu'il existe une vitesse \vec{v}_0 telle que (9.74) ait lieu. Sur la figure 9.18, les lignes de courant ont été représentées schématiquement. Elles s'écoulent de la gauche vers la droite et s'écartent de l'objet à son approche et demeurent parallèles « loin de l'objet » à cause de la condition (9.74). Pour simplifier, on supposera l'écoulement permanent. De plus, sur les figures, la vitesse \vec{v}_0 est horizontale, dirigée vers la gauche. Le dessin est fait dans un plan qui pourra être vertical ou horizontal.

Par changement de référentiel, on voit que cette situation correspond aussi à l'étude d'un objet solide en mouvement rectiligne et uniforme de vitesse \vec{v}_0 , horizontale et cette fois-ci orientée vers la gauche de la figure 18(b). dans un fluide qui est supposé au repos loin du solide, c'est-à-dire, dans la région non perturbée par le mouvement ce celui-ci.

EXEMPLE 9.31. On pourra étudier le mouvement d'un navire en eau calme.

EXEMPLE 9.32. On pourra étudier le mouvement d'un avion en atmosphère calme.

Une troisième situation sera aussi abordée. On considère aussi que l'objet se déplace avec une vitesse constante par rapport au sol notée $\vec{V}_{\text{objet/sol}}$. On suppose que le fluide se déplace avec une vitesse constante par rapport au sol (loin de l'objet, c'est-à-dire, dans la région non perturbée) notée $\vec{V}_{\text{fluide/sol}}$. Dans ce cas, la vitesse du fluide par rapport à l'objet \vec{V} (loin de l'objet) est donnée par

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{fluide/objet}} = \vec{V}_{\text{fluide/sol}} + \vec{V}_{\text{sol/objet}} = \vec{V}_{\text{fluide/sol}} - \vec{V}_{\text{objet/sol}} = \vec{V}_{\text{fluide/sol}} - \vec{V}_{\text{objet/sol}}.$$

d'où

$$\vec{V} = -\vec{V}_{\text{objet/sol}} + \vec{V}_{\text{fluide/sol}} \quad (9.80)$$

EXEMPLE 9.33. On pourra étudier le mouvement d'un objet par rapport au sol, soumis au frottement de l'air avec un vent de vitesse donnée par $\vec{V}_{\text{fluide/sol}} = \vec{V}_{\text{vent}}$. Par exemple, si l'objet est un coureur de vitesse $\vec{V}_{\text{coureur/sol}}$, on a donc la vitesse de l'air par rapport au coureur donnée par

$$\vec{V}_{\text{fluide/coureur}} = -\vec{V}_{\text{coureur/sol}} + \vec{V}_{\text{vent}}. \quad (9.81)$$

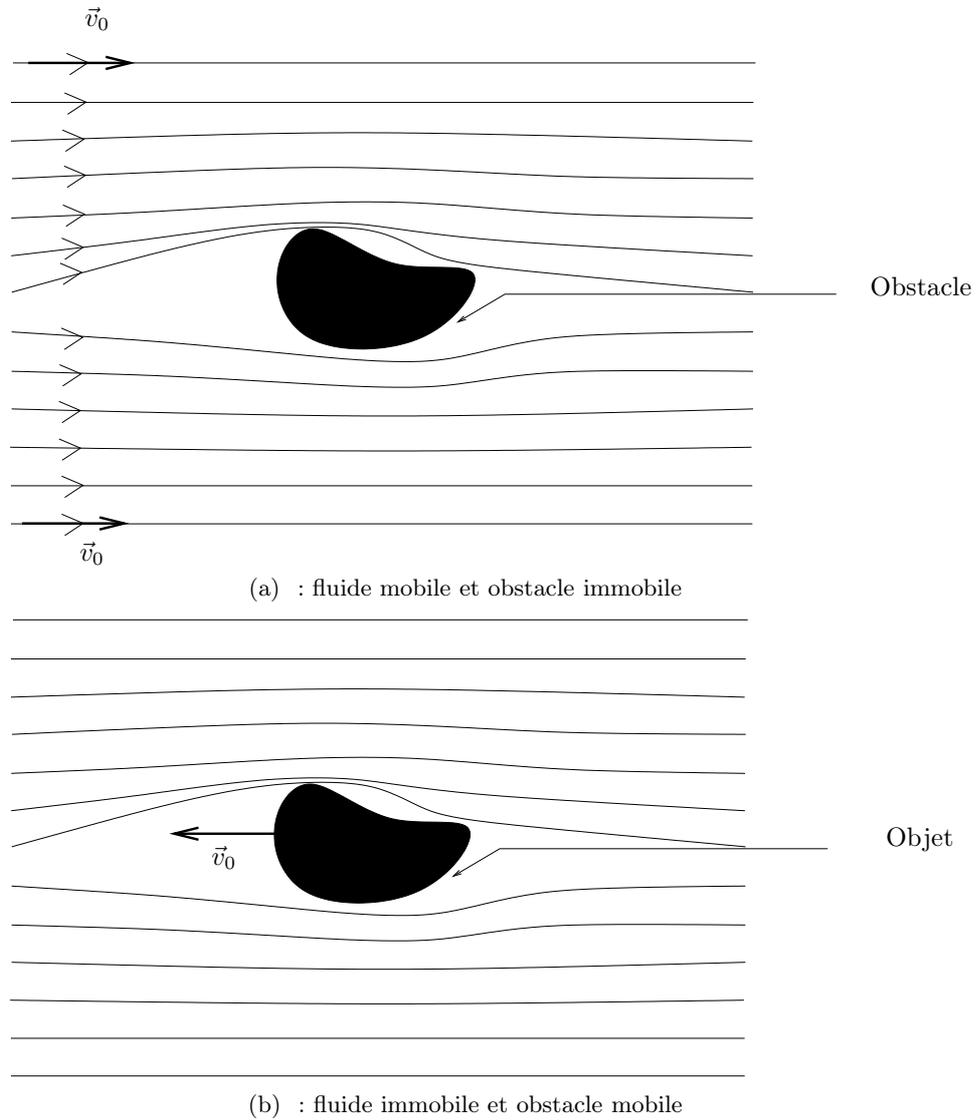


FIGURE 9.18. Écoulements uniformes à l'infini autour d'un obstacle

Si le mouvement étudié est le long d'un axe, on pourra algébriser le problème en considérant que toutes les vitesses dirigées vers la droite de l'axe ou de la figure 9.19 sont positives vers la droite (et négatives sinon) et écrire la relation (9.81) sous la forme

$$V = V_{\text{fluide/coureur}} = -V_{\text{coureur/sol}} + V_{\text{vent}}. \quad (9.82)$$

9.5.4. Forces de traînée et de portance

On pourra consulter [Com06, chapitre IX], [Com02, p. 151 à 156].

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Portance>

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Traînée>

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Aérodynamique>

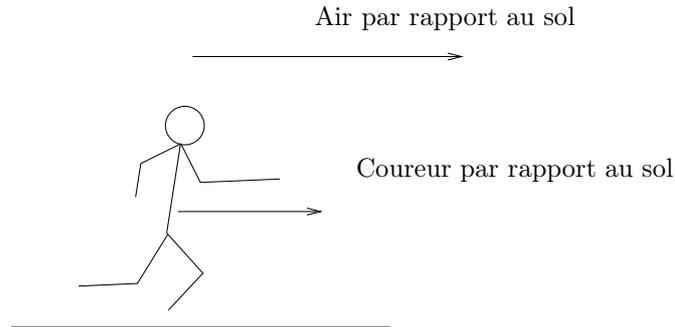


FIGURE 9.19. le coureur et l'air.

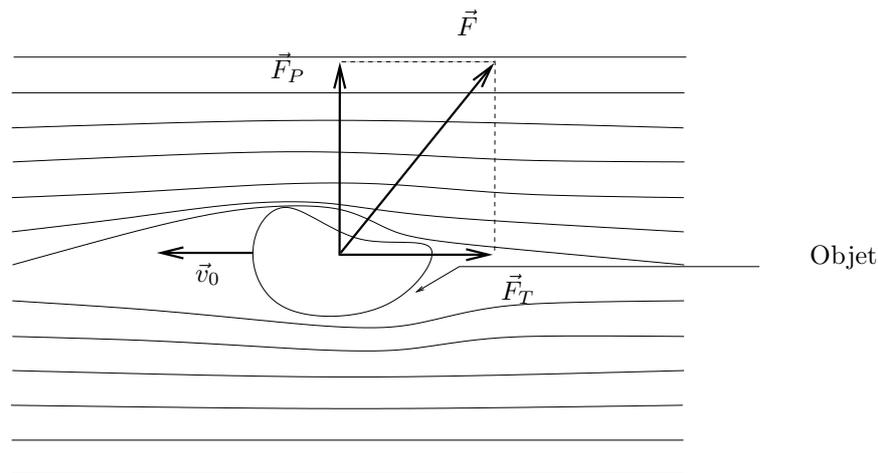
On suppose que l'on étudie un fluide autour d'un objet comme décrit en section 9.5.3 et on cherche \vec{F} l'action du fluide sur l'objet. On peut donc supposer le fluide immobile et noter, comme l'indique la figure 18(b), \vec{v}_0 , la vitesse de l'objet par rapport au fluide (au repos).

On déjà vu lors de l'exemple 4 page 61 le paradoxe de d'Alembert que, sans viscosité, l'action du fluide sur un objet cylindrique est nul!

On peut montrer qu'il en est de même pour tout objet dans un fluide incompressible parfait. Voir [Com06, p. 228-229]. \diamond

Si l'on reprend l'exemple 6 page 62, on a vu qu'un tourbillon dans le sens trigonométrique explique la présence d'une force verticale dirigée vers le bas, quelle que soit la vitesse de l'objet. Ce tourbillon est en fait présent et peut s'expliquer par la viscosité : D'après (9.78), la rotation de l'objet entraîne la rotation des couches fluides voisines (sur l'épaisseur de la couche limite). et c'est la viscosité qui permet l'apparition d'une force de norme donnée par (9.71). On parle de force de portance, notée \vec{F}_P , qui est donc perpendiculaire à $\vec{0}$.

De même, la viscosité est responsable sur le plan macroscopique d'une force de frottement, c'est-à-dire, d'une force qui pousse l'objet dans la même direction que la vitesse \vec{v}_0 . Cette force est de même sens que celle du fluide par rapport à l'objet ou opposée à la vitesse de l'objet par rapport au fluide. On parle de force de traînée, notée \vec{F}_T .

FIGURE 9.20. Action du fluide sur l'objet : $\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_T$.

Bref, l'action \vec{F} l'action du fluide sur l'objet est donnée par

$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_T, \quad (9.83)$$

où la force de portance \vec{F}_P est perpendiculaire à \vec{v}_0 , et la force de traînée \vec{F}_T est colinéaire à $\vec{0}$ et dans le même sens que la vitesse du fluide par rapport à l'objet. Voir figure 9.20 page précédente

REMARQUE 9.34. Les deux forces \vec{F}_P et \vec{F}_T sont couplées et ne peuvent apparaître qu'ensemble !

Sur le plan microscopique, si on utilise la formule (9.1) et (9.76) dans le cas général, chaque facette infinitésimale de la surface de l'objet est soumise à une force élémentaire ayant une composante normale égale à PdS et une composante tangentielle. Si on était capable d'intégrer cette force, on aurait l'expression exacte de \vec{F} , ce que l'on ne sait faire dans le cas général. Pour plus de détails, lire [Com06, p. 230]. \diamond

En fait, on pose *a priori* qu'il existe deux coefficients notés C_P et C_T et appelés coefficient de portance et de traînée tels que

$$F_P = \frac{1}{2}C_P S \mu v_0^2,$$

$$F_T = \frac{1}{2}C_T S \mu v_0^2,$$

où

- S est une surface de référence en m^2 .
- μ la masse volumique du fluide en kgm^{-3} ;
- v_0 la norme de la vitesse du fluide par rapport au corps en ms^{-1} (loin du corps).

Une analyse dimensionnelle montre que C_P et C_T sont sans unités. Rien n'interdit que ces coefficients dépendent eux-même de S , μ et v_0 . En fait, ils sont surtout fonction de la forme géométrique du corps, de la rugosité des parois et de la viscosité du fluide. Ils peuvent dépendre de v_0 . Habituellement, S est la surface maître couple, c'est-à-dire la projection de la surface de l'objet sur un plan perpendiculaire à \vec{v}_0 . Enfin, on admettra que, sauf dans les cas symétriques analogues à l'exemple 4 page 61, l'écoulement définit deux zones de pression de part et d'autre de l'objet par rapport aux lignes de courant du fluide à l'infini : l'une est de forte pression et l'autre de basse pression. La force de portance est alors dirigée des hautes vers les basses pressions.

PROPOSITION 9.35. *En pratique et sur des petites échelles de vitesses, on supposera que les coefficients C_P et C_T ne dépendent que de la forme géométrique du corps, de la rugosité des parois et de la viscosité du fluide et qu'ils sont indépendants de v_0 .*

Pour plus de détails, lire [Com06, p. 231] ou [Cau08, p. 63].

Bref, on récapitule tout cela

DÉFINITION 9.36. Un corps placé dans un fluide subit une force égale à \vec{F} . Pour l'analyse, on décompose cette force en une composante selon la direction de \vec{v}_0 et une composante perpendiculaire à \vec{v}_0 :

$$\vec{F} = \vec{F}_P + \vec{F}_T, \quad (9.84)$$

Voir la figure 9.21. On a alors

$$F_P = \frac{1}{2}C_P S \mu v_0^2, \quad (9.85a)$$

$$F_T = \frac{1}{2}C_T S \mu v_0^2, \quad (9.85b)$$

où

- \vec{F}_P est dirigée des hautes pressions vers les basses pressions ;
- \vec{F}_T est dirigée dans le même sens que la vitesse du fluide par rapport à l'objet ;
- S est la surface maître couple, c'est-à-dire la projection de la surface de l'objet sur un plan perpendiculaire à \vec{v}_0 , en m^2 ;
- μ la masse volumique du fluide en kgm^{-3} ;
- v_0 la norme de la vitesse du fluide par rapport au corps en ms^{-1} (loin du corps)

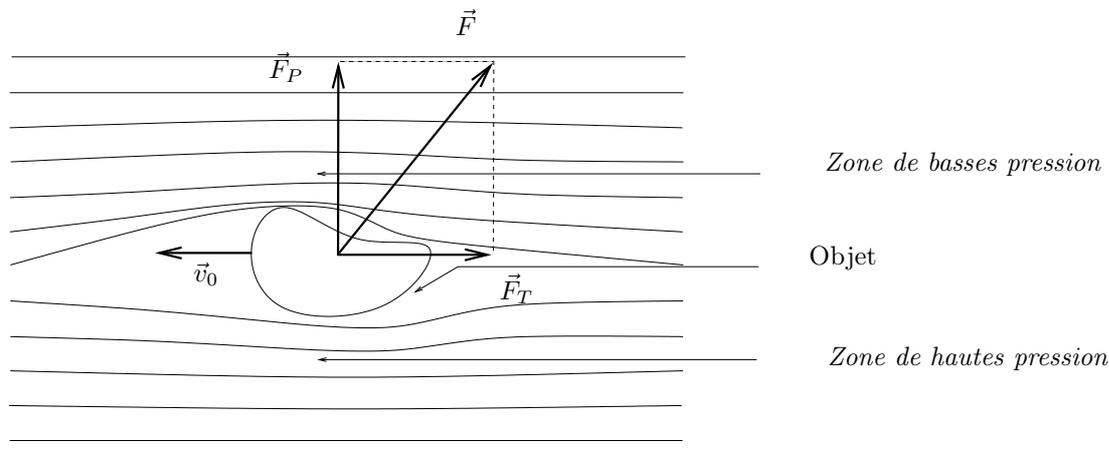


FIGURE 9.21. Action du fluide sur l'objet : $\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_T$.

Il existe aussi un couple. Pour plus de détails, lire [Com06, p. 231]. \diamond

La justification de la formule (9.85) est *a priori* difficile à expliquer dans le cas général. On pourra consulter [Com06, Sections B à H p. 231 à 263] où différents cas particuliers sont établis pour des cas de fluides visqueux. Pour la portance uniquement, une autre façon encore plus théorique de procéder est celle donnée dans [Cau08, p. 119 à 124]. La relation de Blasius permet de généraliser ce qui a été fait dans l'exemple 3 page 61 et de calculer en utilisant les champs complexes les forces exercées sur un cylindre dans un fluide parfait. Le théorème de Kutta-Jukowski et permet de montrer la formule (9.71). Enfin, on montre la dépendance de la force de portance en v_0^2 pour certains profils, dits de Jukowski en montrant qu'il existe une circulation (tourbillon).

\diamond

La page

http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Kutta-Jukowski

donne une démonstration élémentaire de la formule (9.71) qui s'appuie sur le théorème de Bernoulli 9.27.

On peut aussi trouver sur

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Portance>

une explication dite « populaire sur l'origine de la portance ». Il y est aussi dit qu'elle serait « scientifiquement contestée [puisqu'elle] s'applique mal à la portance des profils minces et des plaques planes sans épaisseur. » Elle est fautive dans la mesure où seule une circulation dans un fluide parfait ou des effets de viscosité permettent d'expliquer la portance.

Donnons-la néanmoins : Considérons un objet profilé comme l'indique la figure 9.22 et qui a un profil dysymétrique. Les particules de fluides qui vont au dessus du profil (l'extrados) ont des vitesses plus élevées que celles qui vont au dessous du profil (l'intrados). En effet, cela est justifié par l'équation (9.53) en supposant l'écoulement laminaire et vérifiant (9.55) et en admettant qu'au dessus du profil, les lignes de courant « se ressèrent » plus sur l'extrados que sur l'intrados. Le théorème de Bernoulli permet de conclure, en négligeant les effets de viscosité : la pression est donc plus faible sur l'extrados que sur l'intrados et donc il existe une portance vers le haut.

Si ce profil est symétrique, ce raisonnement ne marche pas, ce qui expliquerait le choix particulier des profils d'ailes, type ailes d'avion. Voir section 9.5.9.3 page 75.

EXEMPLE 9.37. On étudie le service d'un individu au tennis. On suppose qu'il sert dans un plan (sagittal) à angle droit par rapport à la ligne de fond, dans un plan parallèle aux grands cotés du terrain de tennis. On suppose que la balle n'est soumise qu'à une force de traînée à coefficient constant et que le joueur ne donne

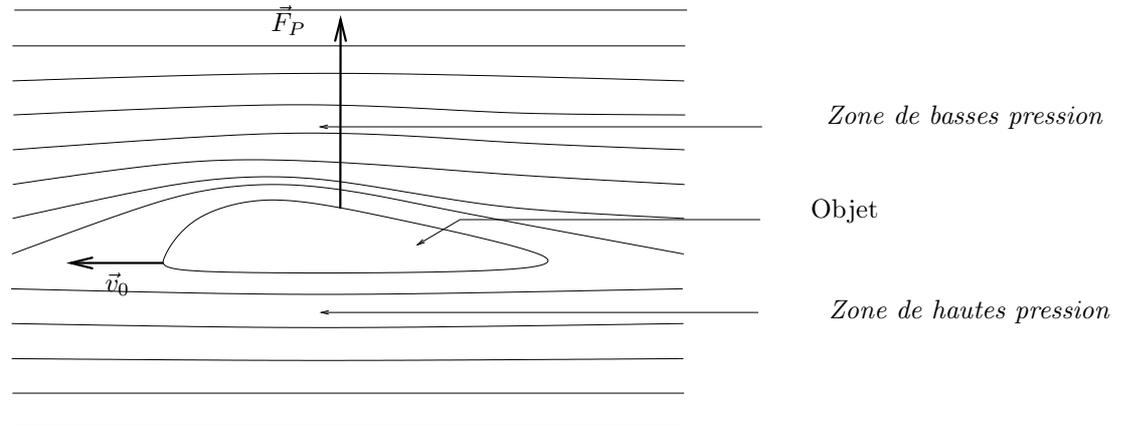


FIGURE 9.22. Principe de la force de portance.

aucun effet de rotation de la balle. Les données sont les suivantes :

$$g = 9.810000 \text{ ms}^{-2},$$

la masse de la balle est

$$m = 57.500000 \text{ g},$$

le coefficient de traînée est

$$C_T = 0.640000,$$

la surce du maître couple est

$$S = 33.300000 \text{ cm}^2.$$

La masse volumique de l'air à 20° est

$$\mu = 1.229000 \text{ kgm}^{-3}.$$

La vitesse initiale de la balle est

$$v_0 = 136 \text{ kmh}^{-1}.$$

La balle est frappée à la hauteur

$$H = 2.420000 \text{ m}.$$

La hauteur du filet est

$$h = 0.914000 \text{ m}.$$

La longueur du carré de service est

$$l = 6.400000 \text{ m}.$$

La demi-longueur du terrain est

$$L = 11.890000 \text{ m}.$$

Une simulation montre que l'intervalle auquel doit appartenir l'angle α qui correspond à l'angle de la vitesse initiale avec l'horizontal, est $[-4.400613^\circ, -2.710693^\circ]$. Si on ne prend pas en compte la force de traînée cet intervalle est $[-4.886772^\circ, -3.955783^\circ]$, beaucoup plus restreint !

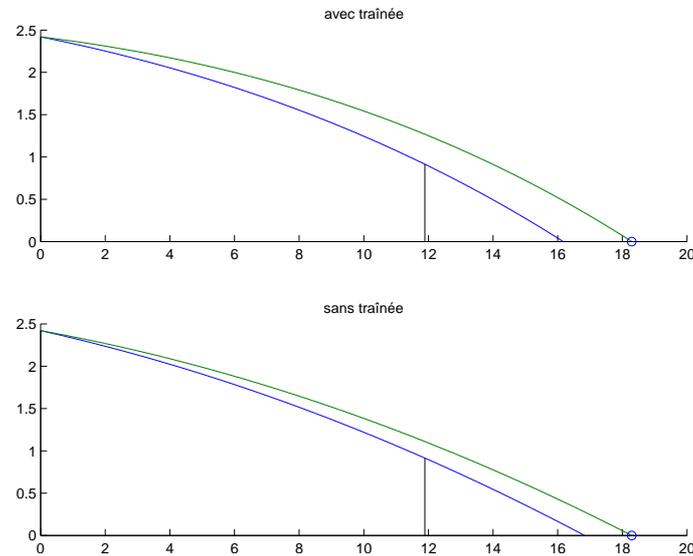


FIGURE 9.23. Le service avec ou sans force de traînée.

Voir figure 9.23. Autrement dit la force de traînée facilite (légèrement) le service !

Bien entendu, tout cela n'est que le résultat d'une simulation numérique et ne serait être une description exacte du réel !

Pour plus de détails sur ce calcul, on pourra consulter l'annexe K.

9.5.5. Commentaires physiques sur les forces de traînée et de portance

Non rédigé.

On renvoie aussi à [Com06, p. 228 à 324]

A résumer AP

Faire AP : on renvoie aux notes de K. Faire oralement.

9.5.6. Effet Magnus

On pourra consulter [GS85, p. 114 et 115], [Com02, p. 155] et

http://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_Magnus

ou

http://magpowersystem.free.fr/Effet_Magnus/Effet_Magnus.html, dont est extraite la figure 9.24 page ci-contre.

Voir aussi l'animation très jolie :

<http://i.kinja-img.com/gawker-media/image/upload/s--WslELNt4--/1348091010756291175.gif>

issue de

http://io9.com/the-magnus-effect-is-why-a-ball-with-a-bit-of-backspin-1718092647?utm_campaign=socialflow_io9_facebook&utm_source=io9_facebook&utm_medium=socialflow

L'effet Magnus est un autre effet des forces de pression pour un fluide visqueux. On suppose que l'on a un objet sphérique évoluant en translation et rotation autour de son centre dans un fluide au repos. On est dans la situation de la section 9.5.3. On a constaté en section 9.4.3 lors de l'exemple 4 page 61 que si on modélise l'écoulement plan irrotationnel parfait, aucune force n'est à prévoir. En revanche, on voit une force apparaître si on rajoute un tourbillon pour un objet cylindrique (exemple 6 page 62) que cet objet tourne ou

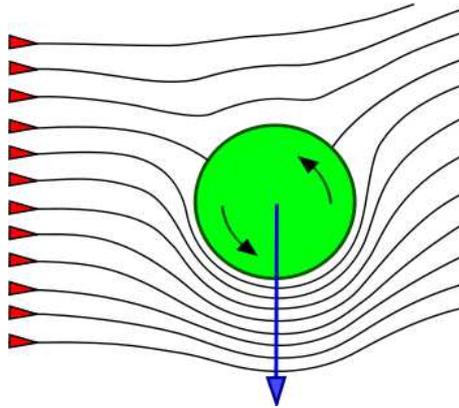


FIGURE 9.24. L'effet Magnus (dans un plan vertical ou horizontal)

pas ! On a constaté que si le tourbillon tourne dans le sens trigonométrique, la force est dirigée vers le bas et réciproquement.

Dans la vie courante, on peut aussi expliquer cela de façon quantitative de la façon suivante, pour un fluide visqueux. On néglige, pour cette explication, la force de traînée par rapport à la force de portance, dont les effets sont prédominants.

Si l'objet a une vitesse de rotation trigonométrique et que les particules de fluides se déplacent relativement à lui vers la droite (comme sur la figure 9.24), cela revient à dire, comme en section 9.5.3 que l'objet se déplace vers la gauche. Par viscosité (voir (9.78)), la rotation de l'objet entraîne la rotation des couches fluides voisines (sur l'épaisseur de la couche limite). Dans la partie supérieure de l'objet circulaire, les particules de fluide ont une vitesse par rapport à l'objet, dirigée vers la droite et celle-ci est donc diminuée par viscosité. Au contraire, dans la partie inférieure, la vitesse des particules de fluides par rapport à l'objet est augmentée par viscosité. Si l'on regarde le champ des vitesses du fluide par rapport à l'objet, dans le référentiel lié à celui-là, la vitesse est donc moins importante dans la partie supérieure et plus importante dans la partie inférieure, comme le montre la figure 9.25. Ainsi, en supposant, qu'il est légitime d'appliquer le Théorème de Bernoulli (9.27 page

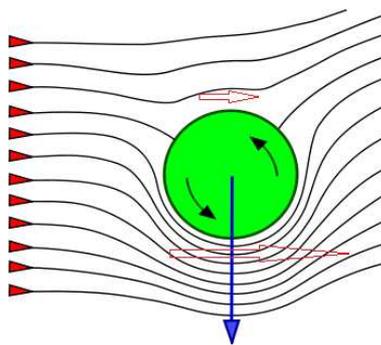


FIGURE 9.25. L'effet Magnus : champ des vitesses au-dessus et en dessous)

57) pour la partie du fluide qui est au-delà de la couche limite, là où la vitesse est la plus importante, la pression est la plus faible. Ainsi, dans notre cas de figure, la pression est la plus faible en bas et une force est donc appliquée vers le bas de la figure. Dans ce cas, la trajectoire de la balle est modifiée comme l'indique la figure 9.26 page suivante.

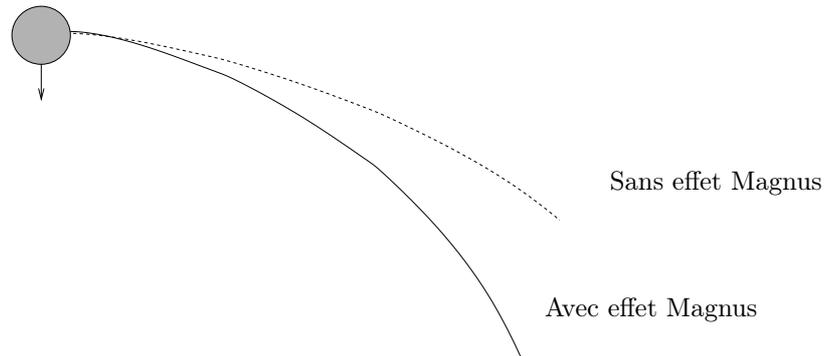


FIGURE 9.26. Déviation de la trajectoire à cause de l'effet Magnus (dans un plan vertical ou horizontal)

Naturellement, elle sera vers le haut si le sens de rotation de la balle est celui des aiguilles d'une montre ou si la balle se déplace vers la droite et la trajectoire est modifiée dans l'autre sens !

Selon que le prenne le plan de la figure horizontal ou vertical, les exemples sont très nombreux : balles liftées ou coupées au tennis, brossées au football, ou au ping pong.

Le tourbillon introduit artificiellement dans l'exemple 6 page 62 permet en fait de prendre en compte la mise en rotation des couches limites à cause de la viscosité du fluide ! \diamond

EXEMPLE 9.38. On pourra consulter l'annexe L présentant de façon plus détaillé l'effet Magnus sur un tir au football.

9.5.7. Et la poussée d'Archimède en dynamique

Négligée, elle peut avoir son importance (flottaison d'un bateau qui bouge !)

Vérifier et rédiger AP

9.5.8. Fluides (newtonien) visqueux compressibles

Dans les problèmes d'aéronautiques à des vitesses plus importantes, notamment quand on s'approche de la vitesse du son, l'hypothèse d'incompressibilité devient éronnée. On est alors dans le domaine de l'aéronautique et des souffleries, pour lesquelles la vitesse des fluide atteint ou dépasse celle du son.

Cette partie, encore plus difficile, n'est pas traitée.

On renvoie à [Com06, section C p. 153] ou [Duv90, chapitre 11]

9.5.9. Application aux sports

Section non rédigée. S'appuyer sur les doc de K.

9.5.9.1. *Natation.*

Voir exercice de TD.

9.5.9.2. *Bateaux à voiles.* Voir [Glé05, pages 325 à 379] ou

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Voile_\(navire\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Voile_(navire))

ou le texte de l'exmple 9.39, extrait de [les13, p. 44] (*Taper AP dire faux!! mais :*). On pourra aussi consulter avec profit [Com06, p. 248 à 253]. (*Résumer et taper AP*).

EXEMPLE 9.39 (Un petit texte sur la navigation extrait de la page 44 de [les13]).

«

Un voilier peut-il aller plus vite que le vent ?

SUR LES PREMIERS BATEAUX, les voiles étaient hissées perpendiculairement aux courant aériens. Les embarcations se laissaient porter par le vent et il fallait attendre des brises favorables pour atteindre la destination voulue. Ces premiers voiliers n'allaient pas plus vite que le vent.

PLUS TARD, LES MARINS réalisèrent qu'en plaçant les voiles parallèlement au vent ils pouvaient aussi avancer. Le vent étant dévié par la voile, il engendre une force d'avancement perpendiculaire à celle-ci ; l'intensité de cette force est proportionnelle au carré de la vitesse du vent et à la surface de la voile. Par conséquent, en augmentant la surface de voilure, un voilier peut aller plus vite que le vent. Mais est-ce sans limite ? Pour répondre à cette question, imaginons-nous sur une bicyclette. Quand nous pédalons un jour sans vent, nous ressentons un vent venant de l'avant. Sa vitesse est la même que celle de la bicyclette. Si maintenant, le vent souffle perpendiculairement à la route, alors nous ressentons un vent apparent dont la provenance s'oriente graduellement vers l'avant au fur et au mesure que notre vitesse augmente. Ainsi, si nous allons à la même vitesse que le vent réel, le vent apparent vient de l'avant avec un angle de 45 degré par rapport à la route. Et si nous allons bien plus vite que le vent réel, le vent apparent est directement contraire à notre route. Il en va de même pour le voilier. Si la vitesse augmente, le vent apparent tourne et il faut orienter la voile pour que son incidence reste parallèle au vent apparent. La force propulsive est alors moins orientée vers l'avant. Si la vitesse augmente encore, la force propulsive devient perpendiculaire à la route et ne joue plus son rôle : le voilier a atteint sa vitesse limite. Celle-ci est proportionnelle à la vitesse du vent, le coefficient de proportionnalité étant déterminé par la forme des voiles. En pratique, les voiliers légers et bien voilés - tels les multicoques océaniques - peuvent dépasser deux ou trois fois la vitesse du vent.

□ De Arezki Boudaoud, École Normale Supérieure de Lyon.

»

9.5.9.3. Aviation.

Voir [Com06, chapitre X].

9.6. Applications et exemples donnés en examens

- (1) Voir l'énoncé et le corrigé de l'exercice 2 du CCF2 (donné à l'automne 2012) sur la page habituelle <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html> ou bien voir directement l'énoncé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2L2biomecaA12.pdf> et le corrigé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/corCCF2L2biomecaA12.pdf>
- (2) Voir l'énoncé et le corrigé de l'exercice 2 du CCF2 (donné au printemps 2011) sur la page habituelle <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html> ou bien voir directement l'énoncé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2L2biomecaP11web.pdf> et le corrigé sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/corCCF2L2biomecaP11.pdf>

Vitesse, temps, distance

A.1. Introduction

La vitesse moyenne est la rapport de la distance sur le temps que l'on note

$$v = \frac{d}{t} \quad (\text{A.1})$$

On considère un solide de vitesse constante v , par rapport à un origine, sur un axe. Si on algèbrise la relation (A.1) et que l'on considère que la distance, notée x , comme l'abscisse et la vitesse sont orientées, par rapport à un sens, avec une origine fixée, sur un axe, on a cette fois-ci la relation

$$v = \frac{x - x_0}{t}, \quad (\text{A.2})$$

ou encore

$$x = vt + x_0. \quad (\text{A.3})$$

où x_0 est l'abscisse du solide à l'instant $t = 0$. Ces deux relations interviennent dans différents problèmes, dont quelques exemples sont présentés ci-dessous. Si deux solides ont pour vitesses respectives v_1 et v_2 , qu'à l'instant $t = 0$, ils occupent la position d'abscisse respective $x_{1,0}$ et $x_{2,0}$, on a donc, à tout instant t ,

$$x_1 = v_1 t + x_{1,0}, \quad (\text{A.4a})$$

$$x_2 = v_2 t + x_{2,0}. \quad (\text{A.4b})$$

Ils se croisent quand leurs positions sont égales, c'est-à-dire, si et seulement si

$$v_1 t + x_{1,0} = v_2 t + x_{2,0},$$

soit encore si

$$t = -\frac{x_{2,0} - x_{1,0}}{v_2 - v_1}, \quad (\text{A.5})$$

cet instant étant lui aussi algébrique, c'est-à-dire que s'il est positif, la rencontre a lieu après l'origine des temps (ce qui sera souvent le cas étudié) et s'il est négatif, la rencontre a lieu avant. Pour pouvoir définir par $v_2 - v_1$, il faut donc que v_1 et v_2 soient distincts. Dans ce cas, les abscisses des deux solides sont donc données par (A.4). De nombreux problèmes utilisent la relations (A.4) et (A.5). On peut raisonner autrement et écrire aussi directement que les instants et les abscisses de rencontre sont égaux : de (A.4), on tire l'abscisse commune de rencontre, donnée par

$$\frac{x - x_{1,0}}{v_1} = \frac{x - x_{2,0}}{v_2}$$

soit

$$v_2(x - x_{1,0}) = v_1(x - x_{2,0})$$

soit, après calculs,

$$x = \frac{-v_1/v_2 x_{2,0} + x_{1,0}}{1 - v_1/v_2} \quad (\text{A.6})$$

avec $v_1 \neq v_2$. De nombreux problèmes utilisent la relations (A.6)

A.2. Des problèmes de trains et de rugbymen

Considérons deux objets avançant l'un vers l'autre, de vitesse (en norme) respectivement égale à v et V , séparés par une distance initiale L . La distance parcourue par le premier objet (noté 1) sera définie par (A.6) avec $x_{1,0} = 0$, $v_1 = v$, $x_{2,0} = L$ et $v_2 = -V$. Il suffit donc que $-v \neq V$, ce qui est toujours vrai! On obtient alors

$$x = \frac{v/V}{1 + v/V}L,$$

soit encore

$$x = \frac{1}{V/v + 1}L. \quad (\text{A.7})$$

Considérons deux objets avançant maintenant dans le même sens, de vitesse (en norme) respectivement égale à v et V , séparés par une distance L (le premier objet étant placé avant le second). La distance parcourue par le premier objet (noté 1) sera définie par (A.6) avec $x_{1,0} = 0$, $v_1 = v$, $x_{2,0} = L$ et $v_2 = V$. Il suffit donc que $v \neq V$. On obtient alors

$$x = \frac{-v/V}{1 - v/V}L$$

soit encore

$$x = \frac{1}{1 - V/v}L \quad (\text{A.8})$$

Cette abscisse sera positive si $V < v$, c'est-à-dire le premier objet va plus vite que le second, pour pouvoir le rattraper!

EXEMPLE A.1.

Énoncé

Lors d'un match de rugby, un pilier court avec le ballon à une vitesse constante de 20 km/h en direction de la ligne d'essai. Un arrière de l'équipe adverse, et situé à 20 m en face du pilier, arrive en sens opposé à une vitesse constante de 30 km/h. De combien de mètres le pilier aura-t-il avancé avant de se faire plaquer?

Corrigé

On applique (A.7) avec $V/v = 30/20 = 3/2$ et $L = 20$ m. On a donc

$$x = \frac{1}{3/2 + 1}L = \frac{1}{5/2}L = \frac{2}{5} \times 20,$$

soit

$$x = 8 \text{ m.} \quad (\text{A.9})$$

EXEMPLE A.2.

Énoncé

Lors d'un match de rugby, un pilier court avec le ballon à une vitesse constante de 20 km/h en direction de la ligne d'essai. Un arrière de l'équipe adverse, et situé à 10 m derrière le pilier, arrive dans le même sens avec une vitesse constante de 30 km/h. De combien de mètres le pilier aura-t-il avancé avant de se faire plaquer?

Corrigé

On applique (A.8) avec $V/v = 20/30 = 2/3$ et $L = 20$ m. On a donc

$$x = \frac{1}{1 - 2/3}L = \frac{1}{1/3}L = 3 \times 20,$$

soit

$$x = 60 \text{ m.} \quad (\text{A.10})$$

De nombreuses variantes avec des trains, roulant dans le même sens, ou dans le sens opposé peuvent être proposés. On consultera aussi le célèbre problème d'Achille et la tortue (cf. exemple A.13).

EXEMPLE A.3.

Exercice issu du Mini-Rallye lors du Forum mathématiques vivantes, de l'école au monde "Les mathématiques nous transportent". 2015, Maison de mathématiques et de l'informatique, Lyon

Énoncé

La montée Saint-Barthélémy est trop raide. Mais lorsque je monte en vélo au mont Cindre, la vitesse en km/h indiquée sur mon compteur est égale au dénivelé horaire en m/min indiqué sur mon altimètre. Quelle est la pente (exprimée en pourcentage) ?

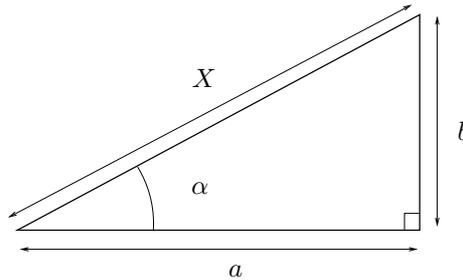
Corrigé

FIGURE A.1. Le vélo et les deux compteurs.

Notons v la vitesse et d le dénivelé horaire. Travaillons d'abord en USI.

En 1 seconde, le vélo franchit la distance $v = X$ (voir figure A.1) et une hauteur $d = b$. On a aussi la valeur de la pente en pourcentage, p qui vérifie

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{p}{100}.$$

D'après le théorème de Pythagore, on a $X = \sqrt{a^2 + b^2}$ et donc

$$v = b \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\tan \alpha}\right)^2}$$

et donc

$$v = d \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}}.$$

Si maintenant v_0 désigne la valeur numérique de la vitesse exprimée en km/h, on a $v = v_0/3,6$ et si d_0 est la valeur du dénivelé horaire en m/min, on a $d = d_0/60$ et donc

$$\frac{v_0}{3,6} = \frac{d_0}{60} \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}}.$$

et, puisque $v_0 = d_0$, il vient

$$\frac{60}{3,6} = \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}}.$$

Si, dans un premier temps, on suppose la valeur de l'angle α suffisamment petite pour négliger 1 devant $\frac{1}{\tan^2 \alpha}$, qui est grand, on a donc

$$\tan \alpha = \frac{3,6}{60},$$

et donc

$$p = 100 \times \frac{3,6}{60} = 6\%.$$

Si on fait un calcul exact, on a

$$\frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{60^2}{3,6^2} - 1,$$

et donc

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{60^2}{3,6^2} - 1}},$$

soit

$$p = \frac{100}{\sqrt{\frac{60^2}{3,6^2} - 1}} \approx 6.010829$$

A.3. Des montres, des planètes et le sud

D'autres problèmes peuvent être résolus avec la formule (A.7) ou (A.8).

EXEMPLE A.4.

Exercice issu de [BC04].

Énoncé

On regarde une montre à aiguilles.

- (1) Quels sont les différents instants de la journée où la grande et la petite aiguilles sont superposées ?
- (2) Est-il possible que la grande aiguille, la petite aiguille et la troteuse soient superposées ?
- (3) Quels sont les différents instants de la journée où la grande et la petite aiguilles sont perpendiculaires ?
- (4) Quels sont les différents instants de la journée où la grande et la petite aiguilles sont opposées ?
- (5) De façon plus générale, quels sont les différents instants de la journée, où la grande aiguille est en avance (algébrique) d'une fraction de tour $\alpha \in]-1, 1[$ sur la petite aiguille.

Indication

On pourra d'abord traiter le cas général exposé dans la question 5 avant de revenir aux cas particuliers des questions 1, 3 et 4.

Corrigé

- (1) Plusieurs approches peuvent être envisagées.
 - (a) Étudions les différents instants où les deux aiguilles se superposent pendant que la petite parcourt un tour total de cadran, à partir de midi. À cet instant, il est clair que les deux aiguilles se superposent. Ensuite, la grande allant plus vite que la petite, elle parcourra un tour entier, reviendra à midi, pendant que la petite est donc sur une heure. Calculons le temps nécessaire, à partir de cet instant, pour que la grande rattrape la petite. C'est exactement le cas de la formule (A.8), où les vitesses sont les vitesses angulaires égales respectivement à $V = 1/12$ tour/heure pour la petite et $v = 1$ tour/heure pour la grande, les vitesses étant considérées positives dans ... le sens des aiguilles d'une montre ! On a donc $V/v = 1/12$. Les distances sont remplacées par des angles, que l'on peut mesurer ici en tour. L'avance de la petite aiguille par rapport à la grande vaut $1/12$ tour et donc $L = 1/12$. Ainsi, (A.8) donne

$$x = \frac{1}{1 - V/v} L \tag{A.11}$$

et donc

$$x = \frac{1}{1 - 1/12} \frac{1}{12} \tag{A.12}$$

soit

$$x = \frac{1}{11/12} \frac{1}{12} = \frac{12}{11} \frac{1}{12} = \frac{1}{11}$$

Ainsi, la grande aiguille a parcouru $1/11$ de tour, correspondant donc à une durée de $60/11$ minutes ou à $1/11$ heure. On rajoute à cela l'heure déjà écoulé : à partir de midi, les deux aiguilles se superposent à tout d'abord à

$$t_1 = 0\text{h}, \quad (\text{A.13a})$$

puis à

$$t_2 = \frac{12}{11}\text{h} = 1\text{h} \frac{60}{11}\text{mn} = 1\text{h} 5\text{mn} \frac{300}{11}\text{s} \approx 1\text{h} 5\text{mn} 27,2727\text{s}. \quad (\text{A.13b})$$

Ensuite, le même temps s'écoule jusqu'à la troisième superposition. En effet, les deux aiguilles étant superposées à t_2 , on peut imaginer qu'elles sont superposées sur midi et qu'elles se superposeront jusqu'à t_3 et ainsi de suite. Bref, elles se superposeront à tous les instants (en heures)

$$t_n = \frac{n-1}{11} + n-1\text{h} = (n-1)\frac{12}{11}\text{h} \text{ où } 1 \leq n \leq 12. \quad (\text{A.14})$$

La première superposition a lieu à midi, la dernière à minuit ! On observe 12 superpositions.

- (b) On peut aussi faire moins de calculs et remarquer qu'à chaque tour de la grande aiguille, une rencontre aura lieu. En raisonnant comme précédemment entre t_3 et t_2 , la durée est la même qu'entre t_2 et t_1 . Ainsi, en douze heures, cette rencontre périodique aura lieu 12 fois ; il suffit donc de diviser le temps total par le nombre d'intervalles égal à $12 - 1 = 11$. Bref, la durée entre deux rencontres vaut $\Delta t = 12/11$ et les rencontres ont lieu aux instants $t_n = n\Delta t$ où n décrit $\{0, \dots, 11\}$, ce qui est exactement (A.14).
- (c) Une troisième façon de faire, plus automatique est de chercher quand est-ce que x , l'angle de la grande aiguille (en tour) est égal à y , l'angle de la petite aiguille. On sait que, pour une durée t , en heures,

$$x = t, \quad y = \frac{t}{12} \quad (\text{A.15})$$

Le nombre de tour est défini modulo 1, c'est-à-dire, qu'à un nombre de tour entiers près, la position de l'aiguille donne l'instant. Bref, on a

$$x - y = p \text{ où } p \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.16})$$

Enfin, on cherche un nombre de tours pour l'aiguille des heures compris entre 0 et 1 (entre midi et minuit). On cherche donc $y \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}_+$ vérifiant (A.15) et (A.16). C'est donc équivalent à déterminer $t \in [0, 12]$ tel que

$$t - \frac{t}{12} = p \text{ où } p \in \mathbb{Z}.$$

soit encore

$$\left(1 - \frac{1}{12}\right)t = p \text{ où } p \in \mathbb{Z}.$$

soit encore

$$\frac{11}{12}t = p \text{ où } p \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.17})$$

Or, $t \in [0, 12]$ est équivalent à $11/12t \in [0, 11]$. D'après (A.17), on a donc

$$p \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in [0, 11].$$

Bref, les seules valeurs possibles de p décrivent l'ensemble $\{0, \dots, 11\}$. Les différents instants correspondants sont donc donnés grâce à (A.17) :

$$t_p = \frac{12}{11}p \text{ où } p \in \{0, \dots, 11\}. \quad (\text{A.18})$$

ce qui est exactement (A.14).

- (2) Il est clair qu'à midi et minuit, les trois aiguilles sont superposées. Qu'en est-il pour les autres instants, donc définis par (A.14) avec $1 \leq n \leq 12$? Pour t_n défini par (A.14), la grande aiguille des minutes a fait exactement t_n tour. La trotteuse a fait un nombre de tours 60 fois plus grand, c'est-à-dire un nombre de tours égal à $60t_n$. La trotteuse et la grande aiguille des minutes occupent la même position si et seulement si

$$60t_n - t_n \in \mathbb{Z}$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$59t_n = (n-1) \frac{59 \times 12}{11} \in \mathbb{Z}$$

avec $1 \leq n \leq 12$ soit encore

$$(n-1) \frac{59 \times 12}{11} \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.19})$$

avec $1 \leq n \leq 12$. Soit on teste les différentes valeurs données par (A.19) et on ne considère que celles entières, ce qui donne $n = 1$ ou $n = 12$. Soit on réfléchit un tout petit peu plus! $59 \times 12 \times (n-1)/11$ appartient à \mathbb{Z} si et seulement si 11 divise $59 \times 12 \times (n-1)$; or 59×12 est premier avec 11, car 11 est premier et ni 59 ni 12 ne sont divisibles par 11; donc, d'après les règles de l'arithmétique, 11 divise $n-1$, ce qui n'est possible que si $n-1$ vaut 0 ou 11 et donc $n = 1$ ou $n = 12$. Bref, quand la petite aiguille et la grande aiguille sont superposées, la trotteuse ne peut se superposer avec elles qu'aux instants t_n avec $n = 1$ ou $n = 12$, c'est-à-dire à midi et minuit!

- (3) Voir corrigé de la question 5
 (4) Voir corrigé de la question 5
 (5) On peut maintenant traiter les questions 1, 3 et 4 de l'énoncé en traitant directement la question 5. Reprenons le cas 1c proposé page 81 : il permet de généraliser facilement de la même façon. On note de même x , l'angle de la grande aiguille (en tour) et y , l'angle de la petite aiguille. (A.15) est toujours valable. On cherche, modulo 1, à obtenir $x = y + \alpha$, c'est-à-dire que (A.16) est remplacé par

$$x - y = \alpha + p \text{ où } p \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.20})$$

La fin du raisonnement est identique : On cherche donc $y \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}_+$ vérifiant (A.15) et (A.20). C'est donc équivalent à déterminer $t \in [0, 12]$ tel que

$$t - \frac{t}{12} = \alpha + p \text{ où } p \in \mathbb{Z}.$$

soit

$$\frac{11}{12}t = \alpha + p \text{ où } p \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.21})$$

Or, $t \in [0, 12]$ est équivalent à $11/12t \in [0, 11]$. D'après (A.21), on a donc

$$p \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha + p \in [0, 11].$$

soit

$$p \in \mathbb{Z} \text{ et } -\alpha \leq p \leq 11 - \alpha.$$

On cherche donc à résoudre

$$p \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.22a})$$

$$A \leq p \leq B, \quad (\text{A.22b})$$

où les réels A et B ($A < B$) sont donnés par

$$A = -\alpha, \quad B = 11 - \alpha. \quad (\text{A.23})$$

LEMME A.5. *L'inéquation (A.22) est équivalente à*

$$p \in \{[a], \dots, [b]\} \quad (\text{A.24})$$

où, pour x réel, $[x]$ et $\lceil x \rceil$ désignent respectivement le plus grand entier inférieur ou égal à x (la partie entière) et le plus petit entier supérieur ou égal à x .

DÉMONSTRATION. En effet, si p est entier et $A \leq p$, alors nécessairement p est un entier supérieur à A donc supérieur au plus petit entier supérieur à A , donc $\lceil a \rceil \leq p$. Réciproquement, si $\lceil a \rceil \leq p$, alors $a \leq \lceil a \rceil \leq p$. On fait de même de l'autre coté. \square

Ainsi, dans le cas général, les instants demandés sont donnés (en heure) par

$$t_p = \frac{12}{11}(\alpha + p) \text{ où } p \in \{[-\alpha], \dots, [11 - \alpha]\}. \quad (\text{A.25})$$

Le cas particulier de la question 1 correspond à $\alpha = 0$. On a $[-\alpha] = 0$ et $[11 - \alpha] = 11$ et, dans ce cas, (A.25) est bien équivalent à (A.18).

Le cas particulier de la question 3 correspond à $\alpha = \pm 1/4$. Par exemple, pour $\alpha = 1/4$, on a $[-\alpha] = 0$ et $[11 - \alpha] = 10$ et t_p est donné par

$$t_p = \frac{12}{11}(1/4 + p) \text{ où } p \in \{0, \dots, 10\}. \quad (\text{A.26})$$

On a par exemple

$$t_1 = \frac{12}{11 \times 4} \text{ h} \approx 16 \text{ mn } 21,81 \text{ s}$$

Le cas particulier de la question 4 correspond à $\alpha = \pm 1/2$. Par exemple, pour $\alpha = 1/2$, on a $[-\alpha] = 0$ et $[11 - \alpha] = 10$ et t_p est donné par

$$t_p = \frac{12}{11}(1/2 + p) \text{ où } p \in \{0, \dots, 10\}. \quad (\text{A.27})$$

On a par exemple

$$t_1 = \frac{12}{11 \times 2} \text{ h} \approx 32 \text{ mn } 43,63 \text{ s}$$

EXEMPLE A.6.

Énoncé

Une blague Carambar : "Que dit la trotteuse d'une montre à chaque fois qu'elle croise la grande aiguille?"

Réponse : "Attends-moi un jour-mois, je vais à l'école!"

Corriger cette réponse qui n'est pas tout à fait exacte!

Corrigé

En fait, entre deux rencontres entre la trotteuse et la grande aiguille, il s'écoule un peu plus d'une minute!

On peut par exemple raisonner comme dans le point 1b de l'exemple A.4 page 80 : on considère le mouvement de la grande aiguille pendant une heure. À chaque tour de la trotteuse, une rencontre aura lieu et entre deux rencontres, s'écoule le même temps. En une heure, cette rencontre périodique aura lieu 60 fois ; il suffit donc de diviser le temps total par le nombre d'intervalles égal à $60 - 1 = 59$. Bref, la durée entre deux rencontres vaut (en minutes) $\Delta t = 60/59$, soit encore

$$\Delta t = 1 + \frac{1}{59} \text{ mn} = 60 + \frac{60}{59} \text{ s} = 61 + \frac{1}{59} \text{ s} \approx 61.0169 \text{ s}.$$

EXEMPLE A.7.

Exercice issu de [BC04], lui-même issu de [Dow02].

Énoncé

La lune attire l'eau présente sur terre qui prend la forme d'un ovale autour de la terre.

Comme la terre tourne, la plage qui était ce matin en A – marée haute – est maintenant en B – marée basse – et elle sera ce soir en C – marée haute à nouveau – puis en D – marée basse encore – cette nuit. Cela explique que le même scénario, avec deux marées hautes et deux marées basses, se reproduise jour après jour. Pourtant, on observe un décalage de l'heure de la marée. Cela est dû au fait que la terre tourne autour de la lune. Pendant que la terre fait un tour sur elle-même, la lune avance un peu sur son orbite et il faut un peu plus de temps à la terre pour se retrouver dans la même configuration par rapport à son satellite (voir figure A.2).

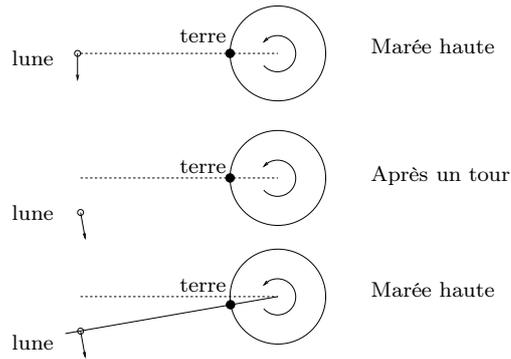


FIGURE A.2. passage d'une marée haute à l'autre.

On rappelle que : la terre fait un tour sur elle-même en $T_1 = 0,997270$ jours et que la lune tourne autour de la terre en $T_2 = 27,3217$ jours.

De combien de minutes, la marée se décale-t-elle chaque jour ?

Corrigé

Ce problème est exactement identique à celui de l'exemple A.4.

On remplace la petite aiguille par la direction de la lune, de vitesse (en tour/jour) $V = 1/T_2$ et la grande aiguille par un point fixe de la terre de vitesse (en tour/jour) $V = 1/T_1$. On applique exactement la formule (A.11) avec $V/v = T_1/T_2$ et $L = V/v$ auquel on rajoute à 1 tour, le tout étant multiplié par la durée d'un tour, soit T_1

$$t = T_1 \left(\frac{1}{1 - V/v} \frac{V}{v} + 1 \right)$$

soit

$$t = T_1 \frac{1}{1 - V/v} = \frac{T_1}{1 - T_1/T_2}$$

soit

$$t = \frac{1}{1/T_1 - 1/T_2}. \quad (\text{A.28})$$

Numériquement, on a donc

$$t = 1,0351 \text{ jour} \quad (\text{A.29})$$

soit

$$t = 1 \text{ jour } 50,544 \text{ mn.} \quad (\text{A.30})$$

La marée se décale donc d'environ 50 minutes par jour.

Concluons par un problème qui peut être utile !

EXEMPLE A.8.

Énoncé

Supposons que vous disposiez d'une montre réglée sur l'heure solaire¹ et que vous soyez dans l'hémisphère nord.

Posez votre montre à plat et pointez l'aiguille des heures vers le soleil ; la bissectrice de l'angle formé par le midi de votre montre et la petite aiguille donne le sud !

Corrigé

On assimilera la course du soleil dans le ciel à une course linéaire, c'est-à-dire régulière. Plaçons-nous dans le repère lié à votre montre. Par rapport à votre montre, lors de la journée, le sud (direction fixe) parcourt une fois le cadran de la montre par jour et a donc une vitesse de rotation égale à 1 tour/jour. La petite aiguille a une vitesse de rotation de 2 tours/jour. Un peu de réflexion nous montre que le sud et la petite aiguille tournent tous les deux dans le sens des aiguilles d'une montre. Puisque le sud a une vitesse de rotation deux fois plus faible, son angle sera donc deux fois plus faible que celui de la petite aiguille. Enfin, à midi, les deux directions coïncident et donc l'angle du sud est bien donné par la bissectrice entre midi et la petite aiguille.

Dans l'hémisphère sud, la direction indiquée sera en revanche celle du nord !

Et à l'équateur ?!

A.4. Des rivières, des crocodiles et des montagnes

D'autres problèmes sont présentés, dans des cas où les vitesses n'est pas nécessairement constante.

EXEMPLE A.9.

Énoncé

Exemple issu de [ET10].

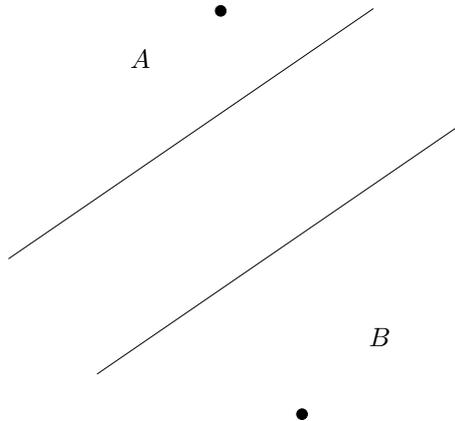


FIGURE A.3. Les deux villes et la rivière.

Deux villes (A et B) sont séparées par une rivière. Les municipalités décident de relier leurs villes par un pont correspondant au chemin le plus court (à cause des restrictions budgétaires). Toujours à cause des restrictions budgétaires, il faudra construire le pont perpendiculairement aux rives (voir figure A.3). Où le pont doit-il être construit ?

Corrigé

C'est un problème intéressant puisqu'il peut se résoudre uniquement de façon graphique. Notons que l'on doit trouver un point M sur D et un point M' sur D' de façon que la distance $AM + MM' + M'B$ soit minimale et que (MM') soit perpendiculaire à D (voir figure 4(a) page suivante). Par construction, la distance MM' est constante et il faut donc minimiser

$$d = AM + M'B.$$

1. Le décalage entre l'heure légale et l'heure solaire est à peu près connu, selon l'année et l'endroit où l'on se trouve.

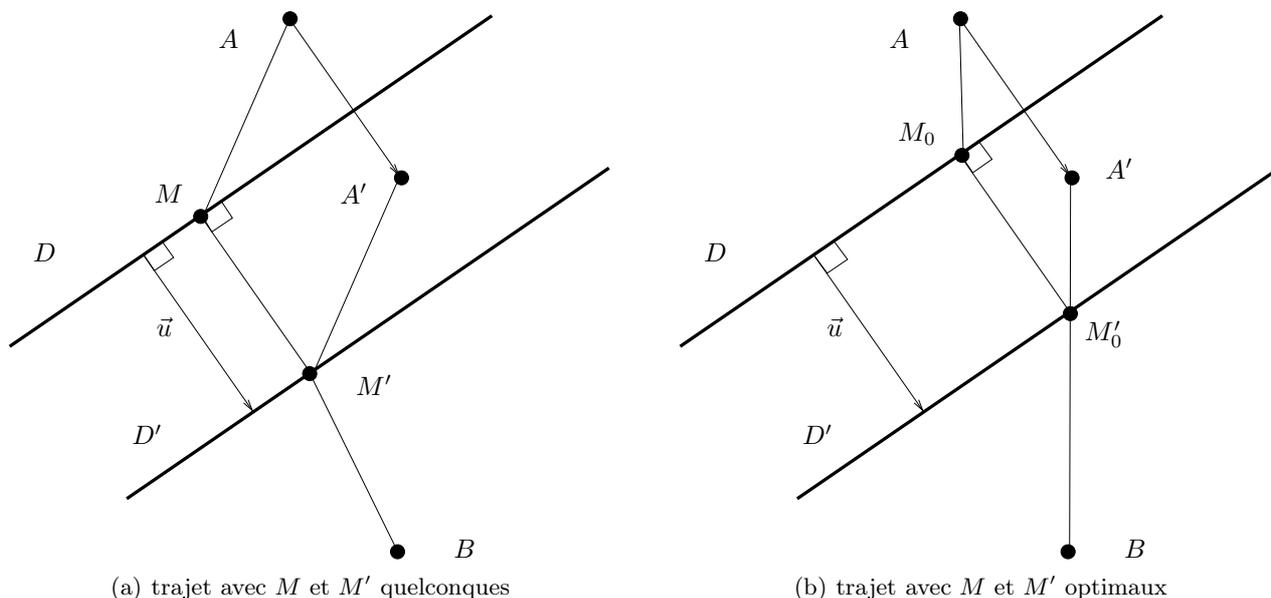


FIGURE A.4. Les deux villes et la rivière.

Construisons le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ où \vec{u} est perpendiculaire à D , de norme égale à la distance entre D et D' et orienté de A vers B . Cela revient à dire que A' est l'image de A par la translation de vecteur \vec{u} . Puisque A n'est pas dans la rivière, on en déduit que

$$\text{Les points } A' \text{ et } B \text{ sont de part et d'autre de } D'. \quad (\text{A.31})$$

Par construction, on a pour tout couple de point (M, M') , tel que (MM') parallèle à (AA') ,

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} = \overrightarrow{AA'}, \quad (\text{A.32})$$

et donc $AA'M'M$ est un parallélogramme et, en particulier, $AM = A'M'$. Ainsi, la distance à minimiser est $d = A'M' + M'B$. Bref, il faut trouver $M' \in D'$ tel que $A'M' + M'B$ soit minimale. D'après l'inégalité triangulaire, on a $A'M' + M'B \geq A'B$ et cette distance est minimale (et égale à $A'B$) si et seulement si $M' \in [A'B]$. On sait que $M' \in D'$. Ainsi, la distance est minimale si et seulement si

$$M' \in D' \cap [A'B]. \quad (\text{A.33})$$

Cette intersection est unique d'après (A.31). Une fois M' construit, on en déduit M d'après (A.32). Voir la construction sur la figure 4(b).

Continuons avec un exemple qui a défrayé² la chronique, pour sa prétendue difficulté de résolution.
Voir

http://www.lemonde.fr/campus/article/2015/10/15/viendrez-vous-a-bout-de-l-exercice-de-maths-qui-a-tenu-en-echec-les-bacheliers-ecossais_4790561_4401467.html

EXEMPLE A.10.

Énoncé

Un crocodile a repéré une proie située à 20 mètres de lui sur la berge opposée d'une rivière, de largeur 6 m. Le crocodile se déplace à une vitesse différente sur terre (10/4 m/s) et dans l'eau (10/5 m/s). Le crocodile

2. De nombreux brillants scientifiques se sont émus du niveau prétendument faible des étudiants, mais aucun n'a remarqué qu'il était plus subtil de traiter ce problème comme en optique, comme traité en question 5, solution élégante donnée par Cécile Vince, du Lycée du Parc, à Lyon, que je remercie!

atteint le zèbre en passant par un certain point P , placé à x mètres du point de départ sur l'autre rive (voir figure A.5).

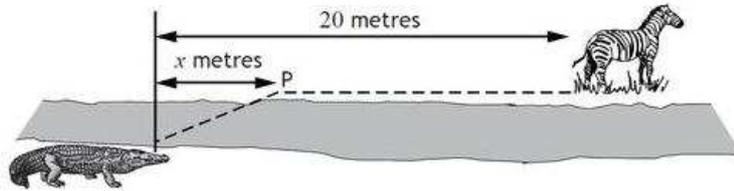


FIGURE A.5. Le crocodile et sa proie.

- (1) Déterminer le temps $T(x)$ (en dixièmes de secondes) mis par le crocodile pour atteindre sa cible.
- (2) Trouver $x \in [0, 20]$ qui minimise ce temps.
- (3) Montrer que l'étude complète d'une fonction est en fait inutile et qu'il suffit de trouver un minimum de trois valeurs.
- (4) Montrer que cette même étude peut être menée si x décrit maintenant \mathbb{R} tout entier.
- (5) Sauriez-vous formuler ce problème comme un problème d'optique géométrique ?

Corrigé

- (1) On écrit que le temps total est égal à la somme du temps que met le crocodile pour franchir la rivière et du temps que met le crocodile pour finir le chemin sur la terre ferme. Chacun de ces temps est exprimé en fonction de la distance et de la vitesse en utilisant (A.1) D'après le théorème de Pythagore la première distance est égale à $\sqrt{x^2 + 6^2}$, tandis que la seconde vaut $20 - x$. On en déduit donc que

$$T(x) = \frac{5}{10} \sqrt{x^2 + 36} + \frac{4}{10} (20 - x),$$

soit, en dixième de secondes,

$$T(x) = 5\sqrt{x^2 + 36} + 4(20 - x). \quad (\text{A.34})$$

- (2) La fonction T présente un extrémum local sur $]0, 20[$, là où sa dérivée est nulle. Or,

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{5/2 \times 2x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 4, \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 36}} \left(5x - 4\sqrt{x^2 + 36} \right), \end{aligned}$$

et donc $T'(x)$ est nulle si et seulement si

$$5x = 4\sqrt{x^2 + 36}.$$

Puisque $x \in]0, 20[$, cela est équivalent à

$$25x^2 = 16(x^2 + 36)$$

soit encore

$$9x^2 - 16 \times 36 = 0,$$

soit

$$x^2 = \frac{16 \times 36}{9},$$

et donc

$$x = \pm \frac{4 \times 6}{3} = \pm 8.$$

On cherche $x > 0$ et donc T' ne s'annule sur $]0, 20[$ qu'en

$$x_0 = 8. \tag{A.35}$$

Pour conclure, on peut procéder à l'habituelle étude de variation de T sur $[0, 20]$; Mais il est un peu plus rapide de constater que la fonction T , continue sur $[0, 20]$ y atteint ses extrêmes. On sait que les extrêmes locaux (dans $]0, 20[$) ne peuvent qu'être donnés par (A.35). En y rajoutant les valeurs aux bord, on en déduit que les extréma de T sont nécessairement dans $\{T(0), T(20), T(x_0)\}$. On détermine alors successivement

$$T(0) = 5\sqrt{0^2 + 36} + 4(20 - 0) = 110,$$

$$T(x_0) = 5\sqrt{8^2 + 36} + 4(20 - 8) = 98,$$

$$T(20) = 5\sqrt{20^2 + 36} + 4(20 - 20) \approx 104.$$

Ainsi, vu l'ordre de ces trois valeurs, T présente nécessairement un minimum, égal à 98, en $x_0 = 8$.

- (3) On vient de voir que l'étude complète de la fonction est inutile.
- (4) Si x décrit \mathbb{R} , l'expression (A.34) est encore valable à condition de remplacer la distance $20 - x$ par $|20 - x|$, de façon que cette quantité doit toujours positive pour tout x

$$T(x) = 5\sqrt{x^2 + 36} + 4|20 - x|. \tag{A.36}$$

On dérive de nouveau la fonction T , là où elle est dérivable, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{20\}$. Pour $x \leq 20$, on a $|20 - x| = 20 - x$ et les calculs précédents sont encore valables et donc T' ne peut s'annuler qu'en $x_0 = 8$. Pour $x \geq 20$, on a $|20 - x| = x - 20$ et donc

$$T(x) = 5\sqrt{x^2 + 36} + 4(x - 20). \tag{A.37}$$

Dans ce cas, les calculs sont identiques aux précédents et on a

$$T'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 36}} \left(5x + 4\sqrt{x^2 + 36} \right),$$

et T' est nulle si et seulement si

$$-5x = 4\sqrt{x^2 + 36},$$

avec $x \geq 20 > 0$, ainsi $-5x$ est négatif et cette équation ne peut avoir lieu. Bref, le seul de T' sur $\mathbb{R} \setminus \{20\}$ est donné par (A.35). On conclue comme précédemment, sans faire d'étude fastidieuse de

tableau de variation. Les extréma de T sont nécessairement dans $\{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} T(x), T(20), T(x_0)\}$ donné par

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} T(x) &= +\infty, \\ T(x_0) &= 98, \\ T(20) &\approx 104 \end{aligned}$$

On conclue comme précédemment. Le minimum obtenu est donc global sur \mathbb{R} .

- (5) Ce problème peut se voir comme un problème d'optique géométrique ; en effet, la lumière se déplace avec une vitesse différente selon l'indice du milieu dans lequel elle se propage.

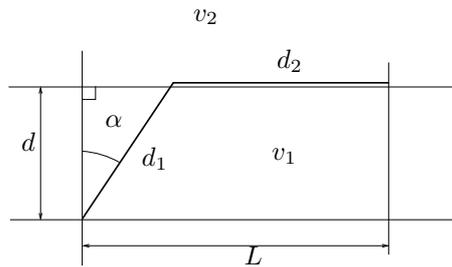


FIGURE A.6. Le problème du crocodile traité de façon optique géométrique.

Montrons qu'on peut le traiter de la sorte. On se réfère à la figure A.6. Le temps mis par le crocodile est égal à

$$T = t_1 + t_2 = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2},$$

où v_1 est la vitesse dans la rivière et v_2 sur terre. Au lieu de paramétrer par le déplacement x , on choisit l'angle α comme le montre la figure A.6. Puisque l'on a $\cos \alpha = d/d_1$, il vient $d_1 = d/\cos \alpha$. De même, on a $\tan \alpha = (L - d_2)/d$ et donc $d_2 = L - d \tan \alpha$ et ainsi, il vient

$$T = \frac{d}{v_1 \cos \alpha} + \frac{L - d \tan \alpha}{v_2 \cos \alpha} \tag{A.38}$$

On a alors

$$T'(\alpha) = \frac{d \sin \alpha}{v_1 \cos^2 \alpha} - \frac{d}{v_2 \cos^2 \alpha} = \frac{d}{\cos^2 \alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right).$$

L'optimum annule T' et correspond à

$$v_2 \sin \alpha = v_1.$$

Cela correspond aux lois de la refraction de Descartes : un rayon lumineux va du milieu d'indice optique proportionnel à v_1 dans un milieu d'indice optique proportionnel à v_2 . L'angle d'incidence est α et l'angle d'incidence de sortie, dite rasante, vaut $\pi/2$. On a donc bien la loi $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

On pourrait s'amuser à utiliser cela de façon expérimentale pour déterminer la valeur de α . On envoie un rayon avec un angle, choisi pour que l'angle d'incidence de sortie soit rasante.

EXEMPLE A.11.

Énoncé

Exemple issu (et adapté) de [ET10].

Vous faites une sortie en montagne. La montée est pénible et faiguate. Le lendemain matin, vous repartez à la même heure que la veille et la descente se fait beaucoup plus vite. Il est évident que vous avez mis plus de temps pour monter que pour descendre.

- (1) Existe-t-il un point de la descente pour lequel vous êtes passé au même moment (c'est-à-dire à la même heure) le jour de la montée ?
- (2) (a) Montrer qu'avec une hypothèse de croissance au sens large, le lieu de la rencontre est unique et que les instants de cette rencontre forment un intervalle.
(b) De plus, si on suppose une des croissances stricte, montrer que l'instant de rencontre est unique.
- (3) En généralisant, trouvez une condition nécessaire et suffisante portant sur les heures de départ et d'arrivée de la seconde promenade pour que cette rencontre se produise une seule fois, ou au contraire jamais ?

Corrigé

- (1) La réponse classique est la suivante : Pour trouver la solution, prenons l'hypothèse que votre frère jumeau fasse exactement le même parcours que vous, en partant donc à la même heure que vous. Le lendemain, vous redescendez. Votre frère monte, vous vous descendez. Il est clair, qu'à un certain moment, vous allez vous croiser. C'est la seule réponse logique, car personne ne peut dire où le croisement se produit !
- (2) (a) Une autre façon plus mathématique de voir cela est de considérer la fonction $t \mapsto x(t)$ où x est l'abscisse parcourue. L'hypothèse implicite faite est que cette fonction est continue et croissante (au sens large). Si on note a et b les instants de début et de fin de la promenade du premier jour, x est donc une fonction croissante de $[a, b]$ dans $[0, L]$ avec

$$x(a) = 0, \quad x(b) = L \quad (\text{A.39})$$

Le lendemain, on dispose cette fois-ci d'une fonction y définie de $[a, c]$ dans $[0, L]$ avec

$$c > a \quad (\text{A.40})$$

On ne sait pas lequel des deux ballade est la plus longue *a priori* ; on a aussi

$$y(a) = L, \quad y(c) = 0. \quad (\text{A.41})$$

La fonction y est continue et décroissante au sens large. On cherche à montrer qu'il existe au moins un $t > a$ tel que

$$x(t) = y(t). \quad (\text{A.42})$$

D'après (A.40), on a deux cas :

— Premier cas : $c \in]a, b[$.

Dans ce cas, les deux fonctions x et y sont définies sur $[a, c]$ et on a nécessairement

$$x(a) = 0, \quad x(c) \geq x(a) = 0, \quad y(c) = 0, \quad y(a) = L. \quad (\text{A.43})$$

La fonction $f = x - y$ est croissante (puisque $-y$ est croissante) et continue sur $[a, c]$ et on a $f(a) = x(a) - y(a) = -L < 0$ et $f(c) = x(c) - y(c) \geq 0$. f est continue et change de signe. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule donc au moins une fois. On a donc l'existence attendue.

— Deuxième cas : $c > b$.

Les deux fonctions sont définies sur $[a, b]$ et on a

$$x(a) = 0, \quad x(b) = L, \quad y(b) \leq y(a) = L, \quad y(a) = L. \quad (\text{A.44})$$

Ainsi $f(a) = x(a) - y(a) = -L < 0$ et $f(b) = x(b) - y(b) \geq L - L = 0$. Comme précédemment, f est continue et change de signe et on conclue de la même façon.

- (b) On peut montrer que l'instant des valeurs de t forment un intervalle. Voir feuille manuscrite.
- (c) On peut montrer que l'instant de rencontre est unique. Voir feuille manuscrite.
- (3) Voir feuille manuscrite.

A.5. Paradoxes de la flèche, d'Achille et la tortue et le problème de la mouche

EXEMPLE A.12.

Énoncé

Le paradoxe de Zénon ou de la flèche est le suivant :

Imaginons une flèche lancée vers un arbre. Elle parcourt la moitié de la distance entre l'arc et l'arbre. Elle parcourt ensuite la moitié de la distance à parcourir ; Puis une autre moitié Il restera toujours une distance non nulle à parcourir (si L est la distance initiale, il restera $L/2$, puis $L/4$, puis $L/8$, ..., puis $L/2^n$ ) La flèche n'atteindra donc jamais son but !

Corrigé

Voir par exemple [Bas12].

On peut lever le paradoxe de différentes façons.

- (1) Rappelons la notion de somme infinie, dans le cas particulier de la somme géométrique. On pose, pour $N \in \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$S_N = 1 + x + \dots + x^N = \sum_{n=0}^N x^n \quad (\text{A.45})$$

On sait que

$$S_N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Si $x < 1$, on a $\lim_{N \rightarrow \infty} x^{N+1} = 0$, ainsi on pose

$$S = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = 1 + x + \dots + x^N + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

On a donc

$$S = \frac{1}{1 - x}. \quad (\text{A.46})$$

On peut calculer les distances successivement parcourues :

$$\begin{aligned} & \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \frac{L}{16} \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L}{2^i} \\ &= \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{L}{2} \frac{1}{1 - 1/2} \\ &= L \end{aligned}$$

Autrement dit, à la limite, la distance parcourue est bien L .

- (2) Pour ceux que la notion de limite gêne, on peut aussi lever le paradoxe en disant que l'on a découpé le temps que met la flèche pour parcourir la longueur L en un nombre infini d'étapes, chacune d'elles ayant un temps de plus en plus bref (en $1/2^n$) ; la somme de tous ces temps est finie. On peut donc réaliser un nombre infini d'opérations en un temps fini.

Ce paradoxe, très facilement résolu grâce à la notion de limite, a troublé des générations de philosophes !

EXEMPLE A.13.

Énoncé

" Imaginons Achille qui court derrière une tortue, dix fois plus lente que lui. Il est dix mètres derrière elle. Pendant qu'il parcourt ces dix mètres, la tortue parcourt un mètre et se retrouve donc un mètre plus loin.

Pendant qu'il parcourt ce mètre, la tortue parcourt 0.1 m. Pendant qu'il parcourt 0.1 m., la tortue parcourt 0.01 m. Pendant qu'il parcourt 0.01 m., la tortue parcourt 0.001 m. et ainsi de suite : il restera toujours une distance non nulle entre lui et la tortue et il n'atteindra jamais celle-ci ! "

Que pensez-vous de ce raisonnement ?

Corrigé

Voir par exemple [Bas12].

On peut là encore traiter ce problème de plusieurs façons.

- (1) On peut calculer les distances successivement parcourues par Achille :

$$l = 10 + 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \dots = 11.1111\dots$$

et donc

$$l = 11.1111\dots \quad (\text{A.47})$$

Ce résultat est fini et le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue est lui aussi fini.

- (2) Comme dans l'exemple A.12, on peut aussi écrire qu'Achille parcourt les distances suivantes (avec $L = 10$)

$$\begin{aligned} L + \frac{L}{10} + \frac{L}{100} + \frac{L}{1000} + \frac{L}{10000} \dots &= L \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i \\ &= L \frac{1}{1 - 1/10} \\ &= \frac{10}{9}L \\ &= \frac{100}{9}. \end{aligned}$$

et donc

$$l = \frac{100}{9}, \quad (\text{A.48})$$

ce qui est bien le résultat donné par (A.47).

- (3) Comme dans l'exemple A.12, on a découpé le temps que met Achille pour parcourir la longueur l en un nombre infini d'étapes, chacune d'elles ayant un temps de plus en plus bref et la somme de tous ces temps est finie. On peut donc réaliser un nombre infini d'opérations en un temps fini.
- (4) On peut aussi finalement, détourner le paradoxe, maintenant résolu et utiliser (A.8) avec $L = 10$ et $V/v = 1/10$:

$$l = \frac{1}{1 - 1/10}L = \frac{1}{9/10}L = \frac{10}{9} \times 10 = \frac{100}{9} = 11,111\dots \text{ m.}$$

et on retrouve donc finalement (A.47)-(A.48)!!!

Finissons par un dernier problème, très proche des précédents :

EXEMPLE A.14.

Énoncé

Imaginons une mouche (virtuelle) qui vole, en ligne droite, à 200 km/h en partant d'une ville A se dirigeant vers une ville B , distante de 100 kilomètres.

Au moment où elle part, un train part de la ville B , se dirige vers la ville A , à 100 km/h. Quand la mouche rencontre le train, elle fait un demi-tour instantané et repart vers A . Quand elle arrive en A , elle repart vers B et le train. Après un nombre infini d'allers et retours entre A et le train, quand la mouche se retrouve écrasée entre le train et la gare en A , quelle distance a-t-elle parcouru ?

Corrigé

Voir par exemple [Bas12].

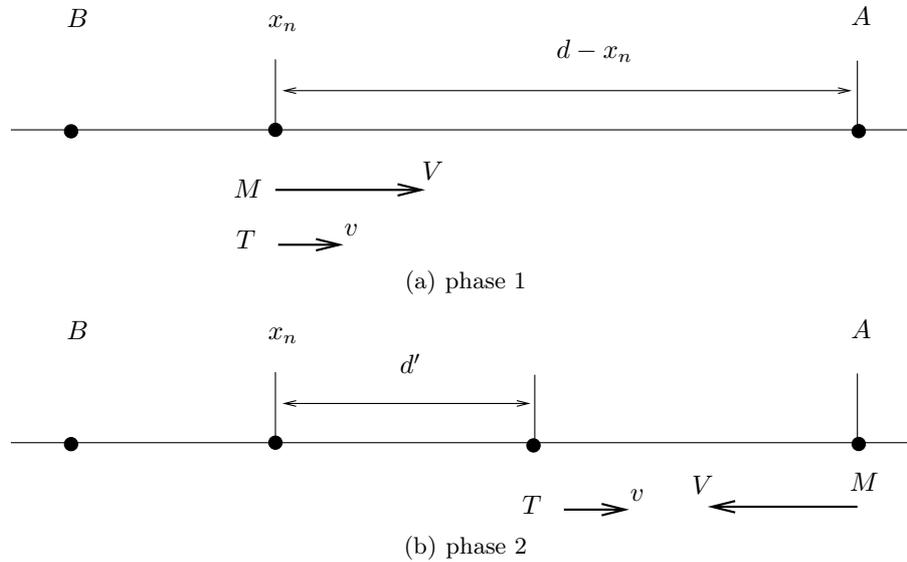


FIGURE A.7. Les débuts des deux phases constituant le n -ième aller et retour de la mouche.

On peut là encore traiter ce problème de plusieurs façons.

- (1) On peut calculer les distances successivement parcourues par la mouche.

Supposons que la ville B soit placée à gauche de l'axe et en constitue l'origine, la ville A à droite. Notons $v = 100$ km/h, la vitesse du train, $V = 200$ km/h, la vitesse de la mouche et $d = 100$ km la distance entre les deux ville. Il est fondamental de noter que

$$v < V. \tag{A.49}$$

Pour toute la suite, on pose

$$\rho = \frac{V}{v}, \tag{A.50}$$

qui vérifie, grâce à (A.49)

$$\rho > 1. \tag{A.51}$$

Nous allons découper le mouvement de la mouche en plusieurs phases.

- (a) La première phase s'étend entre le moment du départ et la première rencontre de la mouche avec le train, en utilisant la formule (A.7) :

$$x_1 = \frac{1}{\frac{v}{V} + 1} d$$

soit encore, en utilisant (A.50)

$$x_1 = \frac{1}{\rho + 1} d \tag{A.52}$$

- (b) Nous allons étudier chacun des allers et retours de la mouche, qui seront en nombre infini, mais réalisé en un temps fini.

Supposons maintenant connue, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'abscisse x_n de la n -ième rencontre et déterminons l'abscisse x_{n+1} de la $n + 1$ -ième rencontre. On suppose que

$$x_n \in]0, d[. \tag{A.53}$$

Cet aller et retour se décompose lui-même en deux phases.

- (i) Au moment de la n -ième rencontre, le train T animé d'une vitesse v et la mouche M animée d'une vitesse V se trouvent tous les deux au point d'abscisse x_n (voir figure 7(a)). La mouche, plus rapide, va rejoindre la ville A , avec une durée égale à

$$t = \frac{d - x_n}{V}.$$

Pendant, ce temps-là, le train a avancé d'une distance d' donnée par

$$d' = \frac{v}{V}(d - x_n),$$

soit, en utilisant (A.50)

$$d' = \rho^{-1}(d - x_n). \quad (\text{A.54})$$

D'après (A.53), d est strictement positif.

- (ii) Le train T continue de se déplacer alors vers la ville A et la mouche fait demi-tour instantanément et repart de la ville A vers le train, comme le montre la figure 7(b). Ils sont séparés d'une distance égale à

$$\begin{aligned} d'' &= d - d' - x_n, \\ &= d - x_n - \rho^{-1}(d - x_n), \end{aligned}$$

soit encore d'une distance

$$d'' = (d - x_n)(1 - \rho^{-1}). \quad (\text{A.55})$$

Compte tenu de (A.49) et (A.51), ce nombre est bien dans $]0, d - x_n[$, ce qui implique aussi que

$$x_{n+1} \in]0, d[, \quad (\text{A.56})$$

ce qui parfait la récurrence! On applique de nouveau (A.7) qui fournit la distance de la nouvelle rencontre entre le train et la mouche (par rapport à la position du train)

$$d''' = \frac{1}{\rho + 1}d''$$

et donc

$$d''' = \frac{1 - \rho^{-1}}{1 + \rho}(d - x_n). \quad (\text{A.57})$$

On a donc

$$x_{n+1} = x_n + d' + d''', \quad (\text{A.58})$$

et donc

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + d' + d''', \\ &= x_n + \rho^{-1}(d - x_n) + \frac{1 - \rho^{-1}}{1 + \rho}(d - x_n), \\ &= x_n \left(1 - \rho^{-1} + \frac{\rho^{-1} - 1}{1 + \rho} \right) + d \left(\rho^{-1} + \frac{1 - \rho^{-1}}{1 + \rho} \right), \\ &= \frac{1 + \rho - \rho^{-1} - 1 + \rho^{-1} - 1}{1 + \rho} x_n + \frac{\rho^{-1} + 1 + 1 - \rho^{-1}}{1 + \rho} d, \\ &= \frac{\rho - 1}{1 + \rho} x_n + \frac{2}{1 + \rho} d, \end{aligned}$$

soit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_{n+1} = \alpha x_n + \beta, \quad (\text{A.59})$$

où

$$\alpha = \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \quad (\text{A.60a})$$

$$\beta = \frac{2d}{1 + \rho}. \quad (\text{A.60b})$$

Grâce à (A.51), on vérifie que

$$\alpha \in]0, 1[. \quad (\text{A.61})$$

La résolution de (A.59), qui définit une suite arithmético-géométrique est classique. On cherche x tel que

$$x = \alpha x + \beta, \quad (\text{A.62})$$

D'après (A.61), on a $\alpha \neq 1$ et donc, on écrit successivement, d'après (A.60)

$$\begin{aligned} x &= \frac{\frac{2d}{1 + \rho}}{1 - \frac{\rho - 1}{\rho + 1}}, \\ &= \frac{2}{\rho + 1 - \rho + 1}d, \end{aligned}$$

et donc

$$x = d. \quad (\text{A.63})$$

De (A.59)-(A.62)-(A.63), on déduit

$$x_{n+1} - d = \alpha(x_n - d),$$

et donc la suite $(x_n - d)$ est géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n - d = \alpha^{n-1}(x_1 - d), \quad (\text{A.64})$$

D'après (A.61) et (A.64), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = d. \quad (\text{A.65})$$

Ce qui est logique : la mouche finit par atteindre la ville A ! Et ce, après un nombre infini d'allers et retours.

REMARQUE A.15. Elle vole à vitesse constante, donc elle atteint la ville A en un temps fini !

REMARQUE A.16. Comparons les distances parcourues par le train et la mouche durant les différentes phases déterminées lors des cas 1a page 93, 1(b)i page ci-contre et 1(b)ii page précédente

— Phase 1a page 93 :

La mouche a parcouru la distance $d - x_1$, qui vaut, d'après (A.52)

$$\begin{aligned} d - x_1 &= d - \frac{1}{\rho + 1}d, \\ &= \frac{\rho + 1 - 1}{\rho + 1}d \end{aligned}$$

et donc

$$d - x_1 = \frac{\rho}{\rho + 1}d \quad (\text{A.66})$$

Pour parcourir cette distance, elle a mis un temps égal à t donné par

$$\begin{aligned} t &= \frac{d - x_1}{V}, \\ &= \frac{\rho}{\rho + 1} \frac{d}{V}, \end{aligned}$$

Pendant ce temps-là, le train a parcouru la distance égale à

$$\begin{aligned} vt &= \frac{\rho}{\rho+1} \frac{vd}{V}, \\ &= \frac{\rho}{\rho+1} d\rho^{-1}, \end{aligned}$$

et donc le train a parcouru la distance donnée par

$$d_4 = \frac{d}{\rho+1}. \quad (\text{A.67})$$

Si on fait le rapport de (A.66) par (A.67), on obtient pour cette phase

$$\frac{\text{distance parcourue par la mouche}}{\text{distance parcourue par le train}} = \frac{\rho}{\rho+1} d \times \frac{\rho+1}{d},$$

et donc si on pose, pour une phase donnée :

$$\mathcal{R} = \frac{\text{distance parcourue par la mouche}}{\text{distance parcourue par le train}}, \quad (\text{A.68})$$

on a

$$\mathcal{R} = \rho \quad (\text{A.69})$$

— Phase 1(b)i page 94 :

On a vu que la mouche a parcouru la distance $d - x_n$ et le train la distance donnée par d' donné par (A.54). En reprenant la définition (A.69), on a

$$\mathcal{R} = \frac{d - x_n}{\rho^{-1}(d - x_n)},$$

et donc, pour cette phase,

$$\mathcal{R} = \rho \quad (\text{A.70})$$

— Phase 1(b)ii page 94 :

La mouche parcourt la distance $d - x_{n+1}$ successivement égale à (en utilisant (A.58))

$$\begin{aligned} d - x_{n+1} &= d - (x_n + d' + d'''), \\ &= (d - x_n) - d' - d''', \end{aligned}$$

puis en utilisant (A.55) et (A.57) :

$$\begin{aligned} &= (d - x_n) - \rho^{-1}(d - x_n) - \frac{1 - \rho^{-1}}{1 + \rho}(d - x_n), \\ &= (d - x_n) \left(1 - \rho^{-1} - \frac{1 - \rho^{-1}}{1 + \rho} \right), \\ &= (d - x_n) \frac{1 + \rho - \rho^{-1} - 1 - 1 + \rho^{-1}}{1 + \rho}, \\ &= \frac{\rho - 1}{1 + \rho}(d - x_n), \end{aligned}$$

et donc la mouche a parcouru la distance d_5 donnée par

$$d_5 = \frac{\rho - 1}{\rho + 1}(d - x_n). \quad (\text{A.71})$$

Pendant, ce temps-là, le train a parcouru la distance donné par (A.57). On a donc, d'après (A.71)

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \frac{1 + \rho}{1 - \rho^{-1}}, \\ &= \frac{\rho - 1}{1 - \rho^{-1}}, \\ &= \rho \frac{\rho - 1}{\rho - 1},\end{aligned}$$

et donc, pour cette phase,

$$\mathcal{R} = \rho \tag{A.72}$$

Si on fait le bilan des trois phases, les équations (A.69), (A.70) (A.72) fournissent que, pour chaque déplacement constituant une part du déplacement global, on a

$$\mathcal{R} = \rho \tag{A.73}$$

Compte tenu de la définition (A.50), il vient donc

$$\mathcal{R} = \frac{V}{v}. \tag{A.74}$$

Puisque la distance totale parcouru par le train vaut exactement d , la distance totale D parcourue par la mouche vaut exactement, d'après (A.74) :

$$D = \frac{V}{v}d. \tag{A.75a}$$

Numériquement, on a

$$D = 200 \text{ km} \tag{A.75b}$$

Autrement dit :

- (a) Ce n'est même pas la peine, en toute rigueur, de déterminer la distance totale par la mouche en utilisant la suite définie par (A.64). On déduit tout de suite de (A.75) le résultat attendu.
- (b) C'est tout fait normal. Il est en fait beaucoup plus rapide de remarquer que la mouche vole tant que le train roule. Ce temps est égal à $t = d/v$; puisque la mouche a une vitesse de V , elle parcourt donc la distance $V \times d/v$ et l'on retrouve bien (A.75) !

Pour la beauté du calcul, finissons tout de même le calcul entamé avant la remarque A.16 page 95. Reprenons les calculs faits dans cette remarque. Pendant la première phase, la mouche a parcouru la distance définie par (A.66).

Puis, chaque aller et retour correspond à une distance u_n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) définie par la somme de la distance $d - x_n$ et de la distance $d - x_{n+1} = d_5$, définie par (A.71). On a donc

$$\begin{aligned}u_n &= d - x_n + d_5, \\ &= d - x_n + \frac{\rho - 1}{\rho + 1}(d - x_n), \\ &= \left(1 + \frac{\rho - 1}{\rho + 1}\right)(d - x_n), \\ &= \frac{\rho + 1 + \rho - 1}{\rho + 1}(d - x_n),\end{aligned}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{2\rho}{\rho + 1}(d - x_n). \tag{A.76}$$

Pour N allers et retours, la mouche a donc parcouru en tout la distance D_N donnée par

$$D_N = d - x_1 + \sum_{n=1}^N u_n$$

et donc

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad D_N = d - x_1 + \frac{2\rho}{\rho+1} \sum_{n=1}^N (d - x_n).$$

D'après (A.64), on a donc

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad D_N = d - x_1 + \frac{2\rho}{\rho+1} (d - x_1) \sum_{n=1}^N \alpha^{n-1}.$$

Enfin, on écrit, en posant $N' = N - 1$ dans la somme

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad D_N = (d - x_1) \left(1 + \frac{2\rho}{\rho+1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n \right). \quad (\text{A.77})$$

Pour conclure, on passe à la limite quand N tend vers l'infini. (A.61) implique que la somme $\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n$ tend vers $1/(1 - \alpha)$ quand N tend vers l'infini d'après (A.45) et (A.46). La distance totale parcourue par la mouche après un nombre infini d'allers et retours vaut $\lim_{N \rightarrow +\infty} D_N$, soit encore, d'après (A.77) :

$$D = (d - x_1) \left(1 + \frac{2\rho}{\rho+1} \frac{1}{1 - \alpha} \right),$$

et on a successivement, d'après (A.52)

$$D = d \left(1 - \frac{1}{\rho+1} \right) \left(1 + \frac{2\rho}{\rho+1} \frac{1}{1 - \alpha} \right),$$

et en utilisant (A.60a) :

$$\begin{aligned} &= d \frac{\rho+1-1}{\rho+1} \left(1 + \frac{2\rho}{\rho+1} \frac{1}{1 - \frac{\rho-1}{\rho+1}} \right), \\ &= d \frac{\rho}{\rho+1} \left(1 + \frac{2\rho}{\rho+1 - \rho+1} \right), \\ &= d \frac{\rho}{\rho+1} (1 + \rho), \\ &= d\rho, \end{aligned}$$

Soit encore, compte tenu de (A.50), on retrouve exactement la conclusion (A.75).

- (2) Là encore, la mouche a donc fait un nombre infini d'allers et retours en un temps fini ! Il était finalement beaucoup plus rapide, pour se passer des calculs exposés des pages 93 à 98 d'utiliser le point 1b page 97 pour arriver directement à la conclusion (A.75).

Une ultime variante :

EXEMPLE A.17.

Énoncé

Exemple issu de [ET10].

Sur une route, deux voitures, à une distance de 100 km, roulent en direction l'une de l'autre. La première voiture roule à une vitesse de 40 km/h et la seconde roule à une vitesse de 60 km/h. Un oiseau part au même moment que les deux voitures du point de départ de la première voiture et vole à une vitesse de 80 km/h.

Quand il arrive à la seconde voiture, il fait demi-tour jusqu'à ce qu'il rencontre de nouveau la première voiture. Ensuite, il fait de nouveau demi-tour et ainsi de suite...

Quelle est la distance totale que l'oiseau a parcouru au moment où les deux voitures se croisent ?

Corrigé

Il suffit de raisonner comme dans le problème de la mouche. La formule (A.7) avec $V/v = 60/40$ et $L = 100$ donne la distance de rencontre (par rapport au véhicule de gauche) :

$$x = \frac{1}{V/v + 1} L = \frac{1}{60/40 + 1} 100 = 40 \text{ km.}$$

La durée correspondante est égale à $t = 40/40 = 1$ h. Ainsi l'oiseau qui volera pendant cette durée à la vitesse de 80 km/h parcourera donc la distance de 80 km.

Annexe B

Coefficient de Frottement

Non rédigé.

Énergie

Dans cette annexe, une présentation plus complètes des résultats essentiels du chapitre 7 est donnée.

On pourra regarder l'ouvrage très ludique et sérieux [Pie07], notamment les chapitres les chapitre 7 et 10 à 13. Voir le web : <http://www.piednoir.com/index.html>. On pourra aussi consulter, dans le même esprit, [Gla15].

C.1. Introduction

Le principe fondamental de la dynamique¹ permet d'étudier le mouvement de systèmes «simples», comme des solides indéformables. Cependant, le corps d'un sportif est rarement considéré comme un solide indéformable : des muscles sont actifs, apportent de l'énergie au système, font mouvoir certaines parties du corps par rapport à d'autres et provoquent le déplacement global du sportif.

On pourrait appliquer le principe fondamental de la dynamique à chaque segment articulaire, en considérant les muscles comme externes. Il est plus simple d'aborder une approche énergétique. L'énergie est un nombre représentant une quantité qui se transforme et que l'on peut suivre lors d'un mouvement d'un membre d'un individu de la façon schématique suivante :

- Apport initial : nutriment ;
- Digestion : transformation en sucre ;
- Transformation de ce sucre par le muscle en chaleur et mouvement ;
- Action sur un objet extérieur : raquette, javelos, poids

Bien entendu, lors de cette chaîne une partie de l'énergie initiale est définitivement «perdue» pour le mouvement et est notamment transformée en chaleur.

Pour définir l'énergie et pouvoir l'exploiter, il faut quelques préliminaires.

Trois exemples seront traités : voir la section C.7.

REMARQUE C.1. Les notions de travail et de puissance font partie de la vie courante ; par exemple, devant l'entrée du parking de Vaise, des panneaux électriques nous indiquent la puissance instantanée produite à l'instant t par les panneaux solaires (puissance nulle pendant la nuit, maximale par très beau temps) et l'énergie totale produite. Voir aussi la remarque C.7 page 106.

C.2. Hypothèse fondamentale du repère galiléen

On fera dans toute cette annexe, l'hypothèse fondamentale que le référentiel est galiléen, c'est-à-dire (texte issu de http://fr.wikipedia.org/wiki/Référentiel_galiléen) :

En physique, un référentiel galiléen, ou inertiel, est un référentiel dans lequel un objet isolé (sur lequel ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante des forces est nulle) est en mouvement de translation rectiligne uniforme (l'immobilité étant un cas particulier de mouvement rectiligne uniforme) : la vitesse du corps est constante (au cours du temps) en direction et en norme. Cela signifie que le principe d'inertie, qui est énoncé dans la première loi de Newton, y est vérifié.

1. ainsi que le théorème du moment cinétique, voir remarque 6.1 page 5.

C.3. Travail

C.3.1. Rappel : produit scalaire de deux vecteurs

DÉFINITION C.2. Le produit scalaire de deux vecteurs (dans le plan), \vec{u} et \vec{v} est le nombre noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha, \quad (\text{C.1})$$

où α est l'angle entre les deux vecteurs.

Notons que $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est nul si et seulement si l'un des deux vecteur est nul ou s'ils sont perpendiculaires.

Si on choisit un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ et si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'. \quad (\text{C.2})$$

◇

C.3.2. Travail d'une force \vec{F} appliquée en un point subissant un déplacement

DÉFINITION C.3. Si on applique une force \vec{F} constante en un point qui subit un déplacement allant de A à B (avec un trajet quelconque), alors le travail de la force le long de AB est égal à

$$W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}, \quad (\text{C.3})$$

avec

- $W(\vec{F})$ en Joules (J)
- F en N
- AB en m

Ce travail ne dépend que des positions initiales et finales A et B et non du trajet suivi.

Si la force n'est pas constante, on peut aussi évoquer le travail de F entre A et B , le long d'un trajet donné : on décompose le trajet AB en un grand nombre de «trajets élémentaires» \vec{dl} , le long desquels, la force \vec{F} est constante. On parle alors du travail de \vec{F} le long de ce trajet et on écrit alors :

$$W(\vec{F}) = \sum \vec{F} \cdot \vec{dl}.$$

Si \vec{F} n'est pas constante, ce travail dépend *a priori* du trajet.

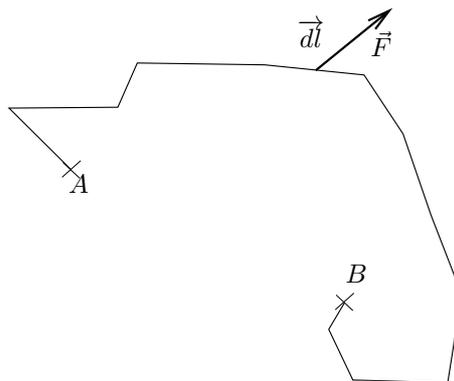


FIGURE C.1. Le travail de la force F entre A et B , le long d'un trajet donné.

Voir figure C.1.

En fait, il faut écrire

$$W(\vec{F}) = \int \vec{F} \cdot \vec{dl}. \quad (\text{C.4})$$

Voir pour plus de détail, par exemple le chapitre 5 et l'annexe E de [Bas04]. ◇

C.3.3. Travail d'une force externe

Si on considère un système, dont l'un des points subit un déplacement le long d'un trajet et est soumis à une force externe \vec{F} , on parle alors du travail de \vec{F} le long de ce trajet.

C.3.4. Travail d'une force interne

Même notion si la force est interne au système, c'est-à-dire qu'elle est exercée par une sous-partie du système sur une autre sous-partie, par exemple l'action d'un muscle sur un os.

C.3.5. Travail d'une couple (ou d'un moment) M appliqué en un point subissant une rotation

Il se peut qu'une action ne soit pas réduite à une force (exemple de deux forces opposées appliquées à un tire bouchon). On parle alors de couple M . On a l'analogue de la définition C.3 :

DÉFINITION C.4. Si on applique un couple M constant en un point qui subit un déplacement angulaire θ (de façon quelconque), alors le travail du couple est égal à

$$W(M) = M\theta, \quad (\text{C.5})$$

avec

- $W(M)$ en Joules (J)
- M en Nm
- θ en rad

Si le couple n'est pas constant, on peut aussi évoquer le travail de F entre deux angles : on décompose le travail angulaire en un grand nombre de «trajets élémentaires angulaires» $d\theta$, le long desquels, le couple M est constant. On parle alors du travail de M le long de ce trajet et on écrit alors :

$$W(M) = \sum M d\theta.$$

◇

C.4. Puissance

C.4.1. Puissance d'une force

Grosso modo, la puissance d'une force ou d'un couple est la dérivée du travail par rapport au temps. Nous venons de voir que le travail est défini le long d'un trajet, entre deux points, et ne dépend donc pas du temps, dans le cas où la force est constante. Dans le cas plus général où cette force n'est pas constante, on peut aussi évoquer le travail d'une force, que l'on définit d'abord grâce à la notion de puissance.

On parle alors de travail élémentaire : imaginons une particule subissant un trajet \vec{dl} pendant le temps dt , entre les instants t et $t + dt$. Au cours de ce trajet élémentaire, la force \vec{F} est constante et on donne alors le travail élémentaire $dW(\vec{F})$ de \vec{F} le long de \vec{dl} :

$$dW(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

Si on note \vec{v} , la vitesse du point d'application de la force, on a $\vec{v} = \vec{dl}/dt$ et donc

$$\vec{dl} = \vec{v} dt$$

et donc

$$dW(\vec{F}) = (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt$$

Ainsi, on a

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{C.6})$$

Ce rapport est aussi la dérivée de W par rapport au temps. On donne donc la définition suivante :

DÉFINITION C.5. Si le point d'application de la force \vec{F} a une vitesse \vec{v} , on appelle la puissance (instantanée) de \vec{F} , le nombre :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{C.7})$$

avec

- P en Watt (W)
- F en N
- v en ms^{-1}

Grâce à cette notion, on peut écrire en utilisant (C.4) que le travail de \vec{F} est égal à

$$W(\vec{F}) = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{t_A}^{t_B} (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt = \int_{t_A}^{t_B} P dt. \quad (\text{C.8})$$

◇

REMARQUE C.6. Notons que, si la force et la vitesse sont constantes et si, de plus, la force est colinéaire à la vitesse et de même sens que la vitesse, on a, à tout instant $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv$ et (C.8) s'écrit

$$W(\vec{F}) = P\Delta T, \quad (\text{C.9a})$$

où

$$P = Fv, \quad (\text{C.9b})$$

soit encore

$$W(\vec{F}) = Fv\Delta T = FL, \quad (\text{C.9c})$$

où L est la longueur parcourue.

REMARQUE C.7. On peut étendre la remarque C.1 page 103 : On peut faire l'analogie entre les notions de travail et de puissance avec celles de l'énergie et de la puissance consommées par un utilisateur d'électricité délivrée par EDF (ou maintenant tout autre opérateur privé). Le vendeur apporte à l'utilisateur une énergie produite par exemple par la combustion de charbon, par la fusion nucléaire ou par la houille blanche. On verra à la fin de ce chapitre que cette énergie correspond au travail produit par une force. Sur le compteur, on peut voir apparaître la puissance instantanée à l'instant t (exprimée en kW) qui permet de faire tourner tel ou tel appareil selon la puissance dont il a besoin ; on peut aussi voir l'énergie consommée depuis le dernier relevé (exprimée en kWh, c'est-à-dire une grandeur homogène à des Joules, mais qui ne sont pas des USI). Cette énergie est égale, selon (C.8) à $\int P dt$, soit encore la somme des produits puissance instantanée par un «petit intervalle de temps» dt . Ce qu'on paye à EDF est donc une énergie (et pas une puissance). Dans le cas où la puissance est constante, la formule (C.9a) donne $W = P\Delta T$: ce qu'on paye est proportionnel à la puissance consommée P et au temps de consommation ΔT !

Une analyse plus poussée permettrait de montrer que l'énergie apportée est effectivement égal au travail de la force de pesanteur qui a produit cette électricité dans le cas de la chute d'eau, ôtée de l'énergie perdue par le transport de l'électricité dans les lignes à haute tension.

C.4.2. Puissance d'un couple

On fait le même raisonnement pour un couple appliqué à un point subissant une variation d'angle élémentaire $d\theta = \omega dt$, où ω est la vitesse angulaire. On donne donc

DÉFINITION C.8. Si le point d'application du couple M a une vitesse angulaire ω , on appelle la puissance (instantanée) de M , le nombre :

$$P = M\omega \quad (\text{C.10})$$

avec

- P en Watt (W)
- M en Nm

- ω en rad s^{-1}

◇

C.5. Énergies potentielle, cinétique, mécanique (totale)

Toutes les énergies (potentielle, cinétique et mécanique) sont homogènes à un travail et sont donc exprimées en Joules.

C.5.1. Énergie potentielle

C.5.1.1. Énergie potentielle de pesanteur.

Commençons par un cas simple (celui qui sera constamment utilisé en biomécanique!) On définit la variation d'énergie potentielle de pesanteur :

DÉFINITION C.9. La variation d'énergie potentielle de pesanteur E_p correspond à l'opposé du travail du poids appliqué à un point matériel de masse m le long du trajet AB . Puisque le poids $\vec{p} = m\vec{g}$ est constant, on a donc

$$E_p = -\vec{p} \cdot \overrightarrow{AB} = -m\vec{g} \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (\text{C.11})$$

Cette énergie ne dépend que des positions initiales et finales et non du trajet suivi.

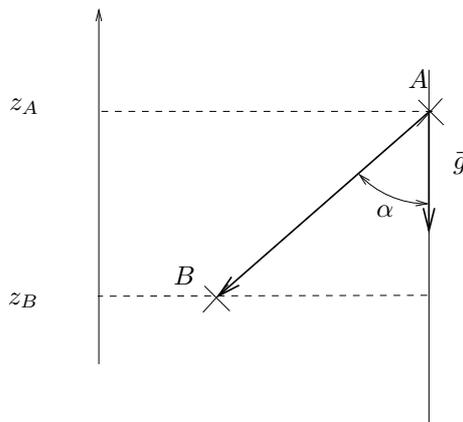


FIGURE C.2. Calcul de l'énergie potentielle de pesanteur.

Soient z_A et z_B les deux altitudes de A et de B . En utilisant la trigonométrie (voir figure C.2), on a

$$\begin{aligned} \vec{g} \cdot \overrightarrow{AB} &= gAB \cos \alpha \\ &= gAB \frac{z_A - z_B}{AB} \\ &= g(z_A - z_B). \end{aligned}$$

On a donc

$$E_p = mg(z_B - z_A). \quad (\text{C.12})$$

Cette énergie potentielle ne dépend donc que la différence d'altitude $z_B - z_A$.

En fait, cette quantité correspond à la différence d'énergie potentielle de pesanteur entre les points A et B . On définit donc

DÉFINITION C.10. L'énergie potentielle de pesanteur $E_p(z)$ d'un point matériel de masse m à une hauteur z est égale à

$$E_p(z) = mgz. \quad (\text{C.13})$$

Cette énergie est définie à une constante près et on a

$$E_p(B) - E_p(A) = \Delta E_p = mg(z_B - z_A). \quad (\text{C.14})$$

REMARQUE C.11. Pour un système de masse M , l'énergie potentielle de pesanteur est la somme des énergies potentielles des particules le composant, c'est-à-dire

$$E_p = Mgz_G \quad (\text{C.15})$$

où z_G est l'altitude du centre de gravité de ce système.

C.5.1.2. Autres énergies potentielles.

On dira qu'une force \vec{f} dérive d'une énergie potentielle E_p , si lors d'un trajet élémentaire \vec{dl} , on a

$$dW(\vec{f}) = -dE_p$$

On dit aussi que \vec{f} est conservative. Cela implique aussi que

$$\Delta W(\vec{f}) = -\Delta E_p \quad (\text{C.16})$$

La force exercée par un ressort de raideur r est conservative et on a $E_p = 1/2kx^2$. \diamond

Il existe des forces qui ne sont pas conservatives, comme les forces de frottement.

C.5.2. Énergie cinétique

C.5.2.1. Pour une particule de masse m .

DÉFINITION C.12. Une particule de masse m et de vitesse v possède une énergie cinétique définie par

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{C.17})$$

C.5.2.2. Pour un ensemble de particules.

DÉFINITION C.13. Un ensemble de particules de masses m_i et de vitesse v_i possède une énergie cinétique définie par

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 \quad (\text{C.18})$$

C.5.2.3. Pour un solide indéformable.

On peut montrer que :

— Translation pure

Si le solide, de masse M subit une translation pure, définie par la vitesse V , alors l'énergie cinétique de ce solide vaut :

$$E_c = \frac{1}{2}MV^2 \quad (\text{C.19})$$

— Rotation pure

Si le solide subit une rotation pure, définie par la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe Δ (voir figure 3(a)), alors l'énergie cinétique de ce solide vaut :

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (\text{C.20})$$

où I est le moment d'inertie du solide (en kgm^2). Souvent, ce moment d'inertie est donnée sous la forme

$$I = Mr^2, \quad (\text{C.21})$$

où M est la masse du solide et r le rayon de giration, par rapport à l'axe Δ .

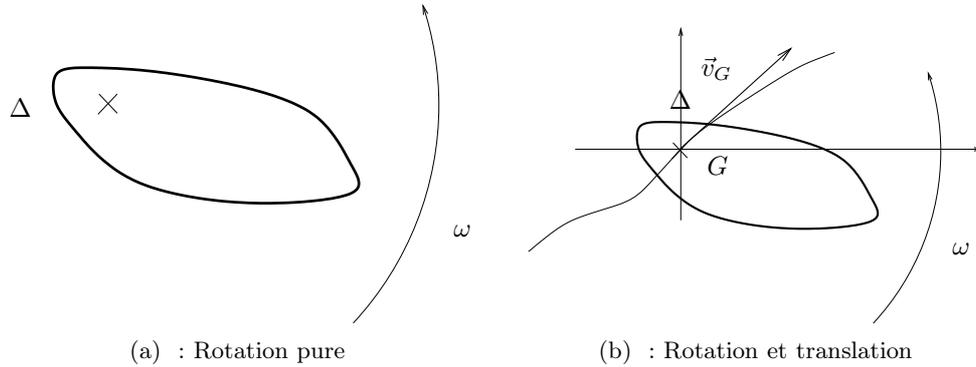


FIGURE C.3. Rotation

Ce rayon correspond en fait à la distance à laquelle se trouverait une masse concentrée de masse M de l'axe Δ qui aurait le même moment d'inertie que le solide étudié, et pour laquelle $I = Mr^2$. \diamond

— Rotation et translation

Si le solide étudié a un mouvement (plan) quelconque, on peut toujours décomposer le mouvement en deux mouvements (voir figure 3(b)) :

- le centre de gravité G de ce solide a une vitesse v_G ;
- le solide a un mouvement de rotation autour d'un axe de direction fixe passant par G et de vitesse angulaire ω . Cette vitesse angulaire mesure la rotation du solide par rapport à une direction fixe, passant par G .

Ainsi, *grosso modo*, en écrivant que déplacement=translation+rotation, on a alors

$$E_c = \underbrace{E_{ct}}_{\text{translation}} + \underbrace{E_{cr}}_{\text{rotation}} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (\text{C.22})$$

où E_{ct} et E_{cr} sont respectivement les énergies cinétiques de translation et de rotation, M est la masse du solide et I le moment d'inertie autour de l'axe passant par G donné sous la forme

$$I = Mr^2, \quad (\text{C.23})$$

où r le rayon de giration, par rapport à l'axe passant par G .

Ce résultat, qui n'est pas si simple, provient du théorème de König. On en trouvera la preuve rédigée en annexe D. On pourra aussi consulter [Van96]. \diamond

C.5.3. Énergie mécanique (totale)

DÉFINITION C.14. On considère un système soumis à des forces externes dérivant d'une énergie potentielle E_p . L'énergie mécanique de ce système est égale à

$$E = E_c + E_p. \quad (\text{C.24})$$

REMARQUE C.15. Si un système est formé de plusieurs sous-systèmes, l'énergie mécanique est la somme des énergies mécaniques des sous-systèmes.

C.6. Théorèmes énergétiques

Entrons maintenant dans le vif du sujet.

Les théorèmes énergétiques que nous allons voir ne font que traduire, autrement, la RFD et le théorème du moment cinétique (voir remarque 6.1 page 5). \diamond

C.6.1. Théorèmes de l'énergie cinétique

THÉORÈME C.16. *On considère un système mécaniques soumis à des forces intérieures de travail W_i entre t_1 et t_2 et à des forces extérieures de travail W_e entre t_1 et t_2 . Alors, on a*

$$\Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = W_i + W_e \quad (\text{C.25})$$

DÉMONSTRATION. Une preuve complète dépasse le cadre de ce cours. Rappelons seulement que ce théorème n'est qu'une conséquence de la relation fondamentale de la dynamique et du théorème du moment cinétique (voir remarque 6.1 page 5). On donne en annexe E une preuve très simple dans le cas d'une seule particule. \square

◇

THÉORÈME C.17. *Si, de plus, le travail des forces intérieurs est nul, alors*

$$\Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = W_e \quad (\text{C.26})$$

Cela peut s'appliquer à un solide indéformable, pour lequel les forces intérieurs ont un travail nul. En revanche, pour un corps humain, cela n'est pas valable, puisqu'il existe des forces internes qui travaillent (celles créées par les muscles ...).

REMARQUE C.18. L'intérêt des section C.3 et C.4 apparaît (certes *a posteriori* !) ici : Si la force \vec{F} est constante, son travail vaut $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$; sinon, on utilisera la formule (C.8).

C.6.2. Théorèmes de conservation de l'énergie mécanique

THÉORÈME C.19. *On considère un système soumis à des forces internes ne travaillant pas, à des forces externes dont le travail est W_e et à des forces externes dépendant d'une énergie potentielle. Alors,*

$$E(t_2) - E(t_1) = \Delta E = W_e \quad (\text{C.27})$$

DÉMONSTRATION. Par définition, on a a

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p. \quad (\text{C.28})$$

D'après le théorème C.17, ΔE_c est égal au travail des forces externes, qui se décompose, d'après (C.16), en W_e plus $-\Delta E_p$. Bref, d'après (C.28)

$$\Delta E = W_e - \Delta E_p + \Delta E_p = W_e. \quad \square$$

◇

THÉORÈME C.20. *Si de plus, le travail des forces externes est nul, un tel système est dit isolé et son énergie mécanique est constante :*

$$E(t_2) - E(t_1) = \Delta E = 0 \quad (\text{C.29})$$

REMARQUE C.21. En pratique, les systèmes mécaniquement isolés sont peu nombreux.

- Un segment humain n'est pas mécaniquement isolé : c'est bien un solide indéformable, mais il est relié aux autre segments par des muscles qui exercent des forces (externes) ;
- Un sujet humain dans son ensemble n'est pas mécaniquement isolé et ce pour deux raisons :
 - c'est un ensemble de solides indéformables, mais qui bougent les uns par rapport aux autres ;
 - les forces internes (d'origine essentiellement musculaires) travaillent ; voir la section C.7.2.
- Un sujet dans son ensemble, supposé immobile dans son ensemble (il peut bouger mais les segments sont immobiles les uns par rapport aux autres), est mécaniquement isolé, si les forces extérieures ne travaillent pas. En effet, les forces internes ne travaillent pas. Attention, cela ne signifie pas que les muscles sont inactifs ; ils peuvent être actifs, mais ne provoquant pas de déplacements internes, leur travail est mécaniquement nul. Voir les exemples de sections C.7.1 et C.7.3 ;
- Un système indéformable est mécaniquement isolé si les forces extérieures ne travaillent pas.

REMARQUE C.22. En pratique, les seules forces externes dérivant d'une énergie potentielle sont les forces de gravité et pour un système mécaniquement isolé, on a

$$\Delta E = mg(z_2 - z_1) + \Delta E_c = 0. \quad (\text{C.30})$$

où z est l'altitude du centre de gravité.

On peut aussi donner une version générale de la conservation de l'énergie, qui synthétise les deux théorèmes C.16 et C.19 : On considère un système mécanique soumis à des forces intérieures de travail W_i entre t_1 et t_2 et à des forces extérieures de travail W_e entre t_1 et t_2 , ainsi qu'à des forces externes dépendant d'une énergie potentielle. Alors,

$$E(t_2) - E(t_1) = \Delta E = W_e + W_i. \quad (\text{C.31})$$

◇

C.7. Quatre exemples

C.7.1. Un patineur

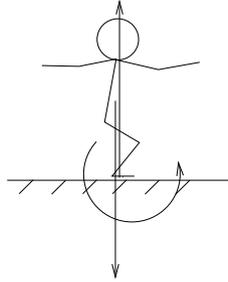


FIGURE C.4. Un patineur.

On considère un patineur qui tourne sur lui-même (voir figure C.4), sans translation. Si on assimile le patineur à un solide indéformable, alors il n'est soumis qu'à son poids \vec{p} et à la réaction du sol \vec{R} , qui ont tous les deux un travail nul (leur point d'application est immobile!). Alors, (C.20) et l'équation (C.26) du théorème de l'énergie cinétique donne E_c constant d'où

$$I\omega^2 \text{ est constant} \quad (\text{C.32})$$

Si le patineur se déploie, alors I augmente et donc ω diminue.

Cette expérience peut aussi être réalisée avec une chaise de bureau (qui tourne!).

C.7.2. Un segment humain

On considère un segment humain dont on connaît

- M , la masse
- $I = Mr^2$, le moment d'inertie (r rayon de giration par rapport au centre de gravité)
- z_G l'altitude du centre de gravité
- v_G la vitesse du centre de gravité
- ω la vitesse angulaire de rotation autour de G , par rapport à un axe fixe

L'énergie mécanique est égale à

$$E = E_p + E_c = E_p + E_{ct} + E_{cr} = \underbrace{Mgz_G}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}_{E_c = E_{ct} + E_{cr}} = \underbrace{Mgz_G}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2}M(v_G^2 + r^2\omega^2)}_{E_c}.$$

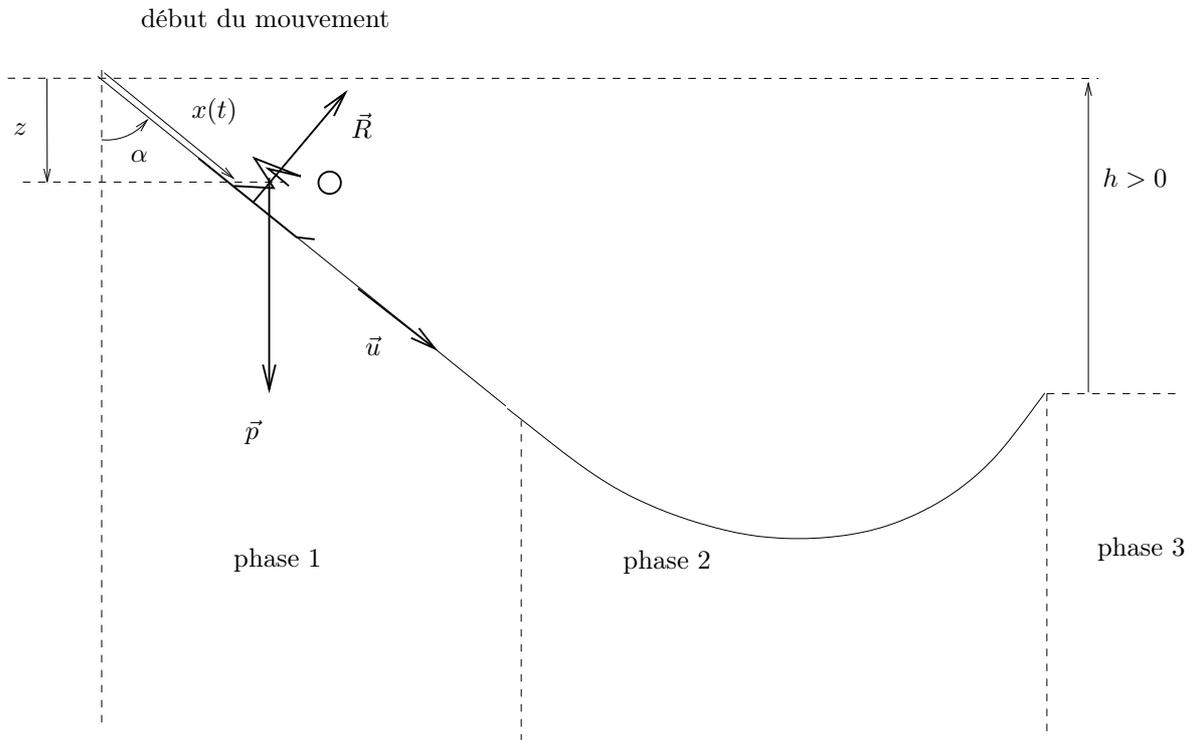


FIGURE C.5. Un skieur.

C.7.3. Un skieur sur un tremplin

On considère un skieur, qui part à l'arrêt d'un tremplin de saut (voir figure C.5). On peut décomposer le mouvement en trois phases :

- phase 1 : descente et accélération le long de la partie rectiligne du tremplin ;
- phase 2 : légère remontée sur la partie incurvée du tremplin ;
- phase 3 : vol libre

- Étude des phases 1 et 2

Lors des deux premières phases, on assimile le patineur à un solide indéformable. Si on néglige les frottements de l'air et du sol, le skieur n'est soumis qu'à son poids \vec{p} et à la réaction du sol \vec{R} , qui est alors perpendiculaire au sol. En effet, la composante tangentielle \vec{R}_t de cette force, qui correspond au frottement du sol, est nulle (voir figure C.6 page ci-contre). On a donc $\vec{R} = \vec{R}_t + \vec{R}_n = \vec{R}_n$. Le travail de la force de force non constante \vec{R}_n est la somme des termes (voir section C.3.2 page 104) :

$$W(\vec{R}_n) = \sum \vec{R}_n \cdot \vec{dl}.$$

Chacun des termes $\vec{R}_n \cdot \vec{dl}$ est nul, puisque les deux vecteurs \vec{R}_n et \vec{dl} sont perpendiculaires. On a donc

$$\vec{R}_n \cdot \vec{dl} = 0 \quad (\text{C.33})$$

et donc $W = 0$. Hormis le poids, l'ensemble des forces extérieures a donc un travail nul : le système est donc mécaniquement isolé et le théorème C.20 page 110 donne donc

$$E = E_p + E_c = Mgz_G + E_c = Mgz + E_c \text{ est constant.}$$

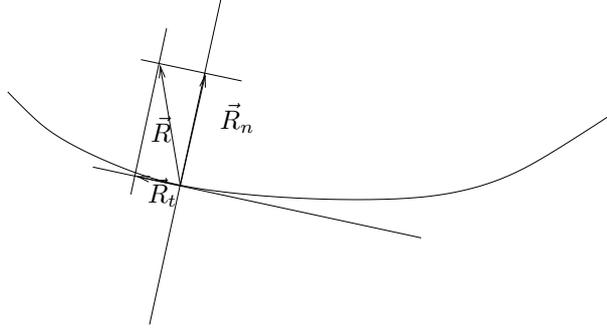


FIGURE C.6. la réaction du sol.

Par ailleurs, on néglige l'énergie cinétique de rotation du skieur (lors de la phase 2). On a donc

$$Mgz + \frac{1}{2}Mv^2 \text{ est constant.} \quad (\text{C.34})$$

Au début du mouvement, on a $v = 0$ et $z = 0$ par convention. On a donc, selon (C.34) :

$$Mgz + \frac{1}{2}Mv^2 = 0$$

soit :

$$v^2 = -2gz < 0$$

et donc, puisque v , la norme de la vitesse, est positive :

$$v = \sqrt{-2gz}. \quad (\text{C.35})$$

À la fin de la phase 2, on a $z = -h < 0$ et

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (\text{C.36})$$

On pourrait retrouver cela avec la relation fondamentale de la dynamique, lors de la phase 1. On considère \vec{u} le vecteur unitaire et porté par l'axe rectiligne (voir figure C.5 page précédente). On note O la position du centre de gravité du skieur au début du mouvement. On a alors

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}.$$

et l'accélération du centre de gravité vaut :

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM} = \frac{d^2}{dt^2}x\vec{u} = x''(t)\vec{u}.$$

La relation fondamentale de la dynamique donne donc

$$\vec{p} + \vec{R} = m\vec{a}$$

et donc

$$\vec{p} + \vec{R} = m(x''(t)\vec{u}).$$

On fait le produit scalaire de cette égalité par \vec{u} :

$$\vec{p} \cdot \vec{u} + \vec{R} \cdot \vec{u} = m(x''(t)\vec{u} \cdot \vec{u}).$$

Or $\vec{R} \cdot \vec{u} = 0$ (de la même façon que dans (C.33)). Par ailleurs, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$ et il vient donc

$$mx''(t) = \vec{p} \cdot \vec{u} = m\vec{g} \cdot \vec{u} = mg \cos \alpha,$$

et donc

$$x''(t) = g \cos \alpha. \quad (\text{C.37})$$

Comme au cours du chapitre 8, on intègre cela deux fois :

$$x'(t) = g \cos \alpha t + v_0 = g \cos \alpha t. \quad (\text{C.38})$$

et donc

$$x(t) = \frac{1}{2}g \cos \alpha t^2 + x_0$$

soit

$$x(t) = \frac{1}{2}g \cos \alpha t^2.$$

On a donc

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g \cos \alpha}}$$

En reportant dans (C.38), il vient

$$v(t) = x'(t) = g \cos \alpha t = g \cos \alpha \sqrt{\frac{2x}{g \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2x}{g \cos \alpha} g^2 \cos^2 \alpha} = \sqrt{2xg \cos \alpha}.$$

Par ailleurs, on a $\cos \alpha = -z/x$ et donc $x \cos \alpha = -z$, ce qui fournit finalement

$$v(t) = \sqrt{-2gz}.$$

Pour la phase 2, le calcul est plus compliqué et devrait se faire dans la base de Frenet. \diamond

- Étude de la phase 3 On est en phase chute libre : voir le chapitre 8.

Attention, en fait et aux grandes vitesses atteintes par les skieurs, il est faux de négliger les frottements de l'air et du sol ; en réalité, la vitesse atteinte par le skieur est un peu plus faible que celle prévue par les calculs précédents. Notamment, l'altitude maximale du skieur pendant le saut ne correspondra pas à celle de son point de départ.

C.7.4. Un cyclotouriste nommé Maurice

Voir l'énoncé et le corrigé du CCF2 (donné à l'automne 2012) sur la page habituelle

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>

ou bien voir directement l'énoncé sur

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/CCF2L2biomecaA12.pdf>

et le corrigé sur

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/L2biomeca/corCCF2L2biomecaA12.pdf>

Annexe D

Démonstration du théorème de König (Équation (C.22))

Non rédigé.

Démonstration simplifiée du théorème de l'énergie C.16

Supposons que l'on étudie une seule particule de masse m et soumise à une seule force \vec{F} .

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la seule particule de masse m , soumise à la seule force externe \vec{F} donne donc

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

On peut « multiplier » de chaque coté par le vecteur vitesse \vec{v} , au sens du produit scalaire :

$$m\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{E.1})$$

Le terme $\vec{F} \cdot \vec{v}$ est égale à la puissance P de la force \vec{F} (voir définition C.5 page 106). On a donc, selon (E.1)

$$m\vec{a} \cdot \vec{v} = P. \quad (\text{E.2})$$

Notons aussi que, si

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

alors d'après la définition (C.2) page 104 du produit scalaire

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{dv_x}{dt} \cdot v_x + \frac{dv_y}{dt} \cdot v_y. \quad (\text{E.3})$$

Remarquons que pour une fonction réelle f , on a

$$\frac{d}{dt} (f^2) = 2f \frac{df}{dt}. \quad (\text{E.4})$$

Ainsi, (E.3) et (E.4) donnent

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v^2), \quad (\text{E.5})$$

où v est la norme de la vitesse. Bref, on a selon (E.2) et (E.5),

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v^2) = P.$$

Si on intègre cela entre les instants t_1 et t_2 , on obtient donc

$$\frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (v^2) dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt,$$

soit encore

$$\frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \int_{t_1}^{t_2} P dt.$$

Ce qui donne

$$\Delta E_c = \int_{t_1}^{t_2} P dt, \quad (\text{E.6})$$

où, ici, l'énergie cinétique du système est réduite à

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2.$$

Dans (E.6), le terme de droite est bien égal à la somme des travaux des forces (extérieures et intérieures), puisqu'il n'y a qu'une seule force (voir équation (C.8)).

Bref, on a donc montré que «la variation d'énergie cinétique est égale aux travaux de toutes les forces» ce qui est, dans le cas particulier dans le cas d'une particule, du (premier) théorème de l'énergie cinétique (voir théorème C.16 page 110).

Rappels des formules principales de la chute libre

On se place dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, le point O correspondant à la position initiale du solide étudié (à $t = 0$).

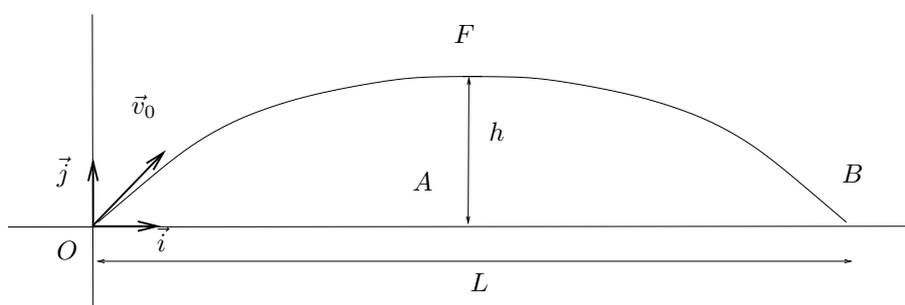


FIGURE F.1. Les conventions adoptées.

On appelle g la constante de gravité, v_0 la norme de la vitesse initiale, qui fait un angle α avec le vecteur \vec{i} . Voir la figure F.1.

- Équations paramétriques de la chute libre (le paramètre est le temps t) :

$$a_x(t) = 0, \quad (\text{F.1a})$$

$$a_y(t) = -g, \quad (\text{F.1b})$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (\text{F.1c})$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha, \quad (\text{F.1d})$$

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad (\text{F.1e})$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \quad (\text{F.1f})$$

- Équation cartésienne de la paraboles (valables si $\cos \alpha \neq 0$, c'est-à-dire si α n'est pas égal à $\pi/2$ ou un de ses multiples impairs)

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x. \quad (\text{F.2})$$

- Longueur L (portée horizontale, distance OB) :

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad (\text{F.3})$$

- hauteur h (distance FA , où F est la flèche de la parabole)

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (\text{F.4})$$

- demi-temps de vol t_2 (temps pour parcourir la partie de la parabole de 0 à F) :

$$t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (\text{F.5})$$

Détermination géométrique de la parabole de la chute libre

G.1. Un lien GeoGebra

Une partie des activités proposées par la suite ont été programmées sous GeoGebra¹ et sont disponibles à l'adresse suivante (attendre quelques instants que les scripts GeoGebra soient actifs) :
<https://www.geogebra.org/m/fRw4jAQ9>

G.2. Quelques rappels géométriques sur la paraboles

On pourra consulter la vingt et unième leçon de [LH97].

Naturellement, on peut déterminer l'équation de la parabole de la chute libre en utilisant les résultats du chapitre 8.

Une autre façon de procéder pour tracer la parabole sans utiliser les formules du chapitre 8 serait de procéder comme dans [Bas15b, Exercices 4.28, 4.29 et 4.31]. \diamond

Cependant, la parabole est bien connue par les Grecs depuis deux millénaires et l'objet de cette section est d'utiliser une définition et une construction purement géométrique d'une parabole et qui serviront dans la section G.3.

Ce que l'on entend par construction purement géométrique est une construction uniquement avec une règle, non graduée, un compas et une longueur unité. Voir par exemple [Car89] et notamment la section « Pourquoi la règle et le compas ? » p. 4. On pourra simplifier et supposer que la règle est graduée (mais, on pourrait s'en passer). Ainsi, on peut montrer que *toutes* les constructions présentées ici peuvent se traiter de cette façon, exceptée peut-être la construction de l'angle $\alpha = 35^\circ$, égal à l'angle entre l'horizontale et le vecteur vitesse du centre de gravité du ballon au moment de la frappe. En effet, si on savait construire l'angle 35° , on saurait construire 5° car on sait construire 30° . On saurait donc construire 20° , égal à $\pi/9$, dont on sait que la construction est impossible. De façon générale, l'angle α peut-être considéré comme le résultat d'une mesure expérimentale, donc constructible ! Il en est de même pour les autres grandeurs mécanique qui interviendront comme g et v_0 et la position du centre de gravité du ballon au moment de la frappe. \diamond

Rappelons tout d'abord :

DÉFINITION G.1.

Voir figure G.1 page suivante. Une parabole de directrice \mathcal{D} et de foyer F est l'ensemble des points du plan équidistants de la droite \mathcal{D} et du point F , soit encore l'ensemble des points M tels que

$$MF = MH, \tag{G.1}$$

où H est la projection orthogonale de M sur la droite \mathcal{D} .

On en déduit que M appartient à la médiatrice Δ de $[MH]$.

La notion de tangente sera introduite oralement. Se rappeler qu'en un point, la tangente est la droite qui épouse le mieux la courbe. Un zoom successif sur la courbe en ce point transformera la courbe progressivement en une droite, qui est justement sa tangente.

On pourra consulter [Bas15b, chapitre 4] ou [Bas15d]. \diamond

Il s'avère en fait que l'on a la propriété plus précise suivante :

1. Un grand grand Merci à Christian Mercat de l'Université Lyon I, pour ce travail !

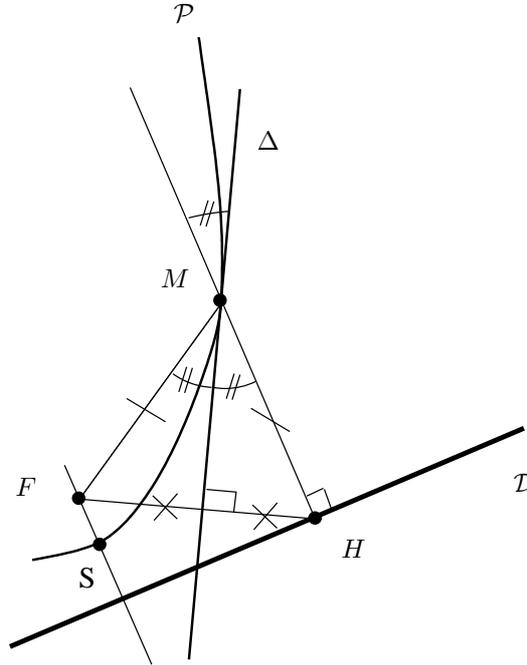


FIGURE G.1. La définition géométrique de la parabole \mathcal{P} .

PROPOSITION G.2. *La droite Δ est la tangente à la parabole \mathcal{P} au point M .*

DÉMONSTRATION. On peut trouver une jolie preuve purement géométrique [LH97, p. 345]. Exceptionnellement, on peut faire un tout petit peu de calcul différentiel pour montrer cela par le calcul. On considère que la parabole peut être paramétrée par $t \mapsto M(t)$ et on note abusivement M pour $M(t)$ et \overrightarrow{OM}' pour $(d/dt)\overrightarrow{OM}(t)$. Élevons au carré l'égalité de base (G.1) et dérivons-là part à rapport à t ; il vient

$$\frac{d}{dt} (\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FM}) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HM}),$$

soit

$$\overrightarrow{FM} \cdot \frac{d}{dt} (\overrightarrow{FM}) = \overrightarrow{HM} \cdot \frac{d}{dt} (\overrightarrow{HM}),$$

et donc, en notant par exemple K , l'intersection de l'axe de la parabole avec la directrice.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{OM}' &= \overrightarrow{HM} \cdot \frac{d}{dt} (\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KM}), \\ &= \overrightarrow{HM} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{OM}'. \end{aligned}$$

Quand t varie, le point H varie en restant sur la directrice de la parabole, par construction. Ainsi, $(d/dt)\overrightarrow{HK}$ reste porté par cette droite et est donc perpendiculaire à \overrightarrow{HM} . Ainsi, le produit $\overrightarrow{HM} \cdot (d/dt)\overrightarrow{HK}$ est nul et l'égalité précédente donne :

$$\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{OM}'.$$

soit encore

$$(\overrightarrow{FM} - \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{OM}' = 0,$$

et donc

$$\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{OM}' = 0$$

Le vecteur \overrightarrow{OM}' est porté par la tangente à la parabole, qui est donc perpendiculaire à \overrightarrow{FH} . Ainsi, la tangente à la parabole passe par le point M , équidistant de F et de H et est perpendiculaire à (FH) ; c'est donc la médiatrice de $[FH]$. \square

◇

La proposition G.2 pour conséquence la conséquence la propriété « optique » suivante :

2. dont on admet qu'il est non nul.

PROPOSITION G.3. *Tout rayon perpendiculaire à la directrice \mathcal{D} et qui subit une réflexion sur la parabole passe par le foyer F .*

DÉMONSTRATION. On se réfère à la figure G.2. Soit \mathcal{Q} , la droite perpendiculaire à la droite Δ , passant par M . D'après la

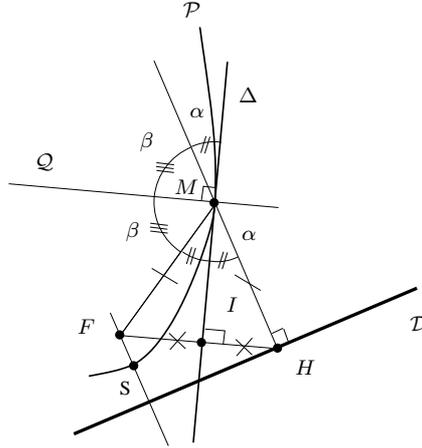


FIGURE G.2. La réflexion d'un rayon perpendiculaire à la directrice \mathcal{D} .

propriété G.2, la droite \mathcal{Q} est donc perpendiculaire à la tangente. Ainsi, un rayon perpendiculaire à directrice \mathcal{D} subit les lois de la réflexion de Descartes : s'il arrive avec l'angle d'incidence β , il est réfléchi avec le même angle β . Notons I , le milieu de $[FH]$. Puisque Δ est la médiatrice de $[FH]$, les angles \widehat{FMI} et \widehat{IMH} sont tous les deux égaux à $\alpha = \pi/2 - \beta$. L'angle \widehat{IMH} est égal à α . Ainsi l'angle \widehat{FMI} est égal à α . Autrement dit, le rayon réfléchi passe bien par F . \square

◇

On pourra regarder l'illustration de cette propriété dans le sous menu « Parabole » du lien GeoGebra donné en section G.1 à l'url suivante :

<http://www.geogebra.org/m/fRw4jAQ9#material/ZNFfmURP>

La proposition G.3 justifie l'utilisation de la parabole pour recevoir des ondes télé ou radio, mais aussi dans des systèmes qui permettent de chauffer un point grâce au soleil.

DÉFINITION G.4. La droite \mathcal{A} perpendiculaire à \mathcal{D} passant par F est appelé l'axe de la parabole. La distance p égale à la distance de F à la droite \mathcal{D} est appelé le paramètre de la parabole et l'intersection de \mathcal{A} avec \mathcal{P} est appelé le sommet S de la parabole.

PROPOSITION G.5.

Voir figure G.3 page suivante. Soit \mathcal{D}' la tangente à \mathcal{P} passant par S . Considérons A le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D}' et B l'intersection de la tangente Δ avec \mathcal{D}' . Le point B n'est autre que le milieu commun de $[AS]$ et $[FH]$. Autrement dit, la parabole atteint le sommet deux fois plus loin que la tangente, dans la direction de \mathcal{D} .

DÉMONSTRATION. On admet qu'au sommet de la parabole, la tangente est parallèle à la directrice. Ainsi, la droite \mathcal{D}' est parallèle à \mathcal{D} . Notons K , l'intersection de l'axe de la parabole avec la directrice. Ainsi, le triangle FKH est rectangle en K . Puisque la tangente Δ est la médiatrice de $[FH]$, d'après le théorème de la droite des milieux, B est le milieu de $[FH]$. Enfin, d'après ce même théorème, SB et donc BA sont égales à $KH/2$. En particulier, B est aussi le milieu de $[AS]$. \square

◇

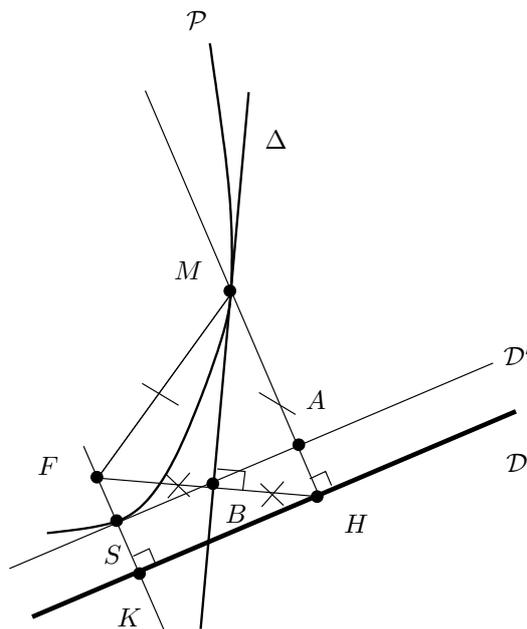


FIGURE G.3. La parabole atteint le sommet deux fois plus loin que la tangente.

PROPOSITION G.6. *Si l'on considère un repère orthonormé d'origine S et dont les vecteurs sont portés respectivement par les droites \mathcal{D}' et \mathcal{A} , alors l'équation de la parabole dans ce repère est donnée par*

$$Y = \pm \frac{1}{2p} X^2. \quad (\text{G.2})$$

DÉMONSTRATION. Dans le repère choisi, le foyer F a pour coordonnées $(\pm p/2, 0)$. En orientant convenablement l'axe, on peut supposer que ces coordonnées sont donc $(p/2, 0)$. Le point M a pour coordonnées (X, Y) . Le point H a donc pour coordonnées $(X, -p/2)$. L'équation (G.1) entraîne

$$MF^2 = MH^2,$$

et donc

$$(x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2 = (x_M - x_H)^2 + (y_M - y_H)^2,$$

soit encore

$$X^2 + \left(Y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(Y + \frac{p}{2}\right)^2,$$

d'où

$$X^2 + Y^2 - pY + \frac{p^2}{4} = Y^2 + pY + \frac{p^2}{4},$$

ce qui se simplifie finalement en

$$X^2 = 2pY,$$

ce qui est (G.2). □

◇

Attention, la littérature usuelle écrit plutôt l'équation (G.2) sous la forme

$$y^2 = 2px, \quad (\text{G.3})$$

où l'axe des x correspond à l'axe de la parabole, le nombre p est algébrique et désigne la mesure algébrique du vecteur \overrightarrow{KF} et où K est l'intersection de l'axe de la parabole avec la directrice. Voir [LH97, (1) p. 325]. ◇

G.3. Construction géométrique d'une parabole

Pour d'autres constructions de la parabole, on pourra consulter :

<http://www.lyca.ch/~pfrache/3os/Cours2-coniques-affin/2-3-Parabole/exe-parabole.pdf> ◇

Nous proposons dans cette section, trois méthodes pour construire, point par point, autant de points que souhaité et les tangentes en ces points, pour une parabole dont on connaît certains éléments géométriques.

G.3.1. À partir d'une propriété de la tangente (méthode des deux tangentes)

Rappelons une vieille propriété de la parabole (voir [Bas15e]).

PROPOSITION G.7.

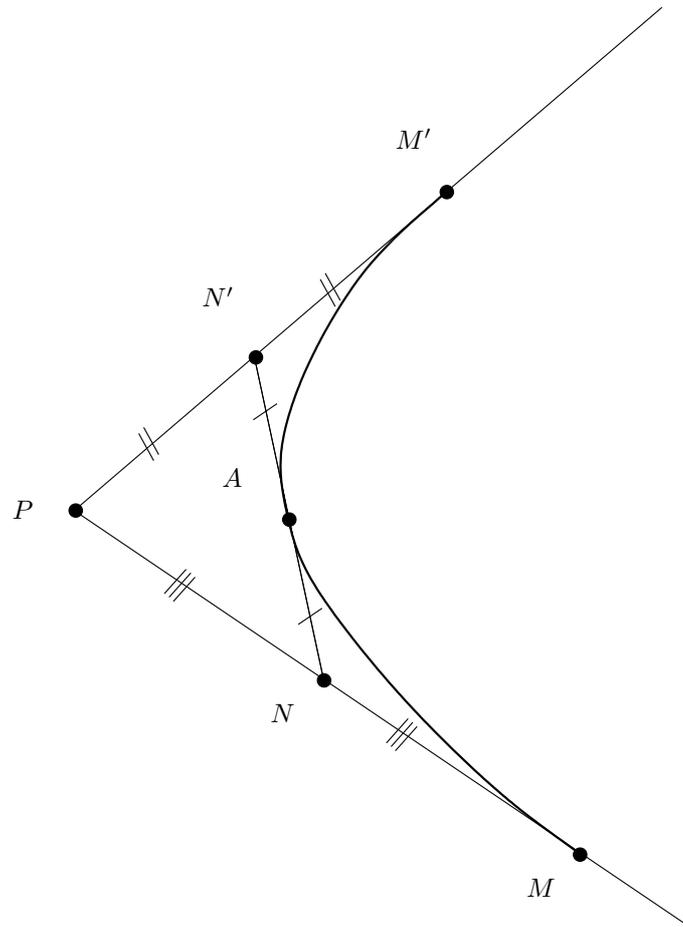
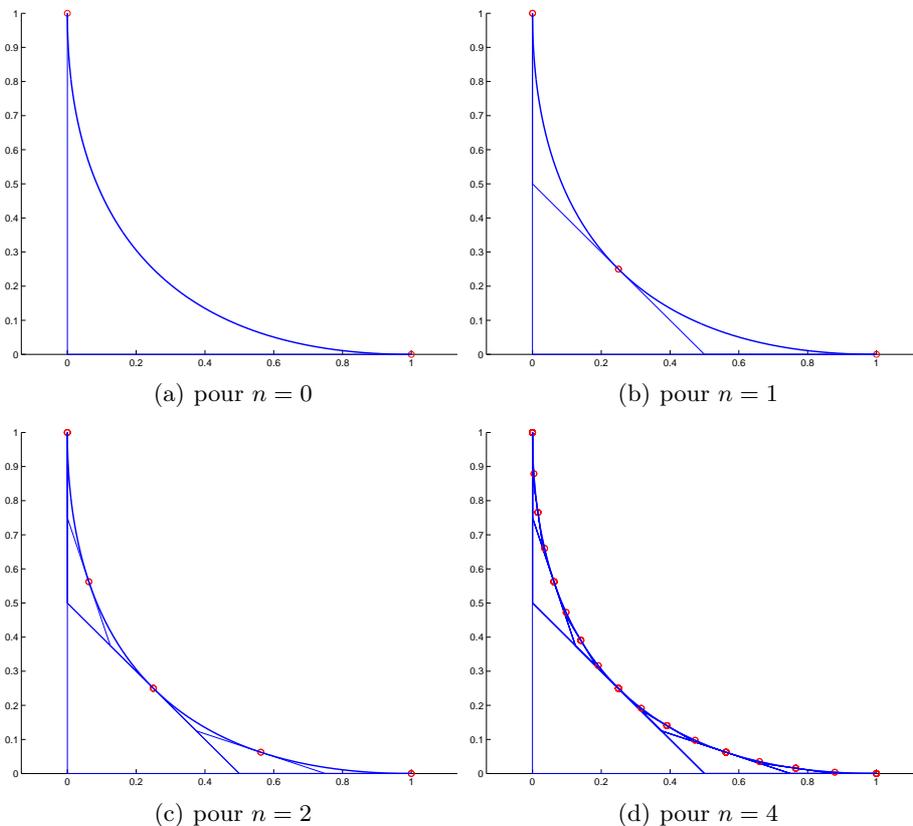


FIGURE G.4. Propriétés des deux tangentes à la parabole.

Voir figure G.4. Soient trois points non alignés M , P et M' tels que (PM) et (PM') soient tangentes à la parabole \mathcal{P} (aux points de contact M et M') et N et N' , les milieux respectifs de $[PM]$ et $[PM']$. Alors la droite (NN') est tangente à la parabole et son point de contact A est le milieu de $[NN']$.

Notons que si deux droites d et d' (non parallèles) sont données et deux points $M \in d$ et $M' \in d'$ sont donnés, il existe une unique parabole tangente à d en M et à d' en M' . Voir [Bas15e, Transparents 38 à 42]. ◇

On pourra regarder l'illustration de cette propriété dans le sous menu « De deux points, un troisième. » du lien GeoGebra donné en section G.1 à l'url suivante :

FIGURE G.5. Méthode de construction des deux tangentes au bout de n itérations.

<http://www.geogebra.org/m/fRw4jAQ9#material/ERuedJ8>

Ce procédé est itératif! En effet, on connaît deux tangentes (MP) et ($M'P$) (aux points de contact M et M') et on en déduit une nouvelle tangente (NN') en A . Autrement dit, on passe d'une ligne polygonale approchant la parabole (MPM') à une ligne polygonale approchant mieux la parabole ($MNAN'M'$). Initialement, on part d'une ligne polygonale formée par les deux tangentes données à la parabole. On peut donc construire progressivement une ligne de points polygonale. Si on l'applique suffisamment de fois, on finit par obtenir des points qui se confondent avec la parabole.

C'est aussi ce qui constitue une difficulté de cette méthode : les segments construits se confondent vite et il faut veiller à être particulièrement attentif lors de la construction! \diamond

On est capable d'évaluer l'erreur commise en remplaçant la parabole par la ligne de points obtenue. Si on répète n fois l'opération, cette erreur diminue très rapidement vers zéro. Voir par exemple le résultat numérique (G.14). Voir l'annexe H pour l'établissement de cette majoration. \diamond

On a obtenu la construction d'un nombre quelconque de points de la parabole et les tangentes correspondantes.

Cette méthode est en fait un cas particulier de la méthode de construction de courbes de Bézier, utilisée en CA0 et pour les fontes de lettres (que vous lisez!)! Voir section G.3.2.

EXEMPLE G.8.

Voir l'exemple de la figure G.5.

G.3.2. À partir de l'algorithme de De Casteljau

On se donne une parabole \mathcal{P} , définie par deux points M et M' et les deux tangentes en ces points, qui se coupent en P . Voir figure G.4 page 125. On sait qu'il existe une unique parabole définie ainsi. Voir [Bas15e]. On peut aussi définir cette parabole par une courbe de Bézier de degré 2, mise au point dans les années 60, par un ingénieur. Il a repris en fait des courbes, dont l'algorithme de De Casteljau a été mis au point dix ans auparavant. Cet algorithme est utilisé par les ordinateurs et généralise le cas particulier montré en section G.3.1.

Sans rentrer dans les détails techniques, il suffit de choisir N points (avec $N \geq 2$) linéairement disposés sur $[PM]$, noté $A_1 = M, A_2, \dots, A_N = P$ et de choisir N points régulièrement disposés sur $[M'P]$, noté $B_1 = P, B_2, \dots, B_N = M'$. On trace ensuite chacun des segments $[A_1, B_1] = [MP], [A_2, B_2], \dots, [A_N, B_N] = [PM']$. Chacune des droites (A_i, B_i) est tangente à la parabole \mathcal{P} en un unique point noté M_i .

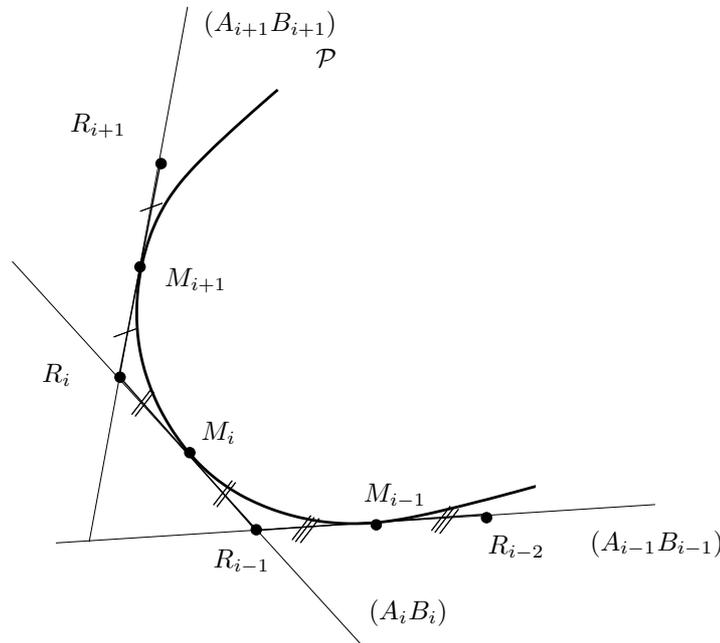


FIGURE G.6. La construction des points de contacts M_i , comme milieux des segments $[R_i, R_{i+1}]$.

Plus précisément, considérons R_i , l'intersection de chacune des droites $(A_i B_i)$ avec la suivante $(A_{i+1} B_{i+1})$. La ligne polygonale formée par les différents R_i constitue une approximation de la parabole. De plus, le milieu de $[R_{i-1}, R_i]$ est le point M_i , dont on a donc une construction simple. Voir figures G.6 et G.8

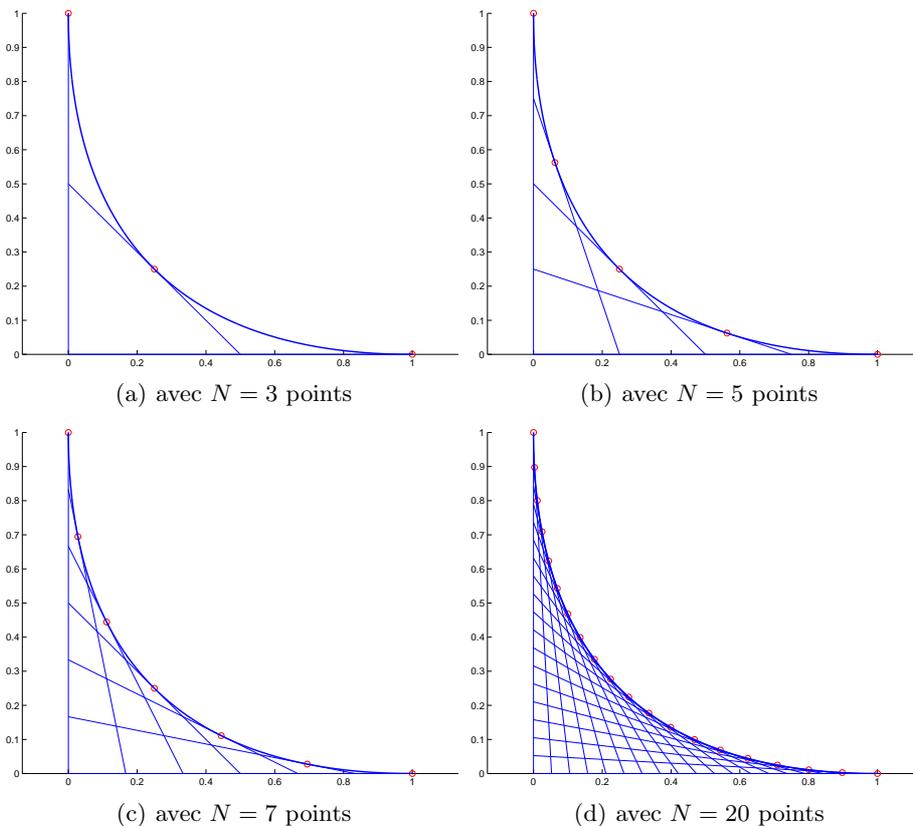
Remarquons enfin que toutes les droites tracées $(A_i B_i)$ se trouvent à l'extérieur de la parabole. Ainsi, on peut aussi voir la parabole comme la limite entre la zone où appartiennent tous les segments $[A_i B_i]$ et celle qui en est vide. \diamond

On peut aussi montrer que le point M_i est tel que, pour $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$A_i M_i = \frac{A_i B_i}{N-1} (i-1).$$

Une propriété barycentrique traduit en fait cette construction. Cette propriété met en évidence la parabole comme enveloppe de droites. Plus de détails dans [Bas07, section 3.7]. C'est aussi lié à la notion de courbes de Bézier. Voir [HM13] ou [Bas15e, Transparent 46]. \diamond

On pourra aussi voir la figure G.8 qui est zoom de la figure 7(c). Il est intéressant de constater qu'on est de nouveau dans un cas très proche de la construction des deux tangentes de la section G.3.1 : en effet, on dispose de deux tangentes connues à la parabole, qui sont les droites $(M_i R_i)$ et $(M_{i-1} R_i)$. Un peu de calcul pourrait

FIGURE G.7. Méthode de construction avec l'algorithme de De Casteljau avec N points

aussi nous permettre, comme dans la section G.3.1, d'estimer l'écart entre la parabole et la ligne polygonale formée des R_i .

Une fois de plus, on a obtenu la construction d'un nombre quelconque de points de la parabole et les tangentes correspondantes.

On pourra regarder l'illustration de cette propriété dans le sous menu « Construction de Casteljau » du lien GeoGebra donné en section G.1 à l'url suivante :

<http://www.geogebra.org/m/fRw4jAQ9#material/gSkrfw88>

Le cas $N = 3$ correspond au cas particulier de la section G.3.1.

EXEMPLE G.9.

Voir l'exemple des figures G.7 et 7(c).

EXEMPLE G.10.

Voir l'exemple de la figure G.9.

EXEMPLE G.11.

Cette propriété est utilisée par les artistes en herbe qui font (parfois sans le savoir) des paraboles en fils tendus, comme le montre la photo de la figure G.10. On pourra regarder l'illustration de cette photo dans le sous menu « Clous et fils » du lien GeoGebra donné en section G.1 à l'url suivante :

<http://www.geogebra.org/m/fRw4jAQ9#material/YjTUjUfM>

On peut remarquer que la figure G.10 est composée de quatre carrés, chacun d'eux contenant une suite de carrés emboîtés les uns dans les autres de la façon suivante : si $ABCD$ est un carré de côté l et dont les

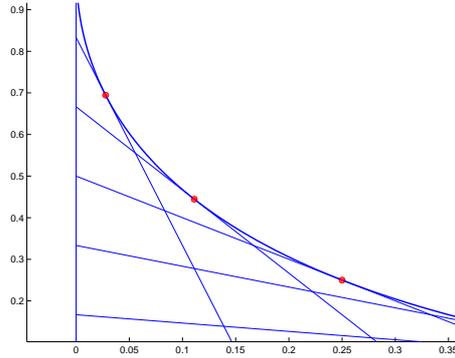


FIGURE G.8. Méthode de construction de De Casteljau : zoom de la figure 7(c).

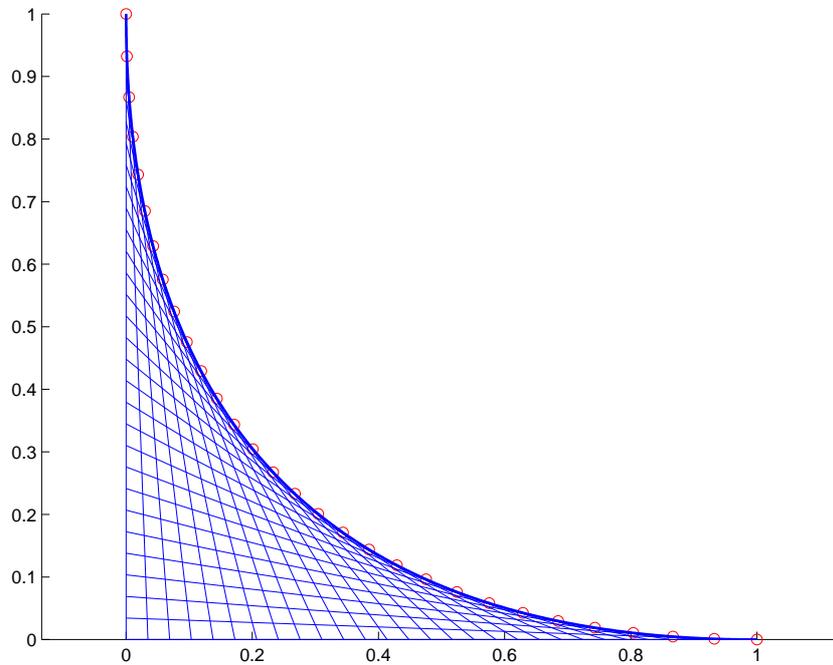


FIGURE G.9. Méthode de construction de De Casteljau avec 30 points.

coordonnés de A sont (a, b) , alors le carré suivant $A'B'C'D'$ est un carré de coté $l/2$ et dont les coordonnées de A' sont $(a + l/4, b + l/4)$. Voir figure G.11. Si une parabole est définie à partir de l'un des trois points du carré $ABCD$, on en déduit les suivantes, définie à partir de l'un des trois points du carré $A'B'C'D'$.

Ensuite, on peut remarquer que dans les carrés en haut à gauche et en bas à droite de la figure G.10, les paraboles sont définies à partir des trois points de coordonnées respectives (a, b) , $(a, b + l)$, $(a + l, b + l)$ et (a, b) , $(a + l, b)$, $(a + l, b + l)$. Pour les carrés en haut à droite et en bas à gauche, il faut rajouter les paraboles définies par les trois points $(a, b + l)$, $(a + l, b + l)$, $(a + l, b)$, et $(a + l, b)$, (a, b) , $(a, b + l)$. \diamond

Sur la figure G.12, on a tracé les paraboles correspondant à la figure G.10. Sur la figure G.13, on a tracé cette-fois la même figure avec 10 sous-carrés au lieu de 3.

Pour $n > \frac{\ln(10^3)}{\ln 2}$, c'est-à-dire $n \geq n_0 = 10$, on a $1/2^n < 1/10^3$ et donc le n -ième sous carrés est $1/10^3$ plus petit que le carré initial, c'est-à-dire visuellement réduit à un point ! \diamond



FIGURE G.10. Plusieurs paraboles en fils tendus.

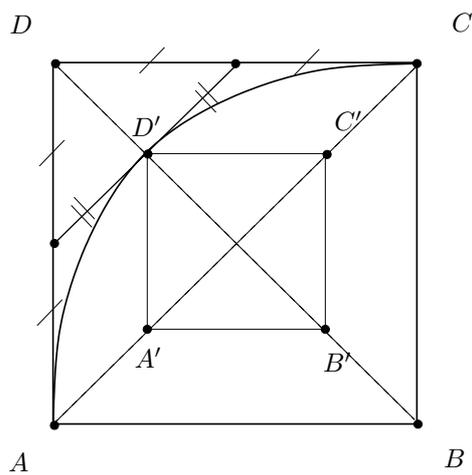


FIGURE G.11. La construction des carrés de la figure G.10.

Enfin, sur les figures G.14 et G.15, on a tracé la totalité des « fils » de construction avec respectivement 3 et 10 sous-carrés et $N = 27$ points sur chaque segment.

EXEMPLE G.12. On pourra consulter

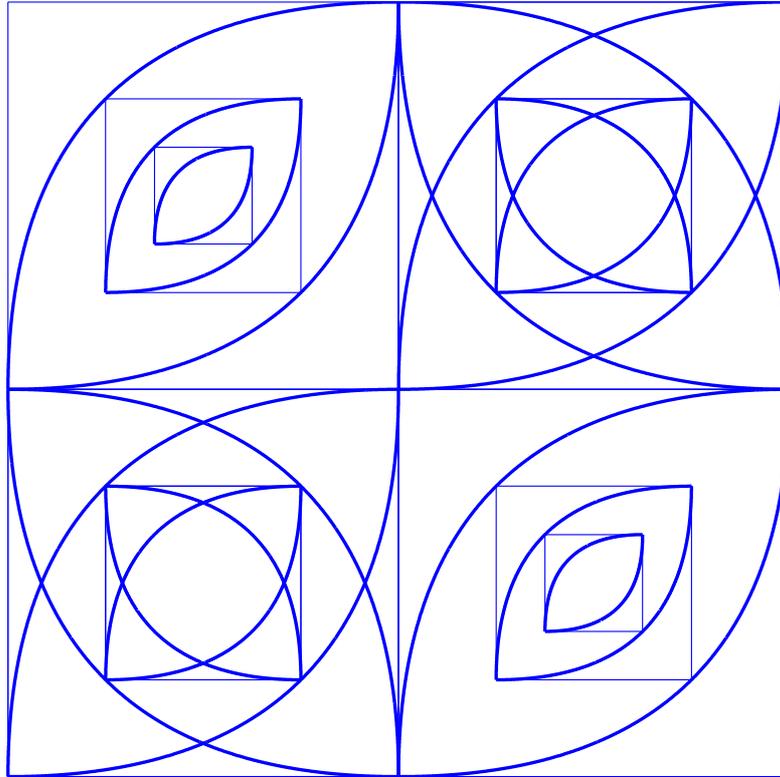


FIGURE G.12. Les paraboles correspondant à la figure G.10 (avec 3 sous-carrés).

<http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article575>

<http://www.youtube.com/watch?v=NsvSHtBP8Gk>

G.3.3. À partir de la définition

Une dernière possibilité de construction est envisageable, si on connaît le foyer F et la directrice \mathcal{D} de la parabole \mathcal{P} . Elle consiste à exploiter simplement la définition G.1 page 121 et la propriété G.2 de la parabole. On renvoie à la figure G.1 page 122.

Pour tout point H de la droite \mathcal{D} , on considère l'intersection M de la perpendiculaire à la droite \mathcal{D} passant par H et de la médiatrice Δ de $[FH]$. Ce point M appartient à la parabole et la droite Δ est tangente à la parabole en M . On peut simplifier la construction pour obtenir facilement le milieu de $[FH]$, qui n'est autre que l'intersection de la droite \mathcal{D}' et de (FH) . Voir en effet la proposition G.5.

Cette construction permet d'obtenir autant de point (et les tangentes correspondantes) que l'on veut, à partir de tout point H de la directrice \mathcal{D} .

EXEMPLE G.13.

Voir l'exemple de la figure G.16. On peut construire de façon géométrique le foyer et la directrice de la parabole à partir du carré [Bas15e, Transparent 42].

REMARQUE G.14. Pour cette méthode, il peut être intéressant de savoir déterminer la directrice et le foyer d'une parabole connaissant deux tangentes et deux points de contact. Supposons par exemple que les trois points A , B et C soient donnés tels que (AB) et (BC) soient tangentes à la parabole en A et C . Montrons que l'on peut déterminer la directrice \mathcal{D} et le foyer F de la parabole. On sait que la méthode de la section G.3.2 peut se traduire de façon analytique de la façon suivante :

$$\forall t, \quad M(t) = (1-t)^2 A + 2t(1-t)B + t^2 C.$$

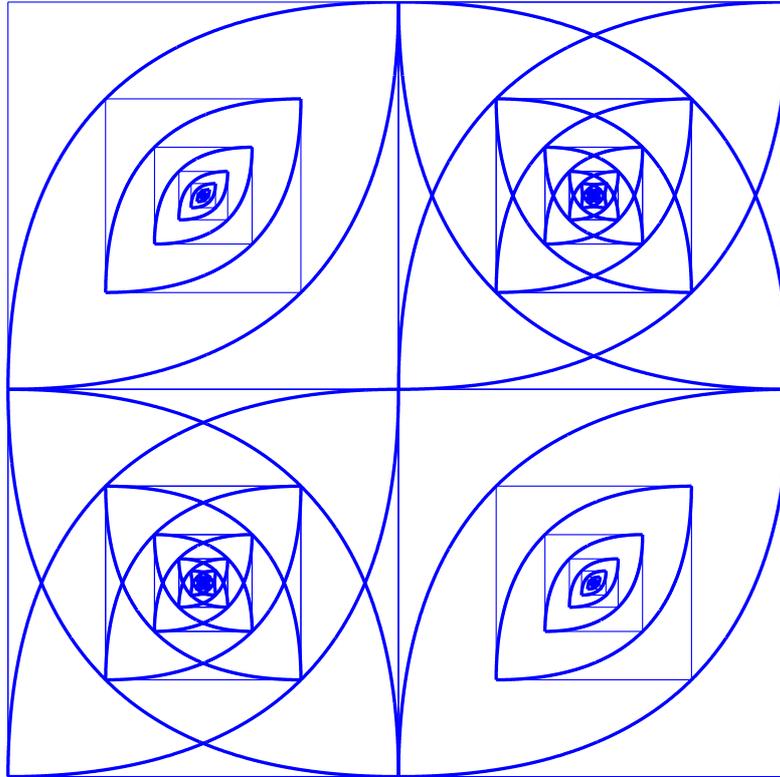


FIGURE G.13. Les paraboles correspondant à la figure G.10 (avec 10 sous-carrés).

Voir [HM13] ou [Bas15e, Transparent 46]. On peut donc en déduire les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de M , notés respectivement x , y et M . On notera de même de façon abusive les dérivées \overrightarrow{OM}' pour $(d/dt)\overrightarrow{OM}(t)$ et \overrightarrow{OM}'' pour $(d^2/dt^2)\overrightarrow{OM}(t)$. L'angle α entre l'horizontale et l'axe de la directrice peut être défini de la façon suivante :

$$\alpha = \arctan \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} \right) = \arctan \left(\frac{y''}{x''} \right).$$

L'axe de la parabole est donc porté par le vecteur \vec{v} donné par

$$\vec{v} = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

tandis que la directrice est portée par le vecteur unitaire \vec{n} donné par

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Pour trouver le vecteur \vec{u} dans le sens de l'axe de la parabole, on peut écrire

$$\vec{u} = \varepsilon \vec{v},$$

où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On a alors

$$\varepsilon = \text{signe} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{v} \cdot \overrightarrow{OM} \right) = \text{signe} \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{OM}'' \right).$$

On en déduit ensuite le paramètre t_0 du sommet S de la parabole en disant, qu'en ce point, la tangente est perpendiculaire à l'axe de la parabole : t_0 est donc l'unique solution de

$$x'(t) \cos \alpha + y'(t) \sin \alpha = 0$$

et donc

$$S = M_{t=t_0}.$$

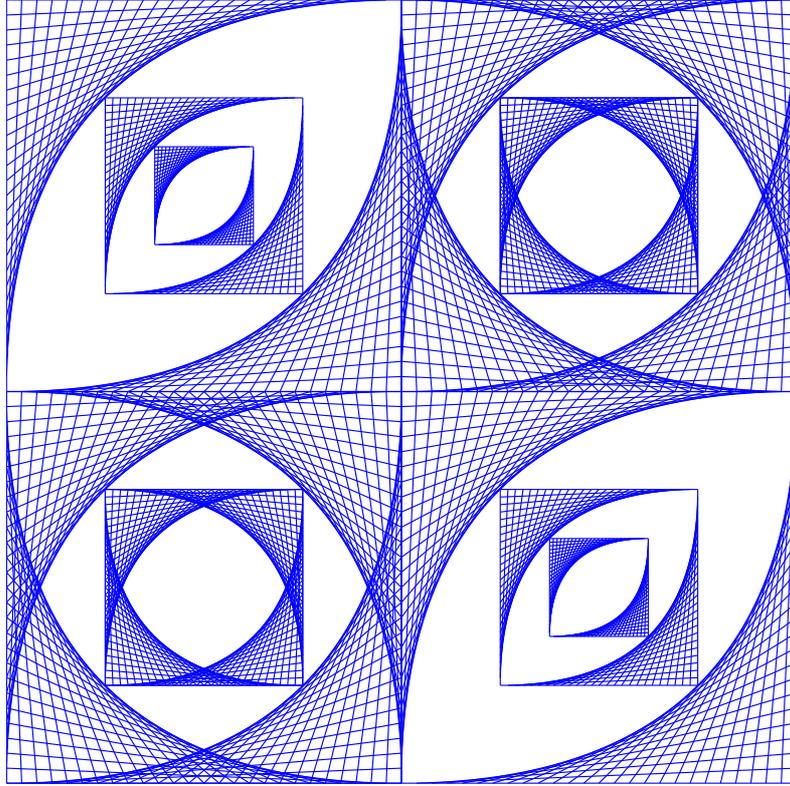


FIGURE G.14. Les paraboles avec les fils tendus correspondant à la figure G.10 (avec 3 sous-carrés et $N = 27$ points sur chaque segment).

Enfin, pour trouver le paramètre p de la parabole définie de façon algébrique par (G.2)

$$Y = \frac{1}{2p} X^2, \quad (\text{G.4})$$

dans le repère adapté, il suffit d'utiliser la définition du rayon de courbure. Par exemple, [Bas07, (3.49) p. 43], rappelée ici :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}. \quad (\text{G.5})$$

On évaluera cela au sommet (défini par t_0). D'autre part, avec la même équation, on peut montrer que si la courbe est donnée par (G.4), alors, au sommet (correspondant à $X = 0$), on a

$$R = p. \quad (\text{G.6})$$

En identifiant (G.5) et (G.6), on aboutit donc à l'expression du paramètre p :

$$p = \left[\frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'} \right]_{t=t_0}. \quad (\text{G.7})$$

Finalement, on utilise la définition G.4 pour en déduire le point K , intersection de l'axe et de la directrice et le foyer F en écrivant

$$\overrightarrow{KF} = p\vec{u},$$

dont on déduit

$$\overrightarrow{SK} = -\frac{1}{2p}\vec{u},$$

et

$$K = S - \frac{1}{2p}\vec{u}.$$

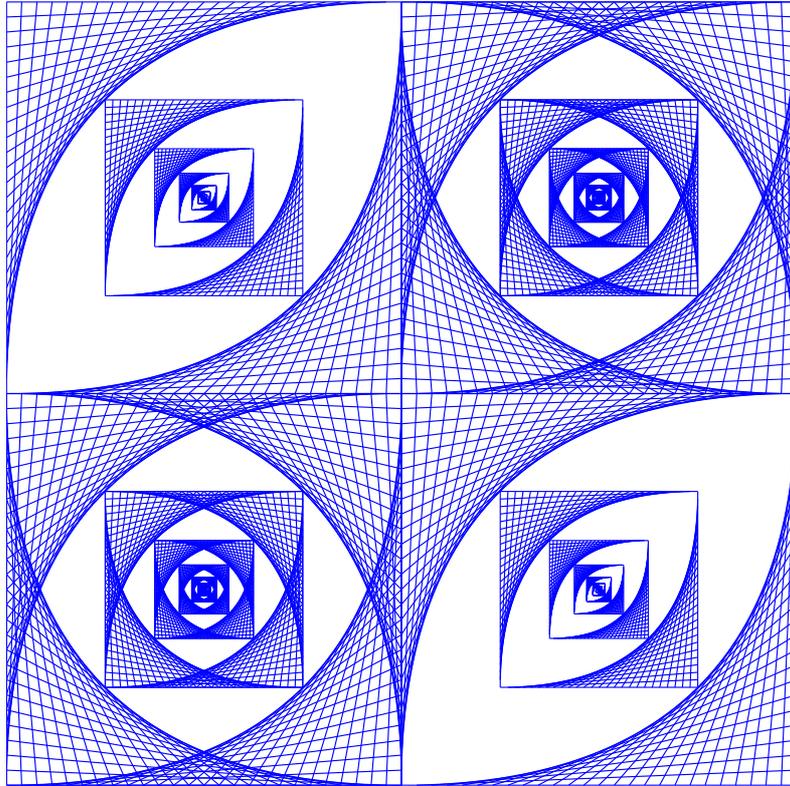


FIGURE G.15. Les paraboles avec les fils tendus correspondant à la figure G.10 (avec 10 sous-carrés et $N = 27$ points sur chaque segment).

De même, on a

$$\overrightarrow{SF} = \frac{1}{2p} \vec{u},$$

et

$$F = S + \frac{1}{2p} \vec{u}.$$

Il pourra être utile de déterminer les projections des points A et C sur la directrice de la parabole, passant par K et portée par \vec{n} . Si M est un point du plan, on considère H son projeté orthogonal sur la directrice défini par

$$\overrightarrow{KH} = t\vec{n}.$$

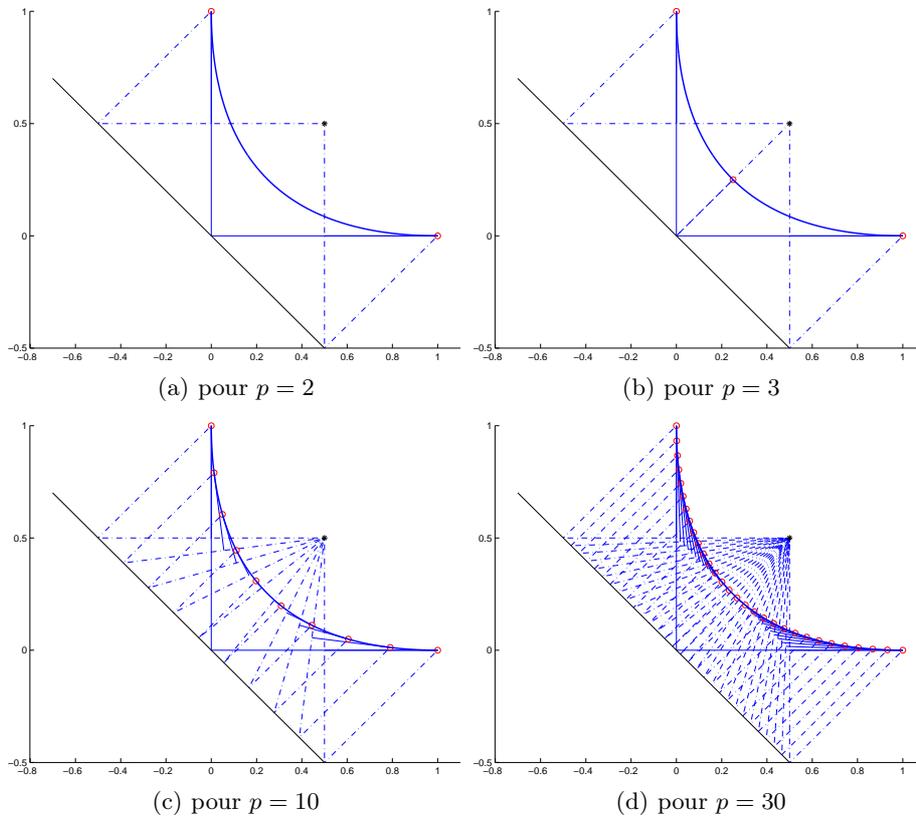
Pour déterminer le réel t , on écrit successivement

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{HM}, \\ &= \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{KM}, \\ &= -HK^2 + \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{KM}, \\ &= -t^2 \|\vec{n}\|^2 + t\vec{n} \cdot \overrightarrow{KM}, \\ &= t \left(-t \|\vec{n}\|^2 + \vec{n} \cdot \overrightarrow{KM} \right). \end{aligned}$$

On enlève la solution triviale $t = 0$ et on a donc

$$t = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{KM}}{\|\vec{n}\|^2}.$$

◇

FIGURE G.16. Méthode avec la définition avec p points sur la directrice.

G.3.4. Cas où le point connu est le sommet

Si le point connu est le sommet, c'est-à-dire que l'on ne connaît que le point M dont on sait que c'est le sommet, les méthodes présentées ci-dessus ne fonctionnent plus directement. On suppose que l'on est capable de déterminer la directrice, parallèle à la droite donnée. Il suffit de remarquer, que, grâce à la méthode de la section G.3.3, on peut déterminer un second point quelconque, différent du sommet et sa tangente associée. On est alors ramené au cas précédent.

G.4. Un exemple

Appliquons cette différentes propriétés et constructions à un cas particulier au football.

Le joueur est situé à une distance $d_2 = 15$ m de la ligne de but et à une distance $d_1 = 10$ m du mur formé par les joueurs adverses. La hauteur h_1 du mur est évaluée à $h_1 = 2$ m et celle des buts à $h_2 = 2.5$ m. On supposera que la la vitesse initiale du ballon est de 15 ms^{-1} et son angle d'envol de 35° . Le rayon du ballon est égal à $R = 0.11$ m.

Avant de lire cela, on pourra regarder le sous menu « Parabole du foot » du lien GeoGebra donné en section G.1 à l'url suivante :

<http://www.geogebra.org/m/fRw4jAQ9#material/qPYxvWRj>

Un calcul exacte du tracé de la parabole en utilisant les résultats du chapitre 8 nous donnerait la figure G.19 page 152.

Plus précisément, les formules du chapitre 8 donnent l'équation suivante, par rapport à la position initiale du centre de gravité du ballon :

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x. \quad (\text{G.8})$$

Si on choisit $x = 10$, on obtient en prenant $g = 9.81$

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{9.81}{15^2 \cos^2 35} \times 10^2 + \tan 35 \times 10,$$

soit numériquement

$$y = 3.75.$$

Le ballon passe au dessus du mur de joueurs si $y + R \geq h_1 + R$, soit $y \geq h_1 = 2$, ce qui est vrai. De même, on calcule l'ordonnée du centre de gravité du ballon pour $x = d_2$:

$$y = 3.19,$$

dont on déduit que le ballon passe au dessus de la barre transversale avec une distance égale à

$$\lambda = 3.19 + R - h_2 = 0.80 > 0.$$

◇

On se donne pour objectif d'éviter les calculs en les remplaçant le plus possible par des constructions géométriques.

Toutes les figures de courbes ont été regroupées à partir de la page 151. Sur la figure ??, ont été tracés la vitesse initiale en rouge, ainsi que le mur de joueurs et le but. On constate que, sans prendre en compte les frottements de l'air, la balle passe au dessus du mur de joueurs mais aussi au dessus de la barre transversale, résultat que nous allons montrer de façon géométrique.

Pour faire les différentes constructions, vous pourrez utiliser les patrons proposés à partir de la page 141.

Avant de commencer les différentes constructions géométriques, il est nécessaire de faire un seul calcul, celui de la hauteur maximale atteinte par le centre du ballon. Les formules du chapitre 8 prévoient

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (\text{G.9})$$

Numériquement, on trouve (par rapport à la position initiale du centre du ballon) :

$$h = \frac{15^2 \times \sin(35)^2}{2 \times 9.81},$$

soit

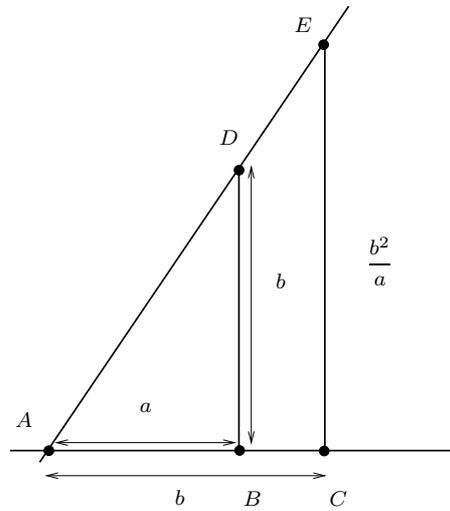
$$h = 3.77\text{m}. \quad (\text{G.10})$$

On rappelle que la formule (G.9) peut-être obtenue relativement rapidement en utilisant l'énergie. Voir remarque 8.8 page 32.

◇

REMARQUE G.15.

Si on veut faire une construction purement géométrique de h défini par (G.9), il est possible de construire d'abord $a = 2g$, puis $b = v_0 \sin \alpha$ (voir figure G.18 page suivante). On trace A , B , C et D comme l'indique la figure G.17 page ci-contre avec $AB = a$, $AC = b$, (BD) et (AB) perpendiculaires, avec $BD = b$. On trace ensuite E comme l'intersection de (AD) et de la perpendiculaire

FIGURE G.17. Construction de b^2/a .

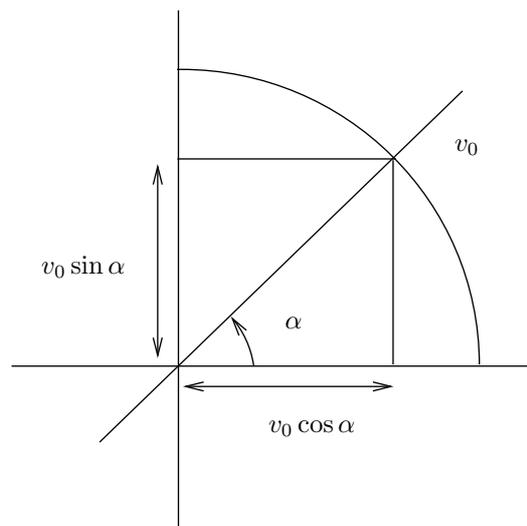
à (AB) passant par C . Le théorème de Thalès implique que $EC/BD = CA/BA$ soit $EC = b^2/a = h$. On pourra trouver [Car89, p. 19 à 21] toutes les constructions de l'inverse et de la racine d'un nombre et de la somme et du produit de deux nombres.

◇

La parabole que l'on veut tracer est donc définie par

- une première droite tangente et son point de contact : la position initiale du centre de ballon et sa vitesse qui est tangente à la parabole,
- une seconde droite tangente, qui est la tangente au sommet de la parabole, dont l'ordonnée d'un point, par rapport à la position initiale du ballon, est donné par (G.10).

Le vecteur vitesse à l'origine peut être construit grâce à la donnée de l'angle α et de v_0 . Par le calcul, il

FIGURE G.18. Les relations (trigonométriques) entre v_0 , α , $v_0 \cos \alpha$ et $v_0 \sin \alpha$.

est aussi donné par (voir figure G.18 page précédente)

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{G.11})$$

soit numériquement

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 12.29 \\ 8.60 \end{pmatrix} \quad (\text{G.12})$$

La droite dirigée par ce vecteur et passant par l'origine figure sur les patrons.

Tout est donc prêt pour le tracé!

Mathématiquement, puisque l'axe vertical de la parabole est de direction donnée, la parabole recherchée existe et est unique.

◇

Désormais, le repère considéré est le repère orthonormé dont le centre est le point du sol, supposé droit, qui se trouve juste sous le centre du ballon, au début du mouvement. Notons O ce point et M_0 la position du centre du ballon au début du mouvement.

Commençons par tracer la tangente à la parabole au sommet, notée précédemment \mathcal{D}' . Il suffit d'utiliser la propriété G.5. En effet, la direction de \mathcal{D} est connue (horizontale). La droite \mathcal{D}' est connue grâce à l'ordonnée de l'un de ses points, définie par (G.10). On en déduit le point A , d'abscisse nulle et d'ordonnée donnée par $h + R$, soit

$$y = 3.88\text{m}. \quad (\text{G.13})$$

On peut donc tracer la droite \mathcal{D}' . Enfin, on trace B , l'intersection de la tangente à la courbe au début du mouvement et de cette droite \mathcal{D}' . En considérant l'unique point S de la droite \mathcal{D}' , distinct de A à droite de A , tel que $AB = BS$, on obtient donc le sommet de la parabole. Voir figure G.20 page 153.

Mathématiquement, nous connaissons cette fois-ci, deux tangentes et deux points de contact de la parabole. La parabole recherchée existe et est unique. Voir par exemple [LH97, Bas15e]. ◇

On pourra étudier les exemples interactifs, donnés sous GeoGebra (attendre que la feuille qui apparaît devienne interactive) :

<http://tube.geogebra.org/student/m84210>

<http://tube.geogebra.org/student/m942347>

G.4.1. Construction minimaliste

Les mathématiciens sont paresseux, mais au bon sens du terme : ils essaient de faire le minimum de calcul pour résoudre un problème, parfois en inventant des techniques, voire des théories complexes mais dont l'utilisation réduit fortement les calculs par rapport à l'existant.

Dans le cadre du football, essayons de répondre à la question posée (est-ce que la parabole passe au dessus du mur et des buts) avec le moins d'effort possible.

Si on trace les deux tangentes à la parabole et leur point de contact, une propriété de la parabole nous dit que celle-ci passe en dessous de ces deux droites, mais aussi au-dessus de la corde.

Cela provient du fait que la parabole est concave. ◇

Or, la corde (M_0S) passe au dessus du mur de joueurs (voir figure G.20 page 153), avec une distance plus grande que le rayon du ballon. On est donc certain que *la parabole passe au dessus du mur du joueur!*

Pour vérifier que le tir passe au dessus de la barre transversale des buts (d'épaisseur négligée), il faudrait construire la parabole de l'autre côté du sommet, situé entre le mur et le but. Cependant, une propriété de la parabole est qu'elle est symétrique par rapport à son axe \mathcal{A} . Plutôt que de tracer les symétriques des deux tangentes connues, par rapport à cet axe, il est encore plus simple de tracer le symétrique des buts par rapport à cet axe! Voir figure G.20 page 153. Il s'avère que ce symétrique coupe la corde (M_0S). Donc, on ne peut plus affirmer, comme dans le cas du mur, que la parabole passe au-dessus des buts. On peut juste affirmer que *l'on n'en sait rien!*

Mathématiquement, on peut montrer qu'un résultat est vrai. On peut aussi démontrer qu'il est faux, en exhibant un contre-exemple. Il est des conjectures, dont on ne sait si elles sont vraies ou fausses, même si tous les exemples trouvés jusqu'à aujourd'hui sembleraient montrer que le résultat est vrai. Voir par exemple la conjecture de Goldbach : « Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. ». Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Goldbach. Il existe des résultats théoriques plus récents, issus du théorème de Gödel : il existe des théories dans lesquelles il existe des résultats³ dont on ne montre qu'ils sont vrais ou faux, pour simplifier ! Plus de détail sur

http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorèmes_d'incomplétude_de_Gödel. Ainsi, l'ignorance de la preuve d'un résultat en mathématique est très importante ! Les mathématiciens sont souvent des gens humbles⁴ peut-être à cause de cela ! \diamond

Il faut maintenant poursuivre pour montrer que parabole passe au-dessus des buts.

G.4.2. Construction des deux tangentes

Utilisons maintenant la méthode issue de la proposition G.7, qui est itérative. Si on l'applique 2 fois, on obtient la figure G.21 avec un écart entre la parabole et la ligne polygonale construite inférieur à

$$0.05873 \text{ m} \quad (\text{G.14})$$

ce qui est très petit, vues les distances considérées. Voir l'annexe H pour l'établissement de cette majoration. La ligne polygonale obtenue approchée passe cette fois-ci par dessus les buts. Vu la précision adoptée, on pourrait montrer que *la parabole passe au dessus de la barre transversale* ! Et donc, le problème est résolu !

Présentons d'autres méthodes.

G.4.3. La méthode de De Casteljaou (ou des « fils tendus »)

Si on applique la méthode de la section G.3.2 page 127 avec $N = 10$, on obtient la figure G.22.

G.4.4. La méthode de construction utilisant la définition par foyer-directrice

Nous avons besoin cette fois-ci du foyer et de la directrice de la parabole (voir section G.3.3 page 131), qui peuvent être déterminés aisément.

L'axe de la parabole passe par le sommet S et est perpendiculaire à la directrice, ici horizontale de la parabole et est donc connu. Utilisons la propriété G.3 : on fait passer un rayon vertical par le point M_0 . Après réflexion sur la tangente à l'origine, il passe par le foyer F , qui appartient aussi à cet axe. Voir figure G.23.

Une autre méthode consisterait à montrer que le paramètre de la parabole est donné par

$$p = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}. \quad (\text{G.15})$$

En effet, il suffit de comparer les équations (G.2) et (G.8), qui ne sont pas exprimées dans les mêmes repères, mais qui ont les mêmes coefficients quadratiques (au signe près) Autrement dit

$$\frac{1}{2p} = \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

soit encore

$$2p = 2 \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

dont on déduit que p est bien donné par (G.15). Ce paramètre peut être déterminé numériquement :

$$p = 15.39014 \quad (\text{G.16})$$

Mieux, on peut le déterminer de façon complètement géométrique en utilisant la construction de la remarque G.15 page 136 et de la figure G.18 page 137. Enfin, puisque la concavité de la parabole est tournée vers le bas, on sait que le foyer F , sur l'axe de la parabole, est situé à une distance $p/2$ du sommet et sous le sommet. La directrice est située à une distance $p/2$ au dessus du sommet. \diamond

Si on applique la méthode de construction de la section G.3.3, on obtient la figure G.23.

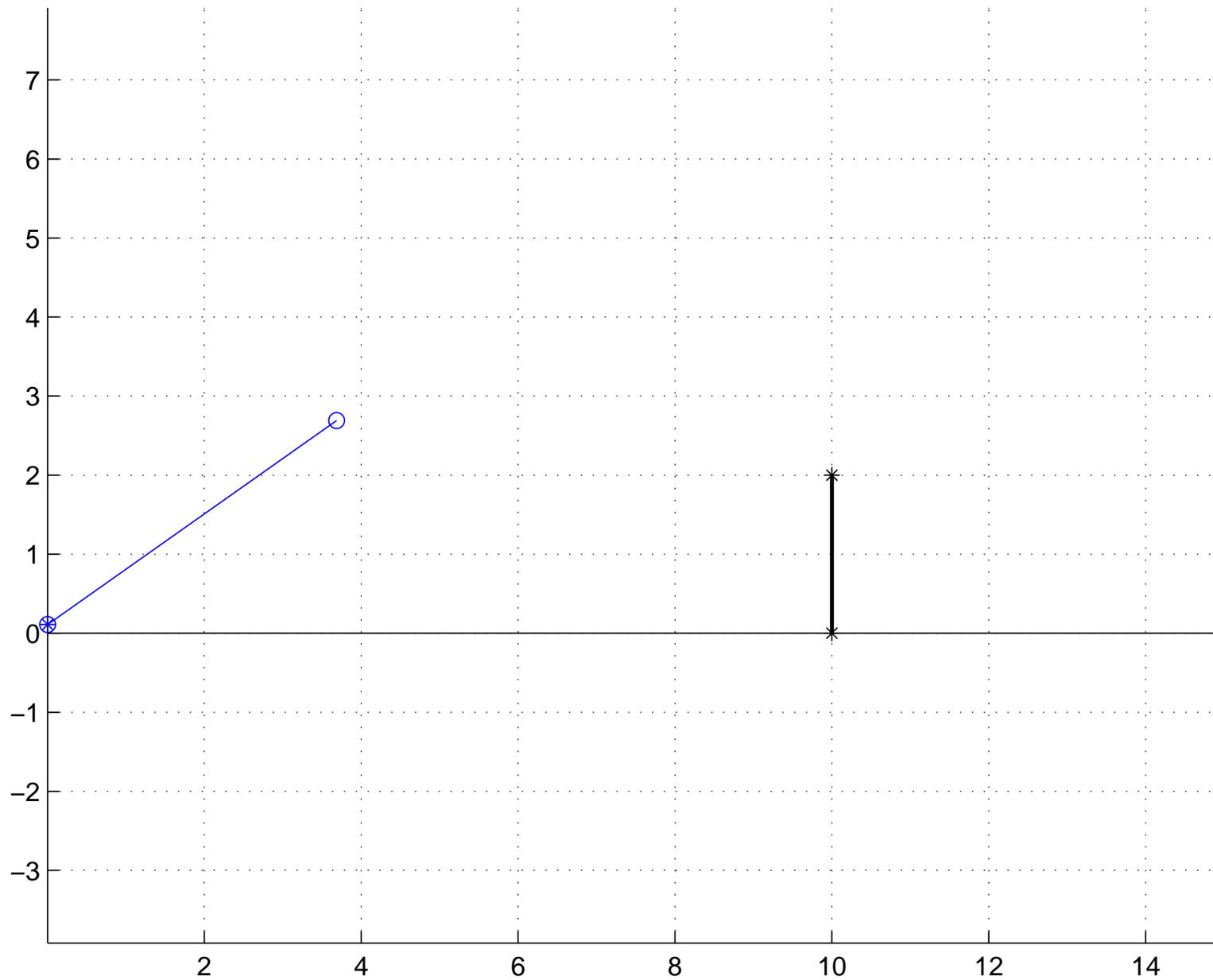
3. Que l'on ne sait exhiber !

4. Résultat qu'on ne peut montrer ...

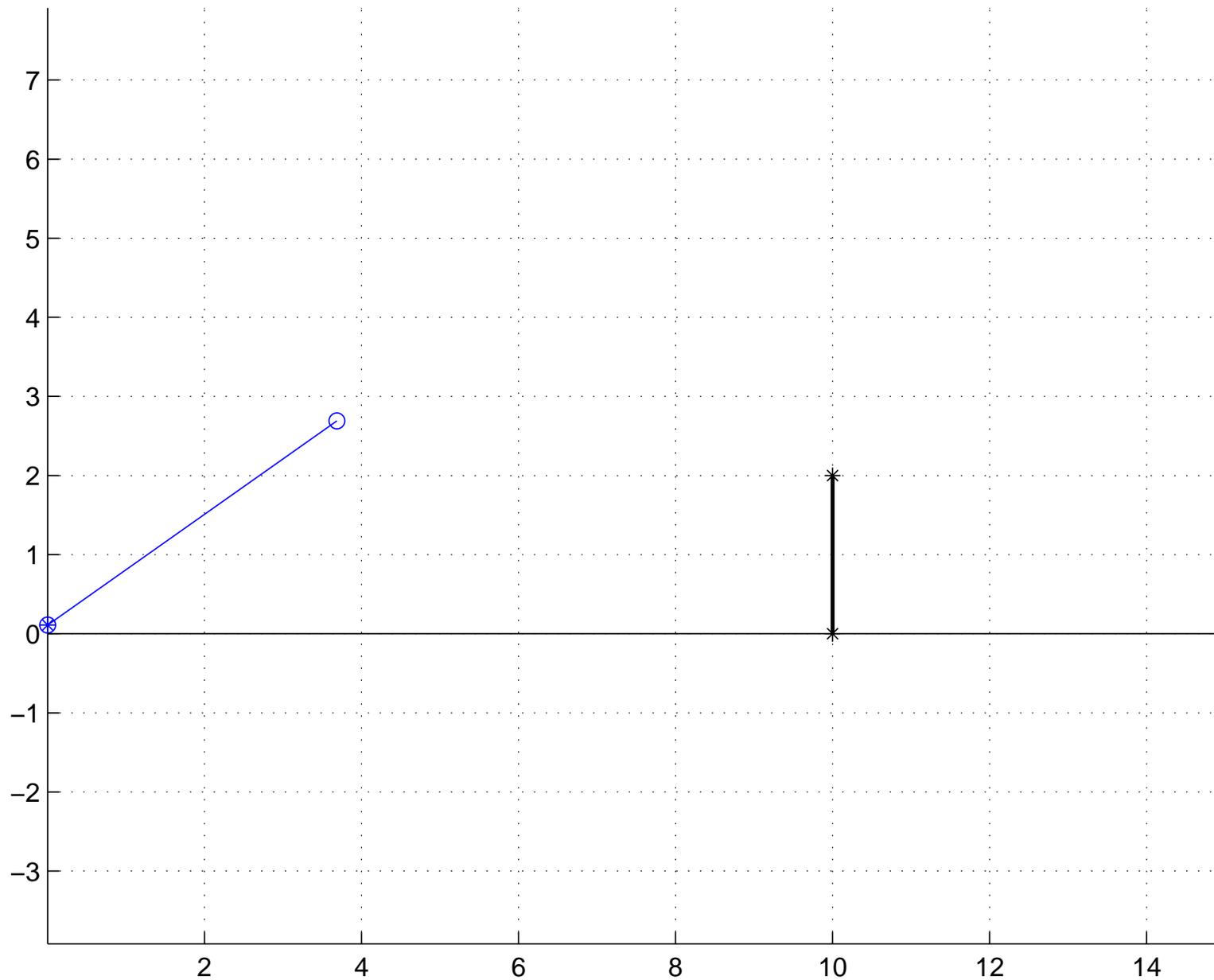
Dernière astuce, pour montrer que la parabole passe au dessus du mur et des buts, il suffit d'utiliser cette méthode en ne traçant que les points correspondant au mur et à la cage de but. Voir la figure G.24.

G.5. Quelques patrons

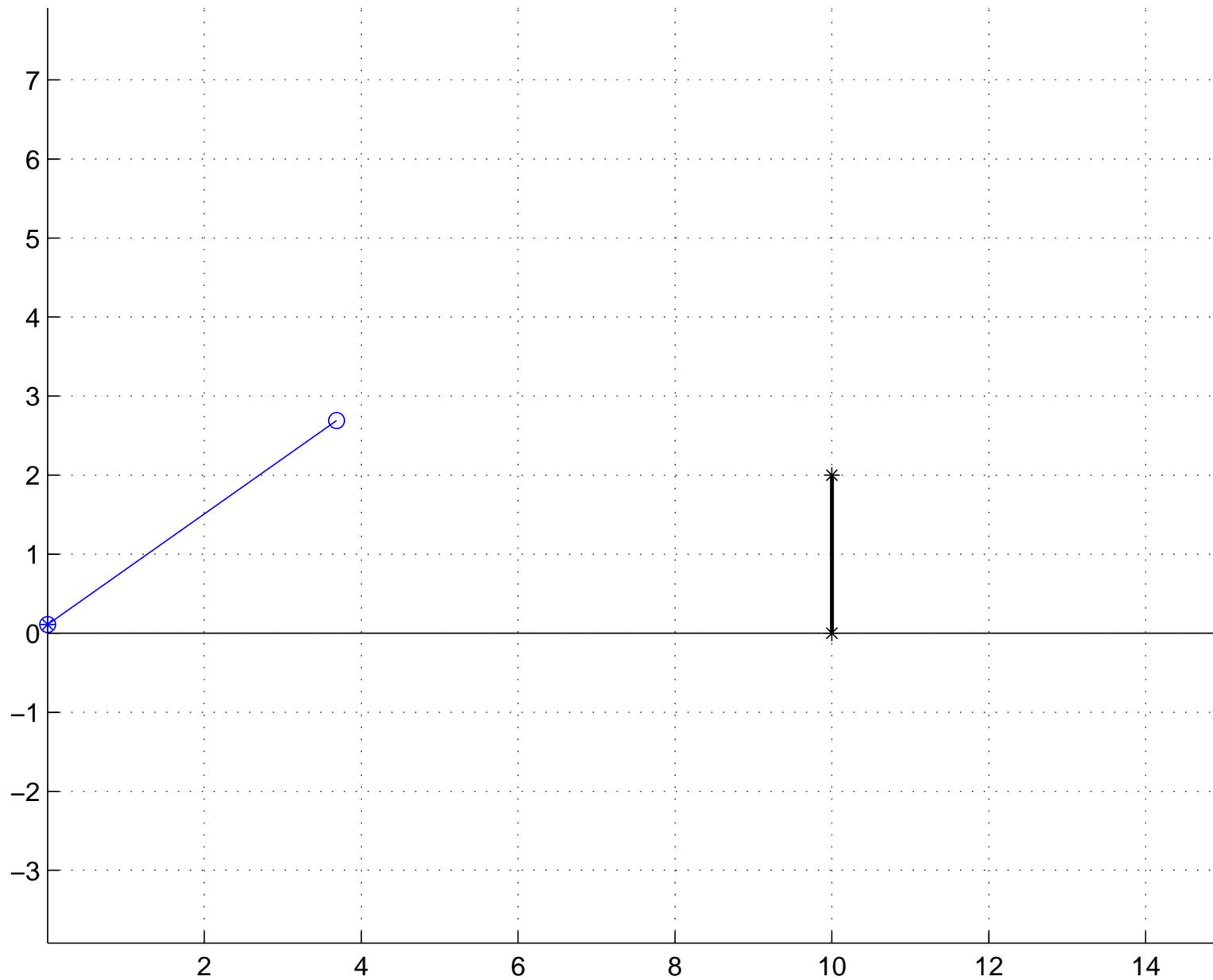
Dessin de la parabole de la chute libre



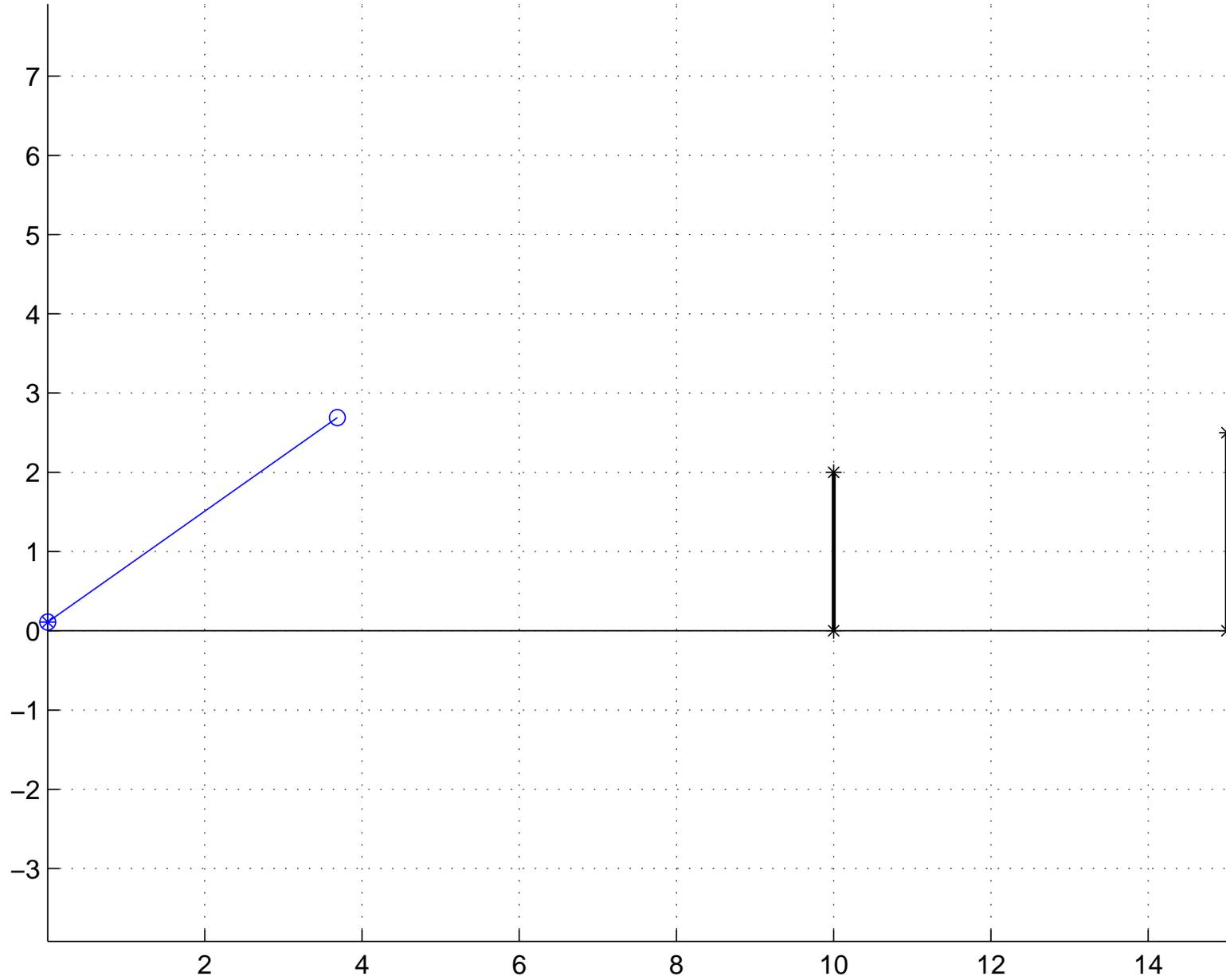
Dessin de la parabole de la chute libre



Dessin de la parabole de la chute libre



Dessin de la parabole de la chute libre



G.6. Ensemble des courbes tracées

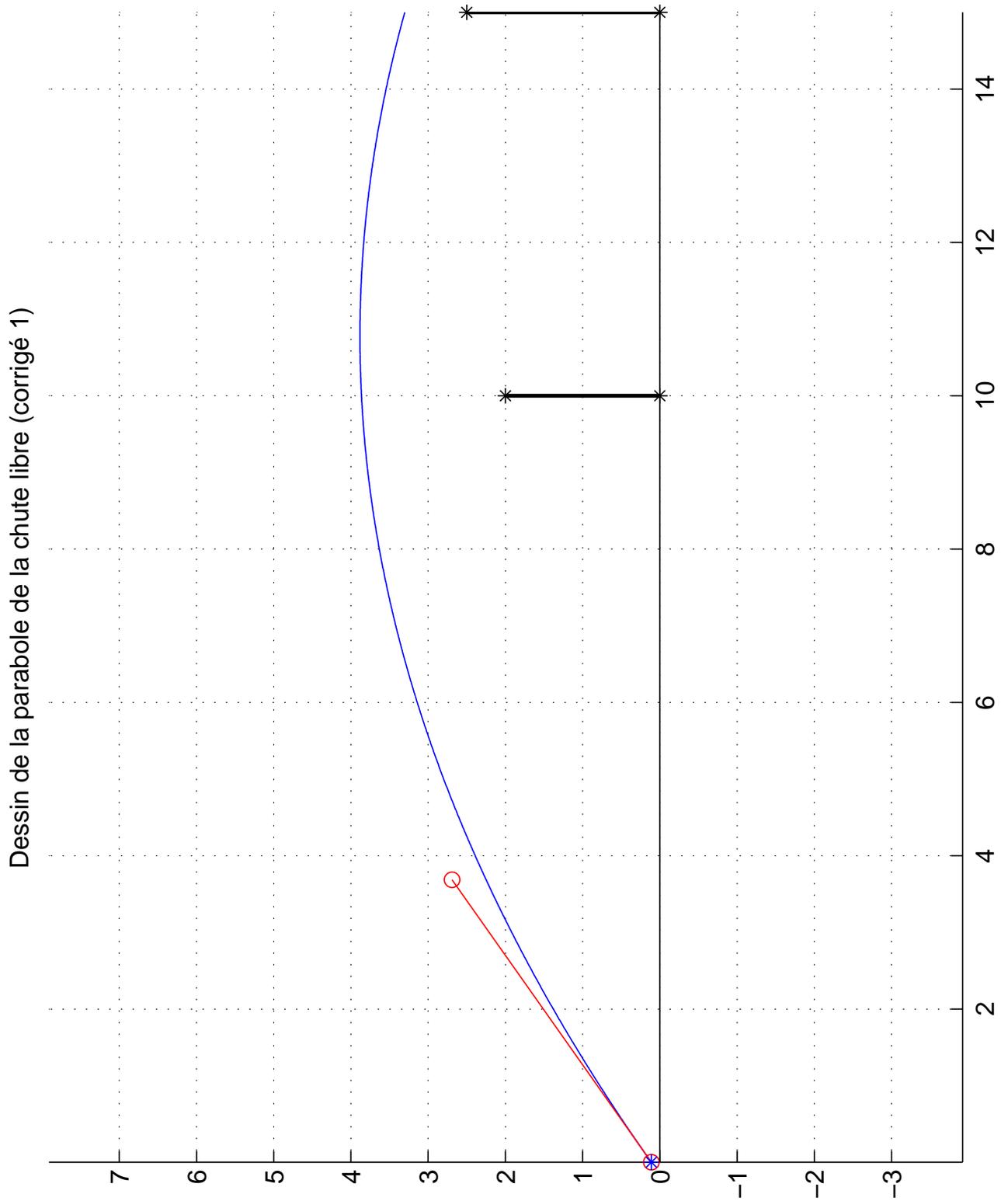


FIGURE G.19. La parabole.

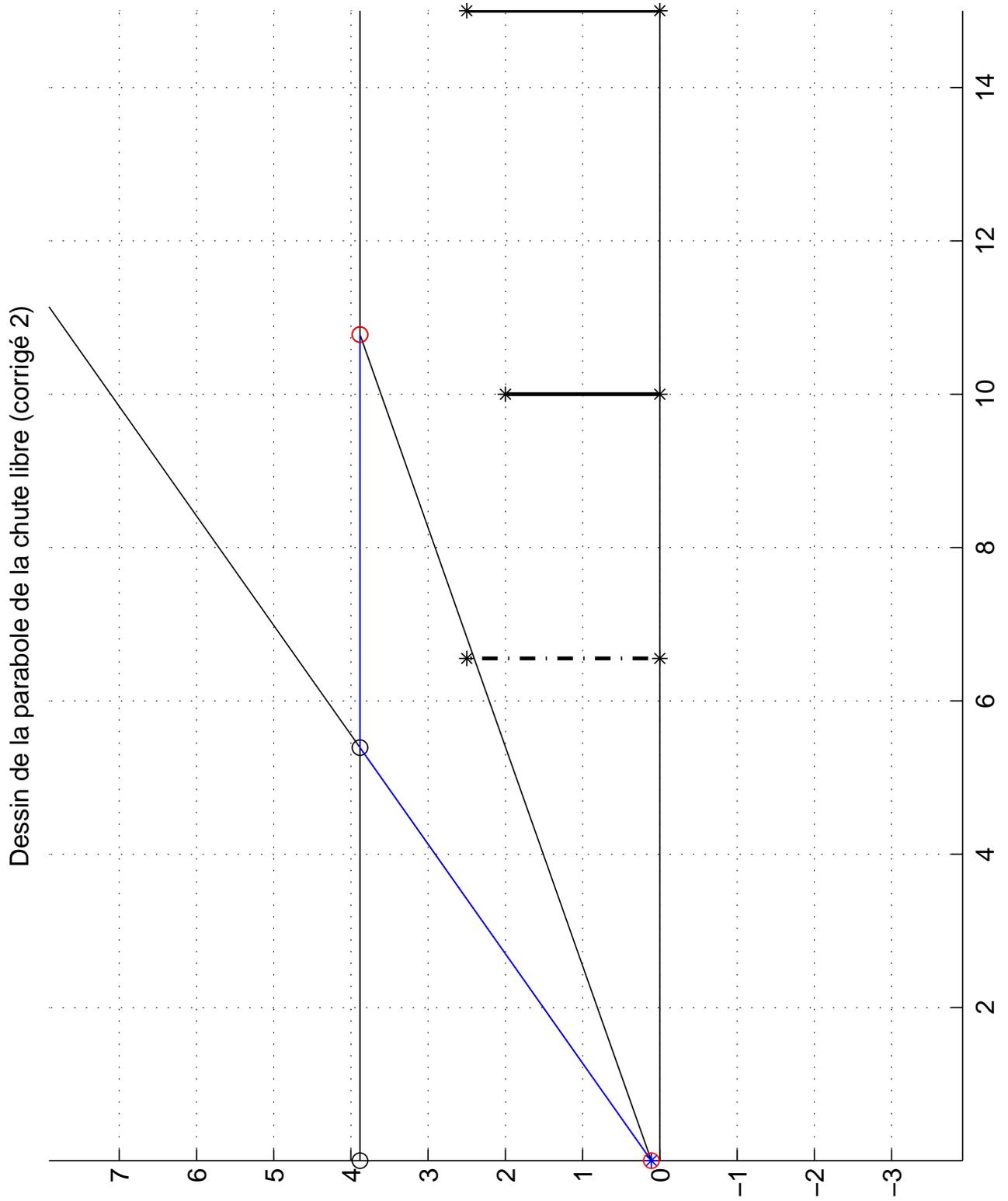


FIGURE G.20. La construction du sommet de la parabole et la réponse minimaliste au problème posé.

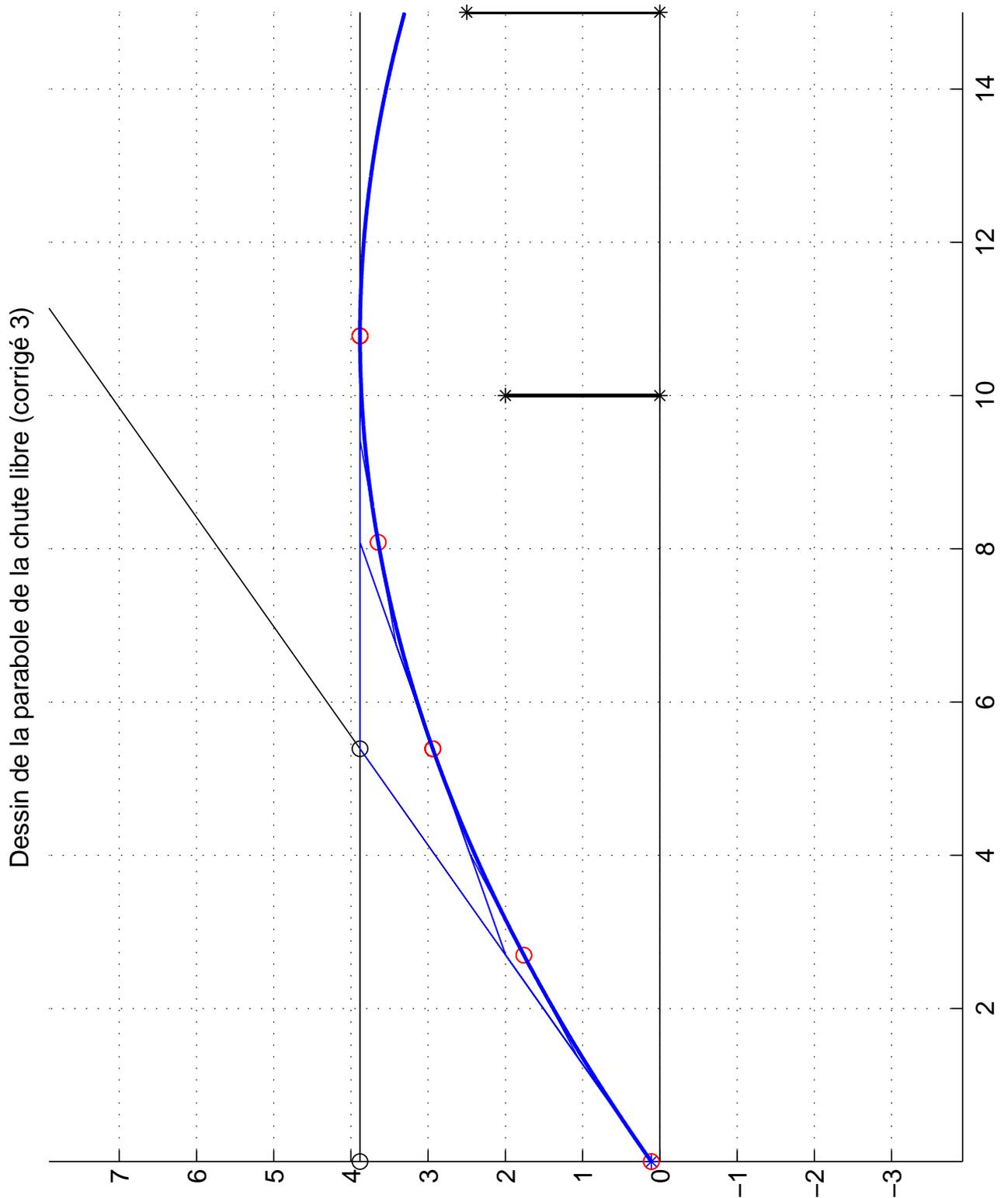


FIGURE G.21. La méthode des deux tangentes.

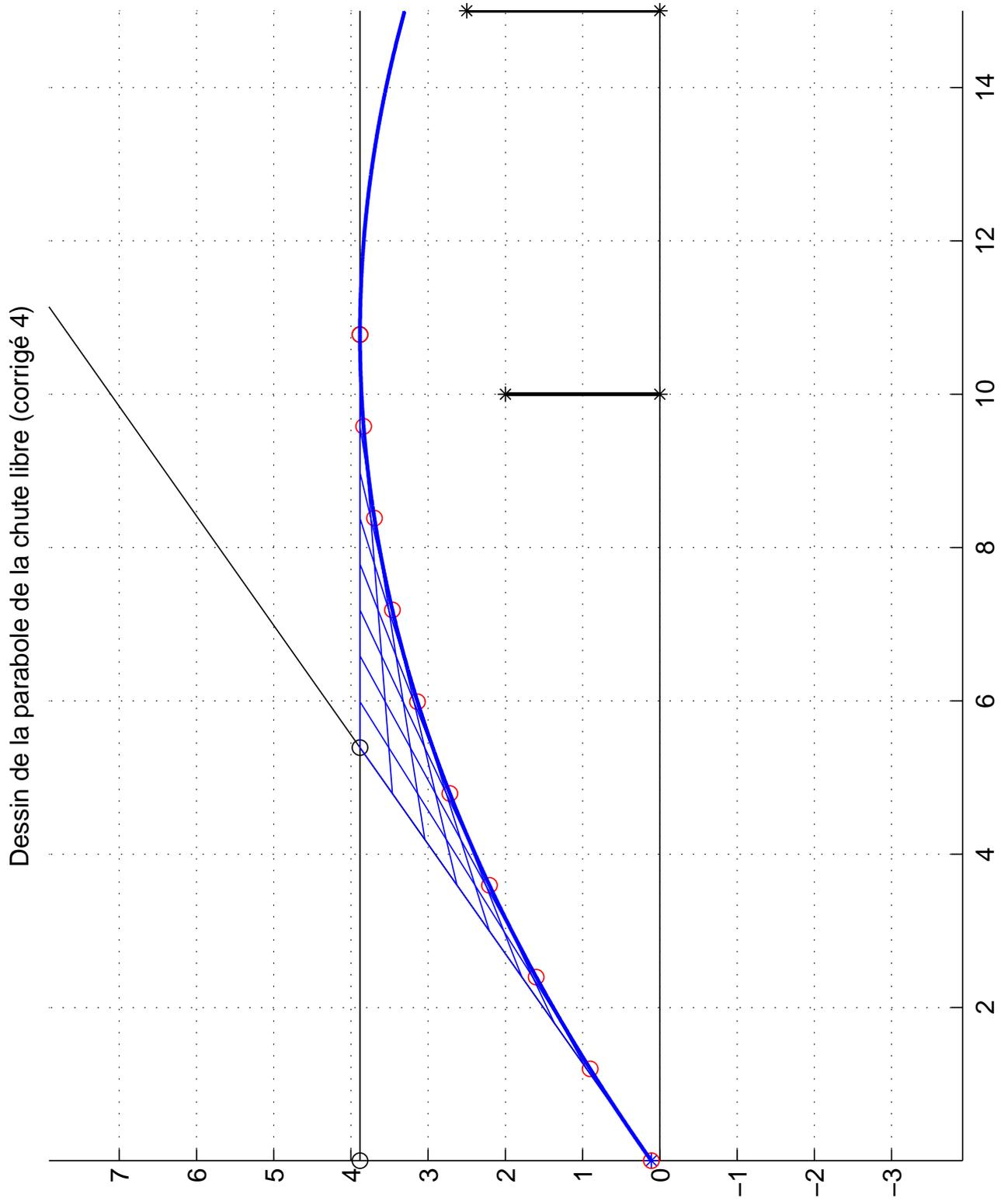


FIGURE G.22. La méthode de De Casteljau (ou des « fils tendus »).

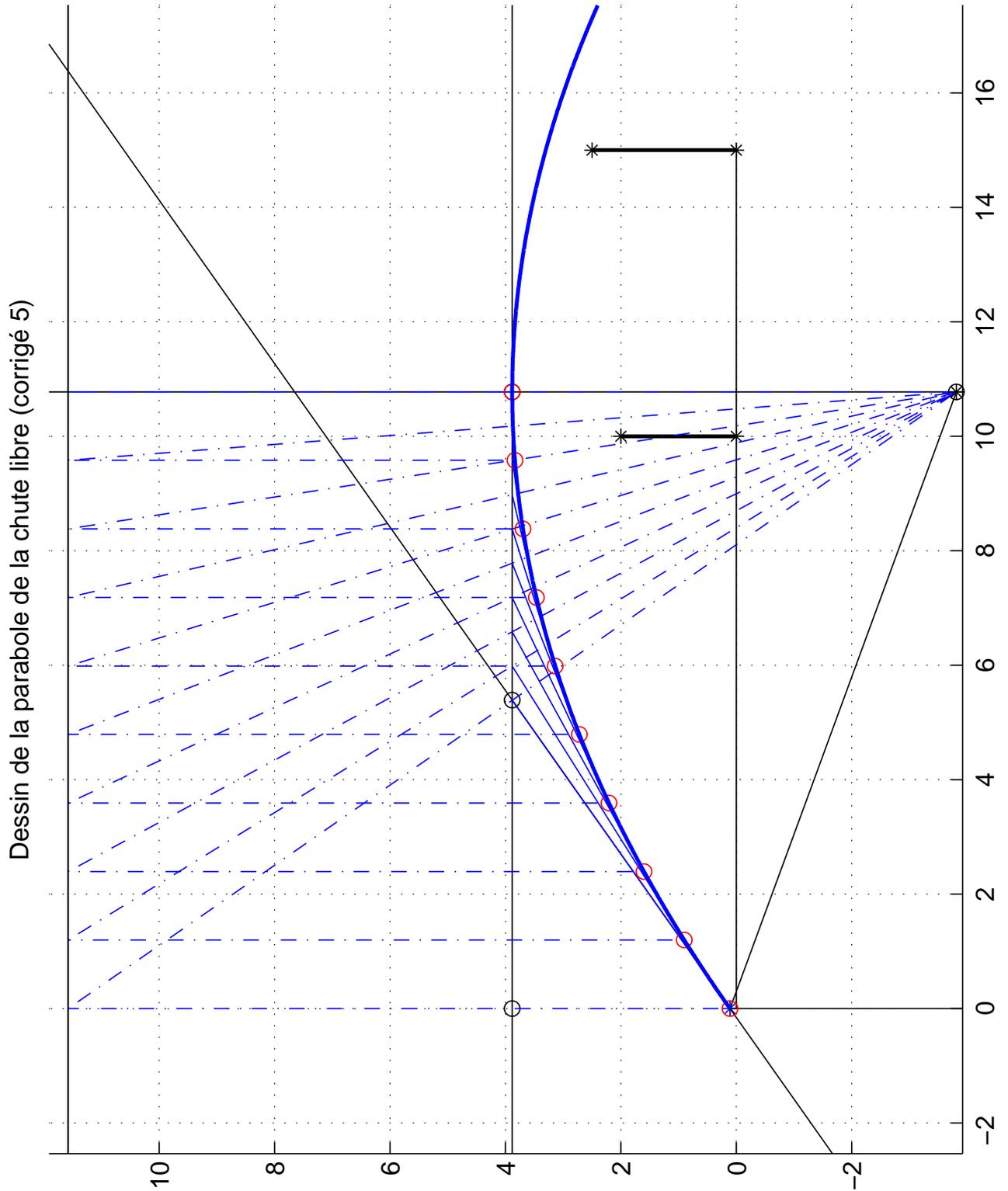


FIGURE G.23. La construction point par point à partir du foyer et de la directrice.

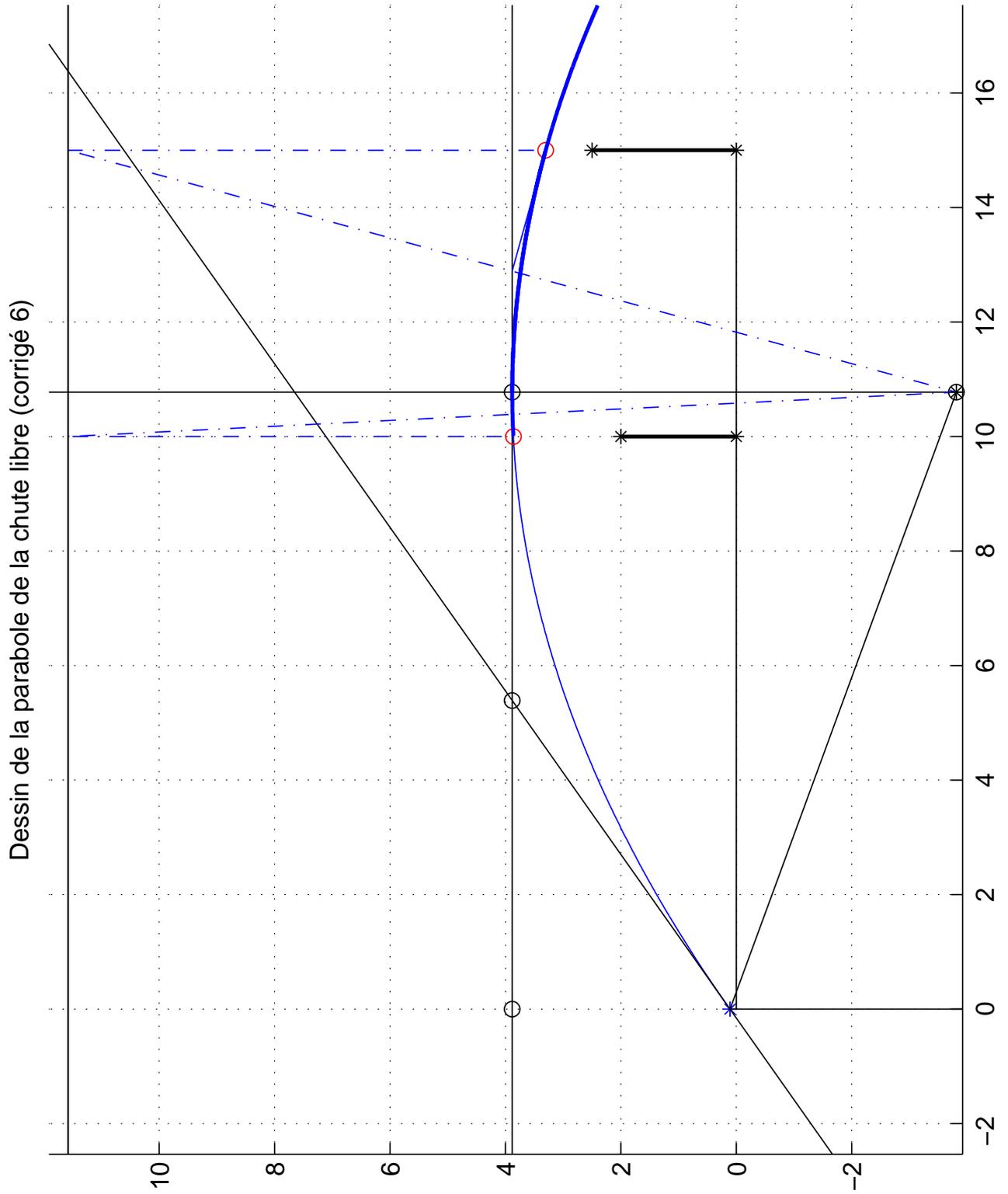


FIGURE G.24. La construction point par point à partir du foyer et de la directrice, en n'utilisant que les points correspondant au mur et à la cage de but.

Écart entre la parabole et son approximation polygonale

L'objet de cette annexe est de montrer comment les constructions successives de lignes polygonales données dans l'annexe G (sections G.3.1 et G.3.2) permettent d'approcher de façon de plus en plus précise la parabole de la chute libre. On y montrera notamment l'établissement de la majoration (G.14).

On étudie la parabole de la chute libre, correspondant à la trajectoire d'un point ayant une position initiale M_0 et une vitesse initiale \vec{v}_0 faisant un angle α avec l'horizontale. Nous proposons deux mesures d'écart entre la parabole et son approximation polygonale.

H.1. Méthode des deux tangentes

H.1.1. Première approximation

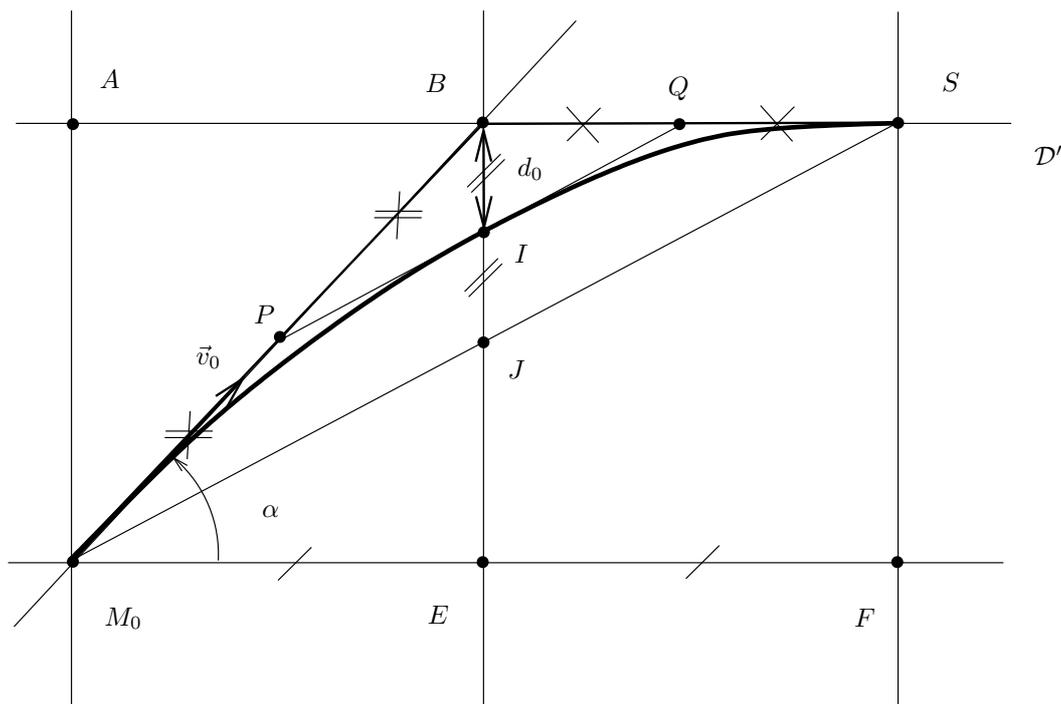


FIGURE H.1. L'écart d_0 entre la parabole de la chute libre (définie par la position initiale M_0 et la vitesse initiale \vec{v}_0) et la ligne polygonale (M_0BS).

Sur la figure H.1, on a tracé la parabole ainsi que la tangente à l'origine (M_0B) et la tangente au sommet \mathcal{D}' . Cette figure correspond au cas où α_0 appartient à $]0, \pi/2[$, mais les formules établies sont vraies pour toute valeur de α (sauf égales à un multiple de $\pi/2$). La ligne polygonale (M_0BS) constitue donc la première approximation de la parabole pour l'itération $n = 0$ du procédé de construction. Une façon de déterminer l'écart

entre la parabole et (M_0BS) est de considérer la différence d'ordonnée entre deux points de même abscisse, l'un appartenant à la parabole et l'autre à (M_0BS) et d'en prendre la valeur maximale, notée d_0 quand ce point décrit (M_0BS) . Ensuite, pour chaque itération de la méthode de la proposition G.7, on considère l'écart noté d_n , au bout de n itérations.

REMARQUE H.1. Notons que la parabole est nécessairement incluse dans le polygone $PQSM_0$. Soit parce qu'une courbe de Bézier se trouve dans le polygone de contrôle [HM13], soit parce que la parabole est au dessus de sa tangente et sous sa corde. Cela demeure vrai à toutes les itérations.

◇

PROPOSITION H.2. *On a*

$$d_n = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{8g} \frac{1}{4^n}. \quad (\text{H.1})$$

Nous donnons deux preuves de ce résultat.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DE LA PROPOSITION H.2. Posons

$$\mathcal{A} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{8g}, \quad (\text{H.2})$$

et montrons que

$$d_0 = \mathcal{A}. \quad (\text{H.3})$$

On admet que la maximum de la différence d'ordonnée entre deux points de même abscisse, l'un appartenant à la parabole et l'autre à (M_0BS) correspond au point de même abscisse que B (voir figure H.1). La preuve sera donnée rigoureusement dans la seconde preuve, page 161. P et Q désignant les milieux respectifs de $[M_0B]$ et de $[M_0S]$, le milieu I de $[PQ]$ est, d'après la proposition G.7, sur la parabole. On a donc $d_0 = BI$. D'après le théorème de la droite des milieux, (BI) est bien une droite verticale et I est aussi le milieu de $[BJ]$ où $J = (BE) \cap (M_0S)$ et donc $d_0 = BJ/2$. Par ailleurs, puisque \mathcal{D}' est la tangente au sommet de la parabole, on sait d'après la proposition G.5 que B est le milieu de $[AS]$. Le point J est donc l'intersection des diagonales du rectangle $ASFM_0$ et donc $d_0 = BJ/2 = SF/4$. Enfin, d'après (G.9), on a donc $d_0 = (\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g})/4$ et (H.3) est vraie, c'est-à-dire que (H.1) est vraie pour $n = 0$.

Faisons maintenant un raisonnement par récurrence sur n pour montrer (H.1). L'initialisation vient d'être faite. Passons de n à $n + 1$. À l'étape 0, aucun point n'est construit et la ligne polygonale est formée de 3 points ; à l'étape 1, un point est construit est ligne polygonale est formée de $5 = 2^1 + 1$ points. Ainsi, chaque étape n , on a une ligne polygonale formée de $2^n + 1$ points.

Considérons une portion de la parabole à l'étape n , pour laquelle la ligne polygonale est localement représentée par (MPM') , comme le montre la figure H.2. Notons d l'écart entre la portion de parabole étudiée et (MPM') , dont on admet encore que le maximum est atteint au point d'abscisse celle de B . On suppose que (PA) est une droite verticale. On construit localement la ligne polygonale $(MNAN'M')$ en utilisant la proposition G.7, comme le montre la figure H.2. Notons d' , l'écart entre la portion de parabole étudiée et $(MNAN'M')$, dont on admet qu'il est atteint aux abscisses correspondant à C et D . En utilisant de nouveau, le théorème de la droite des milieux et la construction de la proposition G.7, on montre, dans le triangle MNA que $d' = NQ/2$ puis dans le triangle MAP que $NQ = PA/2$ et donc que $d' = PA/4 = d/4$. Notons aussi que cela implique aussi que la droite (NQ) est parallèle à (PA) , donc verticale. De la même façon, de l'autre coté, on démontre bien que l'on retrouve aussi $d' = d/4$. Bref, si (H.1) a lieu, on a donc

$$d' = \frac{d}{4} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{8g} \frac{1}{4^{n+1}}.$$

Ce raisonnement peut être fait pour toutes les portions de parabole et on a donc montré que

$$d_{n+1} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{8g} \frac{1}{4^{n+1}},$$

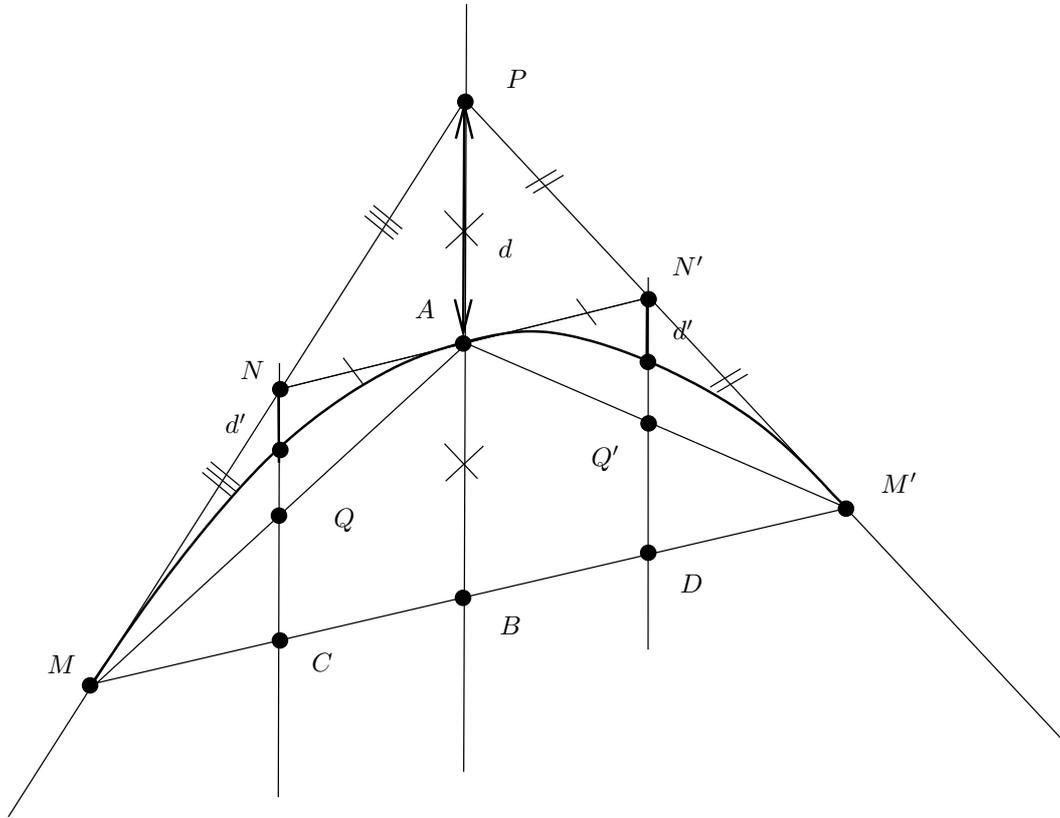


FIGURE H.2. L'écart d entre la parabole et la ligne polygonale (MPM') et l'écart d' entre la parabole et la ligne polygonale $(MNAN'M')$.

ce qui est (H.1) au rang $n + 1$. □

Ce raisonnement est purement géométrique, proche de l'esprit de la proposition G.7, et aurait pu être connu des Grecs, à condition, par exemple de remplacer (H.1) par

$$d_n = \frac{SF}{4^{n+1}}, \tag{H.4}$$

où SF est connu géométriquement. Procédons maintenant de façon analytique et montrons rigoureusement ce qui a été admis dans la preuve H.1.1.

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE DE LA PROPOSITION H.2. Si p est une fonction polynomiale de degré 2, la formule de Taylor-Lagrange écrite en x_0 fournit

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 p''(\xi), \tag{H.5}$$

où $p''(\xi)$ est constant. On a donc

$$|p(x) - (p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0))| = |a|(x - x_0)^2$$

où a est le coefficient dominant de p . Cette égalité fournit donc l'écart entre la tangente à la courbe d'équation $y = p(x)$, au point d'abscisse x_0 , pour tout x . Notons-le $\varepsilon(x)$. Dans le cas de la chute libre, p est donnée par

(G.8), à une constante additive près et donc

$$|a| = \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (\text{H.6})$$

On se réfère à la figure H.1 page 159. On applique cette formule pour x_0 égale à l'abscisse x_0 de l'origine M_0 de la parabole. On a donc

$$\varepsilon(x) = |a|(x - x_0)^2 \quad (\text{H.7})$$

Si x décrit $[x_0, x_0 + M_0E]$, cette grandeur est donc maximal pour $x = x_E$ et ce maximum vaut donc $|a|M_0E^2$. Or, par symétrie et en utilisant la proposition G.7, M_0E est le quart de la portée L donnée par (F.3). Bref, ce maximum vaut :

$$\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \times \left(\frac{1}{4} \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{8g}$$

et donc

$$\max_{x \in [x_0, x_0 + M_0E]} \varepsilon(x) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{8g}.$$

Si on fait le même raisonnement pour comparer l'écart entre la tangente au sommet et la parabole sur la partie $[EF]$, on arrive par symétrie à la même valeur. Ainsi, on a montré que

$$d_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{8g},$$

ce qui est exactement le même résultat que (H.3). On a en même temps montré que la différence d'ordonnée entre deux points de même abscisse, l'un appartenant à la parabole et l'autre à (M_0BS) correspond au point de même abscisse que B .

Pour montrer maintenant (H.1), il suffit de refaire le même raisonnement, sauf qu'au lieu d'évaluer par exemple (H.7), non pas en $x = L/4$ mais en $x = (L/2)^n$. En effet, à chaque étape, la parabole est étudiée sur un intervalle dont la largeur est divisée par 2. Élevé au carré, le coefficient en $1/2^n$ devient en $1/4^n$, ce qui achève la preuve. \square

EXEMPLE H.3. Si on applique cela aux données de l'exemple de la section G.4.2 page 139, on obtient un écart donné par

$$0.05895 \text{ m} \quad (\text{H.8})$$

ce qui est un plus grand que (G.14), mais du même ordre de grandeur. En effet, cette estimation a été menée de façon légèrement différente à partir de la méthode que nous voyons maintenant.

H.1.2. Seconde approximation

Une autre façon de procéder est de considérer que l'écart entre la parabole et la ligne polygonale (OBS) est donné par la longueur h , représentée sur la figure H.3, où (BI) est perpendiculaire à (OS) . Cette figure est l'analogue de la figure H.1. L'avantage de mesurer l'écart avec h est de ne pas privilégier la direction verticale et la distance d comme dans le cas de la figure H.1. Si cette distance est très petite, la parabole, incluse dans le polygone PQS_0 , sera confondue avec la droite (PQ) .

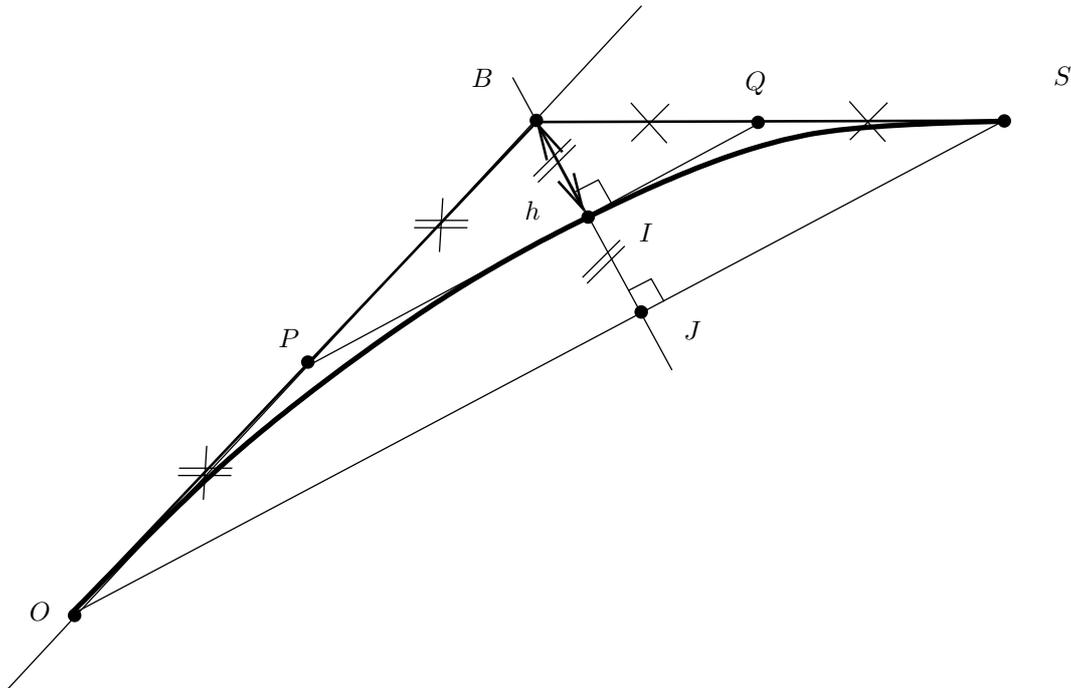
REMARQUE H.4. En effet, la remarque H.1 est ici encore valable.

◇ La distance h sera calculée très facilement en fonction du triangle OBS puisque sa hauteur H vaut $2h$ et que son aire \mathcal{S} vérifie

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} H \cdot OS = hOS = \left\| \overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{BS} \right\|,$$

dont on déduit h

$$h = \frac{\left\| \overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{BS} \right\|}{OS}.$$

FIGURE H.3. L'écart h entre la parabole et la ligne polygonale (OBS).

Ce calcul peut être fait, triangle par triangle, pour la n -ième itération et on en déduit l'expression de \tilde{d}_n , l'erreur correspondante. Un peu de géométrie nous montre que

$$\tilde{d}_n \leq d_n. \quad (\text{H.9})$$

H.2. Méthode de De Casteljaou

Cette partie n'a pas encore été programmée ni rédigée.

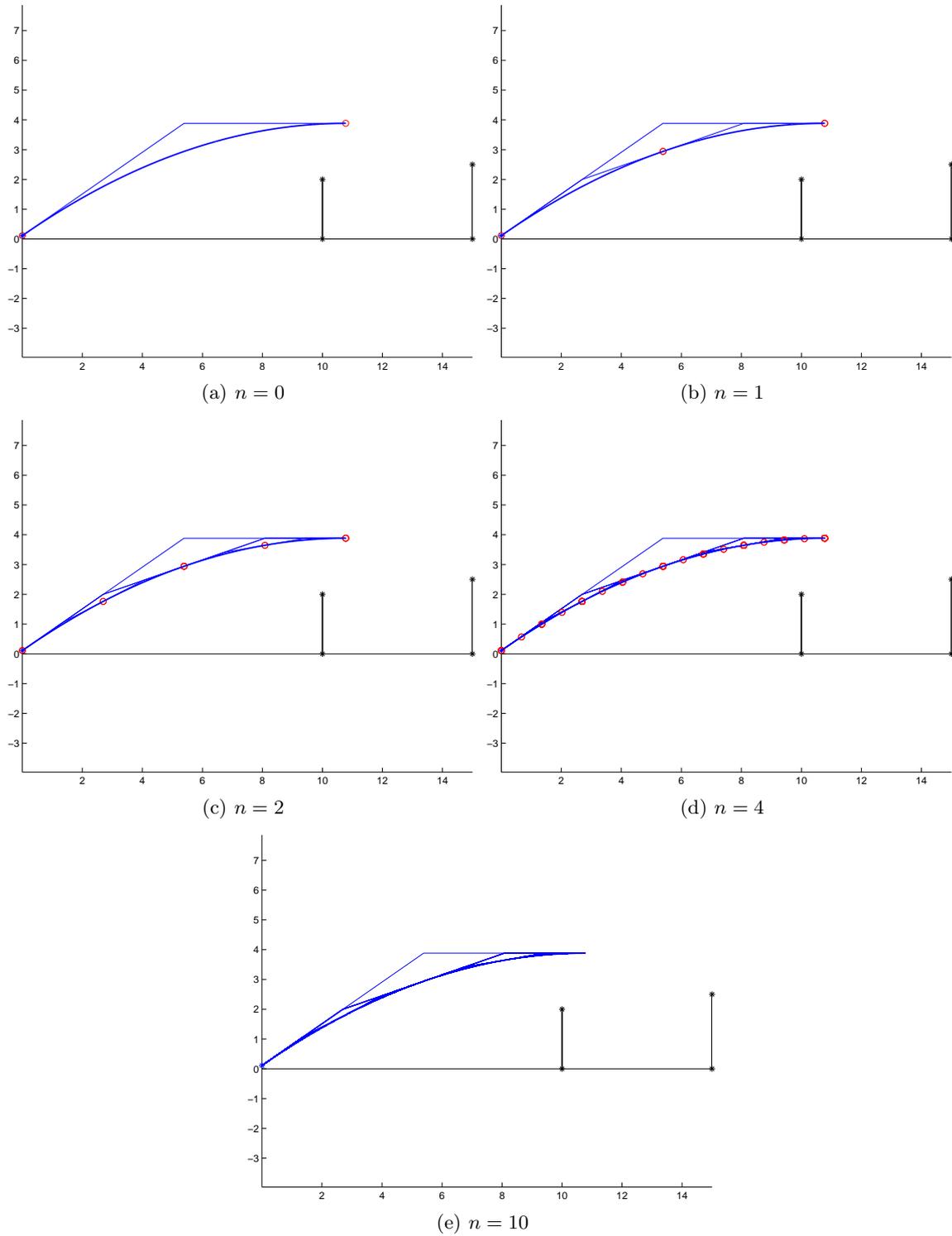
H.3. Calculs numériques

Reprenons l'exemple de la section G.4 page 136 et calculons différentes valeurs des erreurs d_n et \tilde{d}_n .

Voir les résultats dans le tableau H.1. Dans ce tableau, p_n désigne le nombre de points constituant la ligne polygonale approchée construits à chaque itération. On constate bien que les deux erreurs d_n et \tilde{d}_n tendent vers zéro quand n augmente, en respectant (H.9). De plus, la dernière colonne contient les valeurs de $d_n/\tilde{d}_n - 1$ qui semblent tendre vers zéro quand n augmente, ce qui signifie que

$$\tilde{d}_n \approx d_n,$$

résultat qu'il serait intéressant de montrer.

FIGURE H.4. Différentes simulations de la méthodes des deux tangentes pour n variant.

n	p_n	d_n	\tilde{d}_n	$d_n/\tilde{d}_n - 1$
0	2	$9.432050 \cdot 10^{-1}$	$8.902231 \cdot 10^{-1}$	$5.951528 \cdot 10^{-2}$
1	3	$2.358013 \cdot 10^{-1}$	$2.322693 \cdot 10^{-1}$	$1.520597 \cdot 10^{-2}$
2	5	$5.895031 \cdot 10^{-2}$	$5.872580 \cdot 10^{-2}$	$3.823087 \cdot 10^{-3}$
3	9	$1.473757 \cdot 10^{-2}$	$1.472348 \cdot 10^{-2}$	$9.571407 \cdot 10^{-4}$
4	17	$3.684394 \cdot 10^{-3}$	$3.683513 \cdot 10^{-3}$	$2.393711 \cdot 10^{-4}$
5	33	$9.210986 \cdot 10^{-4}$	$9.210435 \cdot 10^{-4}$	$5.984814 \cdot 10^{-5}$
6	65	$2.302747 \cdot 10^{-4}$	$2.302712 \cdot 10^{-4}$	$1.496237 \cdot 10^{-5}$
7	129	$5.756866 \cdot 10^{-5}$	$5.756845 \cdot 10^{-5}$	$3.740613 \cdot 10^{-6}$
8	257	$1.439216 \cdot 10^{-5}$	$1.439214 \cdot 10^{-5}$	$9.351563 \cdot 10^{-7}$
9	513	$3.598042 \cdot 10^{-6}$	$3.598040 \cdot 10^{-6}$	$2.337828 \cdot 10^{-7}$
10	1025	$8.995105 \cdot 10^{-7}$	$8.995103 \cdot 10^{-7}$	$5.847186 \cdot 10^{-8}$

TABLE H.1. Écarts calculés entre la parabole et son approximation polygonale au bout de n itérations

Parabole de sûreté

Nous donnons dans cette annexe l'étude de la parabole de sécurité qui définit l'ensemble des points du plan que l'on peut atteindre avec la parabole de la chute libre, définie par une position initiale en O , un vecteur vitesse de norme v_0 et d'angle avec l'horizontale α , sous la forme d'un problème corrigé.

Énoncé

On considère un corps qui n'est soumis qu'à son propre poids. La position initiale du centre de gravité de ce corps est l'origine et la vitesse initiale est le vecteur vitesse de norme v_0 et d'angle avec l'horizontale α . Les équations de la chute libre sont données par (8.16), page 30 si $v_0 \cos \alpha$ est non nul, par (8.11e)-(8.11f) si $\alpha = \varepsilon \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $\varepsilon = \pm 1$ est k est un entier et par (8.13e)-(8.13f) si $v_0 = 0$.

À v_0 fixé, on cherche l'ensemble des points atteints par une parabole c'est-à-dire, l'ensemble des points (X, Y) du plan tel qu'il existe une courbe définie par α et par (8.16), (8.11e)-(8.11f) ou (8.13e)-(8.13f) passant par (X, Y) .

- (1) (a) Montrer que, dans le cas $v_0 \cos \alpha$ non nul, il existe une parabole \mathcal{P} , dite de sûreté vérifiant la propriété suivante :
 - Si M est strictement en-dessous de cette parabole, il existe deux valeurs de α définissant la parabole passant par ce point (on parle de tir tendu et de tir en cloche) ;
 - Si M est sur cette parabole, il existe une unique valeur de α définissant la parabole passant par ce point ;
 - Si M est strictement au-dessus de cette parabole, ce point n'est atteint par aucune parabole.
- (b) Étudier le cas $v_0 \cos \alpha$ nul.
- (c) Faire une figure schématique.
- (2) Montrer que l'équation de la parabole de sûreté peut se mettre sous la forme $Y = h - X^2/(4h)$, où $h = v_0^2/(2g)$ est la hauteur maximale atteinte.
- (3) Étudier ce qui se passe dans le cas de canons disposés dans une citadelle à une hauteur $a > 0$ au-dessus de la plaine. Quel est l'avantage des défenseurs sur les assaillants ?

Corrigé

On pourra consulter

http://fr.wikipedia.org/wiki/Parabole_de_sûreté

- (1) (a) Soit un point (X, Y) du plan. Cherchons α telle que la parabole définie par α passe par (X, Y) . On cherche donc α tel que

$$Y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} X^2 + \tan \alpha X. \quad (\text{I.1})$$

On se rappelle que

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha, \quad (\text{I.2})$$

et donc (I.1) est équivalent à

$$Y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) X^2 + \tan X,$$

soit en posant

$$\begin{aligned} \xi &= \tan \alpha, \\ Y &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} (1 + \xi^2) X^2 + \xi X, \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

et donc

$$-\frac{gX^2}{2v_0^2} \xi^2 + X\xi - Y - \frac{gX^2}{2v_0^2} = 0. \quad (\text{I.4})$$

C'est une équation du second degré en l'inconnue ξ , qui décrit \mathbb{R} , *a priori*. Il ne reste donc plus qu'à étudier le signe de son discriminant donné par Δ où

$$\Delta = X^2 - \frac{2gX^2}{v_0^2} \left(Y + \frac{gX^2}{2v_0^2} \right) = X^2 u(X, Y),$$

où

$$u(X, Y) = 1 - \frac{2gX^2}{v_0^2} \left(Y + \frac{gX^2}{2v_0^2} \right). \quad (\text{I.5})$$

On a donc

$$\Delta = X^2 u(X, Y). \quad (\text{I.6})$$

Bref, compte tenu de (I.6), on a donc les trois cas suivants :

(i) Il existe exactement deux racines racine réelles distinctes de (I.4) si et seulement si

$$X \neq 0, \quad (\text{I.7a})$$

et

$$u(X, Y) > 0. \quad (\text{I.7b})$$

(ii) Il existe exactement une seule racine réelle de (I.4) si et seulement si

$$X = 0, \quad (\text{I.8a})$$

ou

$$u(X, Y) = 0. \quad (\text{I.8b})$$

(iii) Il n'existe aucune racine réelle de (I.4) si et seulement si

$$u(X, Y) < 0. \quad (\text{I.9})$$

Le cas $X = 0$ est à mettre à part : (I.4) donne $Y = 0$ et toute parabole issue de l'origine passe par l'origine. On peut donc supposer, sans perte de généralité, pour la suite que X est non nul. La partition du plan est donc déterminée par le signe de u , seulement. On remarque que $u = 0$ si et seulement si

$$Y = -\frac{g}{2v_0^2} X^2 + \frac{v_0^2}{2g}, \quad (\text{I.10})$$

qui est l'équation de la parabole \mathcal{C} de sûreté sur laquelle, on n'a qu'une seule solution en ξ . Si on est en dessous (resp. au dessus) de cette parabole, on alors $u > 0$ (resp. $u < 0$). Dans le cas où $u(X, Y) \geq 0$, ξ est donné comme racine de (I.4) par

$$\xi = \frac{-X \pm \sqrt{\Delta(x)}}{-\frac{2gX^2}{2v_0^2}} = -\frac{v_0^2}{gX^2} \left(-X \pm |X| \sqrt{u(X, Y)} \right),$$

soit, après simplification,

$$\xi = \frac{v_0^2}{gX} \left(1 \pm \text{signe}(X) \sqrt{u(X, Y)} \right). \quad (\text{I.11})$$

On en déduit la valeur de α grâce à (I.3). La parabole de sûreté étant symétrique par rapport à l'axe y , on peut supposer, sans perte de généralité, que α appartient à $] -\pi/2, \pi/2[$. Les valeurs de α dont donc données par

$$\alpha = \arctan \left[\frac{v_0^2}{gX} \left(1 \pm \text{signe}(X) \sqrt{u(X, Y)} \right) \right], \quad (\text{I.12})$$

réduite à une seule valeur si $u = 0$ et correspondant à deux valeurs distinctes si $u > 0$. Dans ce dernier cas, on parle donc de tir tendu ou en cloche.

(b) Si $v_0 \cos \alpha$ nul, on a deux cas :

- (i) Dans le cas, (8.11e)-(8.11f), l'ensemble des points est une demi-droite d'équation $X = 0$ et $Y \leq v_0^2/(2g)$ ou $Y \leq 0$.
- (ii) Dans le cas (8.13e)-(8.13f), l'ensemble des points est une demi-droite d'équation $X = 0$ et $Y \leq 0$.

C'est donc l'ensemble des points couvrant le cas manquant correspondant au cas $X = 0$ du premier cas.

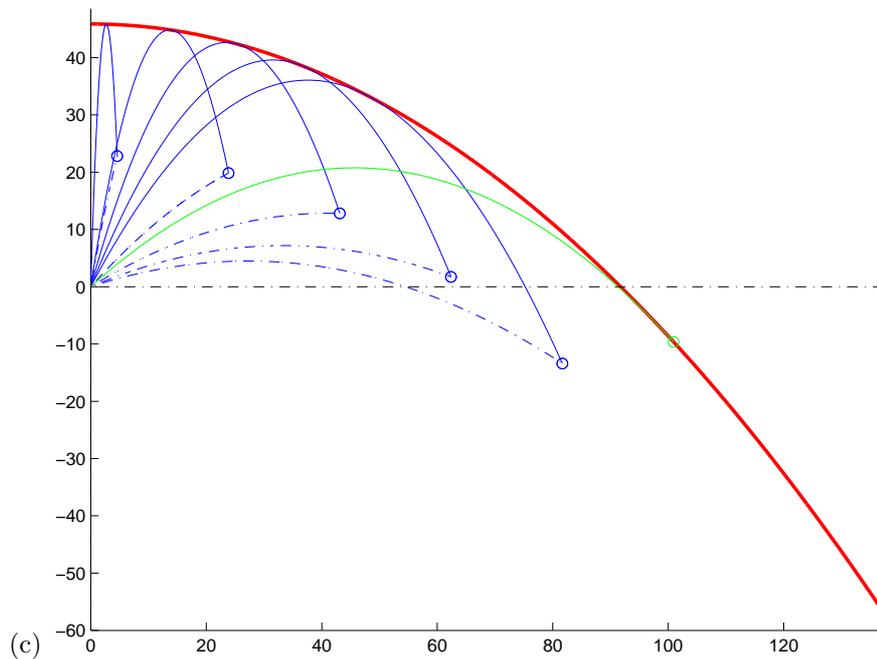


FIGURE I.1. La parabole de sûreté.

On a représenté sur la figure I.1, la parabole de sûreté avec $v_0 = 30.0000$ et $g = 9.8100$. Elle a été représentée en rouge. Quelques paraboles sont représentées en bleu et une parabole a été tracé en vert, correspondant au cas limite où la cible est sur la parabole de sûreté.

On a représenté sur la figure I.2 page suivante, la parabole de sûreté avec 30 paraboles de chute libre.

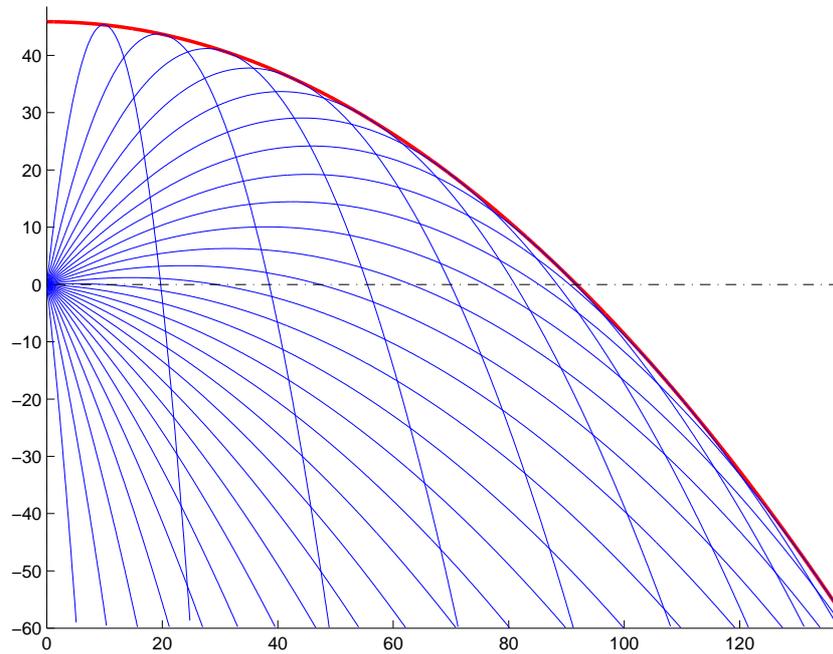


FIGURE I.2. La parabole de sûreté avec 30 paraboles de chute libre.

Il est intéressant de constater sur ces deux figures que toutes les paraboles de chute libre sont tangente à la parabole de sûreté. Une autre propriété intéressante est que toutes les paraboles de chute libre ont leur sommet sur une même ellipse.

La définition de la parabole par directrice foyer de l'annexe G pourrait être de nouveau utilisée ici. Voir

http://fr.wikipedia.org/wiki/Parabole_de_sûreté ◇

(2) Notons

$$h = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (\text{I.13})$$

Ainsi, l'équation (I.10) est équivalente à

$$Y = h - \frac{X^2}{4h}. \quad (\text{I.14})$$

Y est maximal quand X est nul ; dans ce cas, $Y = h$, qui est bien la hauteur maximale atteinte.

Réciproquement, notons que Y est nul si et seulement si $X = \pm 2h$; la portée maximale est donc donnée par

$$L = 2h. \quad (\text{I.15})$$

L'angle de tir est alors donné par $\frac{\pi}{4}$.

REMARQUE I.1. Comme mentionne l'url http://fr.wikipedia.org/wiki/Parabole_de_sûreté, il était plus élégant et rapide de faire les calculs de la question 1 comme suit : l'équation de la parabole de la chute libre est directement écrite sous la forme

$$Y = -\frac{X^2}{4h \cos^2 \alpha} + \tan \alpha X$$

où h est donnée par (I.13). C'est donc équivalent à

$$Y = -\frac{X^2}{4h} (1 + \tan^2 \alpha) + \tan \alpha X,$$

que l'on considère comme l'équation du second degré en $\xi = \tan \alpha$:

$$-\frac{X^2}{4h}\xi^2 + X\xi - \frac{X^2}{4h} - Y = 0$$

La parabole de sécurité est alors obtenue en annulant le discriminant de cette équation qui vaut :

$$\Delta = X^2 - \frac{X^2}{h} \left(\frac{X^2}{4h} + Y \right) = \frac{X^2}{h} \left(h - \frac{X^2}{4h} - Y \right)$$

dont la nullité fournit directement (I.14).

(3) La suite est extraite et adaptée de

http://fr.wikipedia.org/wiki/Parabole_de_sûreté

Un avantage de la citadelle est que ses canons se trouvent à une altitude $a = OA$ au-dessus de la plaine. Les boulets vont pouvoir atteindre un point P tel que $x = OP > 2h$. Plus précisément, x est tel que $z = -a = h - \frac{x^2}{4h}$, soit

$$x = 2\sqrt{h(h+a)}. \quad (\text{I.16})$$

Par le théorème de Pythagore, $AP = 2h + a$: la distance entre la citadelle A et le point P de portée maximale est donc la somme de l'altitude a avec la portée maximale $L = 2h$ lorsque le tir est effectué avec une altitude nulle. Ce résultat étonne souvent par sa simplicité. L'angle de tir est alors donné par

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{a}{a+2h} \quad (\text{I.17})$$

En effet, on est sur la parabole de sûreté avec $X = 2\sqrt{h(h+a)}$. Ainsi, α est donné par (I.12) avec $u = 0$:

$$\alpha = \arctan \left[\frac{v_0^2}{gX} \right] = \arctan \left[\frac{v_0^2}{2g\sqrt{h(h+a)}} \right] = \arctan \frac{2h}{2\sqrt{h(h+a)}},$$

soit

$$\alpha = \arctan \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+a}},$$

et donc, en supposant $\alpha \in [0, \pi/2]$ cela est équivalent à

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+a}}. \quad (\text{I.18})$$

Dans ce cas, en utilisant les formules classiques de la trigonométrie, il vient

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) &= \cos(2\alpha), \\ &= 2 \cos^2(\alpha) - 1, \\ &= \frac{2}{1 + \tan^2 \alpha} - 1, \\ &= \frac{2}{1 + \frac{h}{h+a}} - 1, \\ &= \frac{2h + 2a}{h + a + h} - 1, \\ &= \frac{2h + 2a}{2h + a} - 1, \\ &= \frac{2h + 2a - 2h + a}{2h + a}, \\ &= \frac{a}{2h + a}, \end{aligned}$$

et donc de nouveau, ceci est équivalent à

$$\frac{\pi}{2} - 2\alpha = \arcsin \frac{a}{2h + a}$$

soit exactement (I.17).

REMARQUE I.2. Si on se donne g et v_0 , on en déduit h grâce à (I.13) et donc l'angle optimal est complètement déterminé par a et (I.17).

Similairement, les assaillants devront se rapprocher (il suffit de changer a en $-a$). Ils se trouvent alors à la distance

$$x = 2\sqrt{h(h - a)}, \quad (\text{I.19})$$

qui n'est définie que si $h > a$ (dans le cas contraire, les assaillants n'ont aucune chance d'atteindre les canons!) et qui est plus petite que l'abscisse x définie par (I.16).

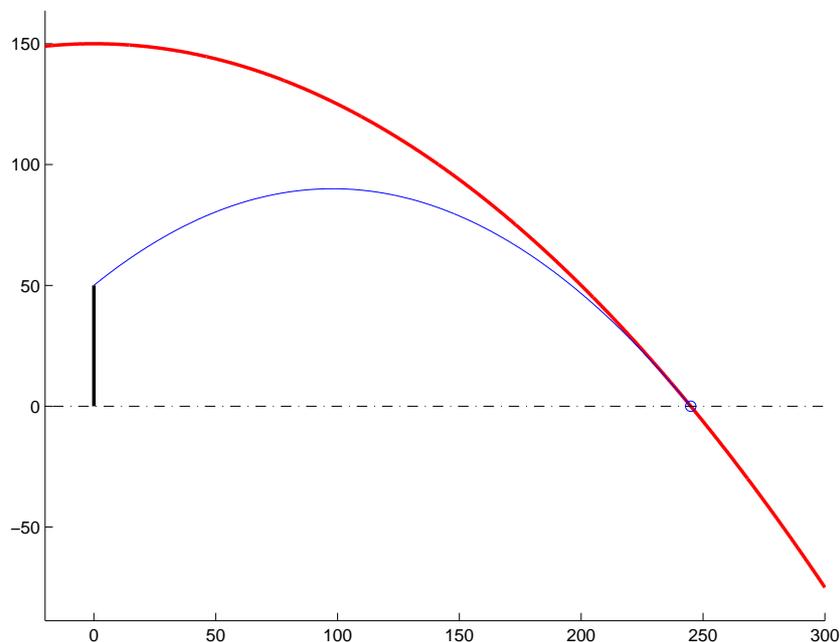


FIGURE I.3. La parabole de sûreté d'un canon situé sur une citadelle.

Par exemple, pour $h = 100$ m, la portée des canons est de 200 m. Une citadelle située à une altitude $a = 50$ m aura une portée $AP = 250$ m et pourront atteindre les assaillants situés à une distance 244.95 m du pied de la citadelle. L'angle α devra être égal à 39.23° . Inversement, les assaillants devront s'approcher à 141.42 m pour pouvoir atteindre la citadelle. Voir la figure I.3.

REMARQUE I.3. Les formules de la remarque I.2 peuvent être appliquées au domaine du sport! On cherche en effet à tirer le plus loin possible avec une vitesse v_0 donnée (qui est maximale) et ne peut être augmentée! g est aussi donné et, dans ce cas, l'angle α est totalement déterminé par la formule (I.17). Le cas $a = 0$ correspond au cas idéal où l'on tire au niveau du sol, ce qui n'est pas très pratique. Dans ce cas, (I.17) donne

$$\alpha = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{I.20})$$

On retrouve la formule (8.18) du cours! Si maintenant, on se donne $a > 0$, l'angle α est *a priori* plus faible que $\pi/4$.

- (a) Prenons par exemple l'épreuve du lancé de poids¹ avec $v_0 = 13.70$ m/s et une hauteur de lancer $a = 2.62$ m. On obtient une distance égale à $x = 21.59$ m et un angle $\alpha = 41.54^\circ$.
- (b) Si on considère le tirc à l'arc² avec de grandes vitesse par exemple $v_0 = 300.00$ km/h et $a = 1.60$ m. On obtient une distance égale à $x = 709.49$ m et un angle $\alpha = 44.94^\circ$, presque égal donc à l'angle théorique correspondant à $a = 0$, donné par (I.20) et retenu finalement pour ce sport pour sa simplicité. Cela vient du fait que a est négligeable par rapport à h et peut être considéré comme nul.
- (c)

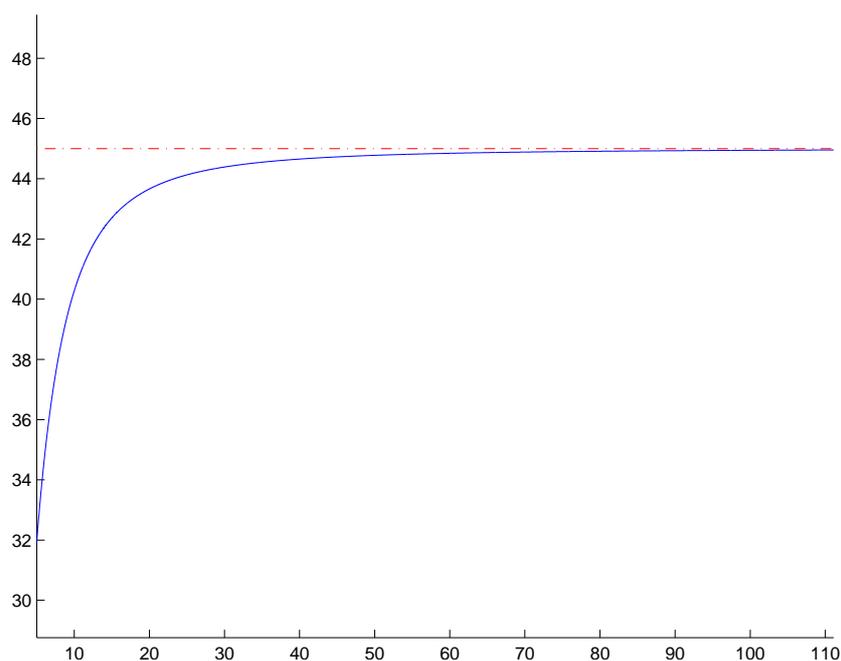


FIGURE I.4. La courbe $(v_0, \alpha(v_0))$ pour a fixé.

De façon plus générale, on peut aussi considérer un ensemble de valeurs de v_0 avec a fixé, à " hauteur d'homme " et tracer la courbe $\alpha(v_0)$. Par exemple, pour $a = 2.00$ m et v_0 variant dans $[5.00, 111.10]$, on obtient la courbe de la figure I.4, sur laquelle on constate que l'on atteint vite la valeur maximale théorique donnée par (I.20).

REMARQUE I.4. En fait, dans certains domaines sportifs, les frottements de l'air doivent être pris en compte. On pourra consulter le chapitre 9. Par exemple, le disque et le javelot ont une portance aérodynamique. Pour le disque, on recherche un angle d'environ 40° et pour le javelot de 35° . Ce sont des engins planeurs. Avec les anciens javelots qui avaient une portance aérodynamique plus élevée, l'angle était de 32° . Plus de détails dans [DP71]

1. Donnée issues de <http://labolycee.org/2004/2004-11-NelleCaledonie-Sujet-Exo3-Lancer-poids-5-5pts.pdf>
 2. Donnée issues de http://fr.wikipedia.org/wiki/Tir_à_l'arc

Différents modèles de nivellement barométrique

Reprenons les trois modèles présentés en section 9.3.1.2 :

- (1) Le premier, celui du cas 1 page 45, correspond à une masse volumique constante donnée par (9.15). La température au sol est la même que celle à toute altitude. La pression au sol est donnée par (9.8a). La pression est donnée par (9.16).

On a donc, pour ce modèle,

$$\mu_0 = 1.3, \quad (\text{J.1a})$$

$$T_0 = 273.0, \quad (\text{J.1b})$$

$$P_0 = 101324.9, \quad (\text{J.1c})$$

$$g = 9.8, \quad (\text{J.1d})$$

et donc, z désignant l'altitude,

$$P(z) = P_0 - \mu_0 g z, \quad (\text{J.2a})$$

$$T(z) = T_0, \quad (\text{J.2b})$$

$$\mu(z) = \mu_0. \quad (\text{J.2c})$$

- (2) Pour le second modèle, celui du cas 2 page 45, la masse volumique est variable, donnée par (9.19). La pression est donnée par (9.22). La relation (9.19) donne le lien entre T et P et qui donne

$$\mu = \mu_0 \frac{P}{P_0}.$$

On a donc pour ce modèle : μ_0 , T_0 , P_0 et g donnée par (J.1), et

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{gz\mu_0}{P_0}}, \quad (\text{J.3a})$$

$$T(z) = T_0, \quad (\text{J.3b})$$

$$\mu(z) = \mu_0 e^{-\frac{gz\mu_0}{P_0}}. \quad (\text{J.3c})$$

- (3) Enfin, le troisième modèle permet la compressibilité du fluide (l'air étant considéré comme un gaz parfait) et une variation linéaire de température avec l'altitude. Voir [GS85, exercice résolu D p. 69]. On a donc les équations (9.19) et

$$T(z) = T_0 - az,$$

où T_0 est donnée par (J.1b) et

$$a = 6.500 \cdot 10^{-3}, \quad (\text{J.4})$$

On a une équation différentielle que l'on peut résoudre ; on obtient alors (Voir [GS85, exercice résolu D p. 69])

$$P = P_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{aR}},$$

ce que l'on peut mettre sous forme équivalente, d'après (9.19),

$$P = P_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\mu_0 T_0 g}{P_0 a}}. \quad (\text{J.5})$$

On a donc pour ce modèle : μ_0 , T_0 , P_0 et g donnée par (J.1), a donné par (J.4) et

$$P(z) = P_0 \left(\frac{T_0 - az}{T_0} \right)^{\frac{\mu_0 T_0 g}{P_0 a}}, \quad (\text{J.6a})$$

$$T(z) = T_0 - az, \quad (\text{J.6b})$$

$$\mu(z) = \mu_0 T_0 \frac{\left(\frac{T_0 - az}{T_0} \right)^{\frac{\mu_0 T_0 g}{P_0 a}}}{T_0 - az}. \quad (\text{J.6c})$$

Les courbes de pressions, masse volumique et température normalisées (c'est-à-dire P/P_0 , μ/mu_0 et T/T_0) ont été représentées pour les trois modèles sur la figure J.1 pour l'altitude z variant dans $[0, z_m = 1000]$ et sur la figure J.2 pour l'altitude z variant dans $[0, z_m = 10000]$.

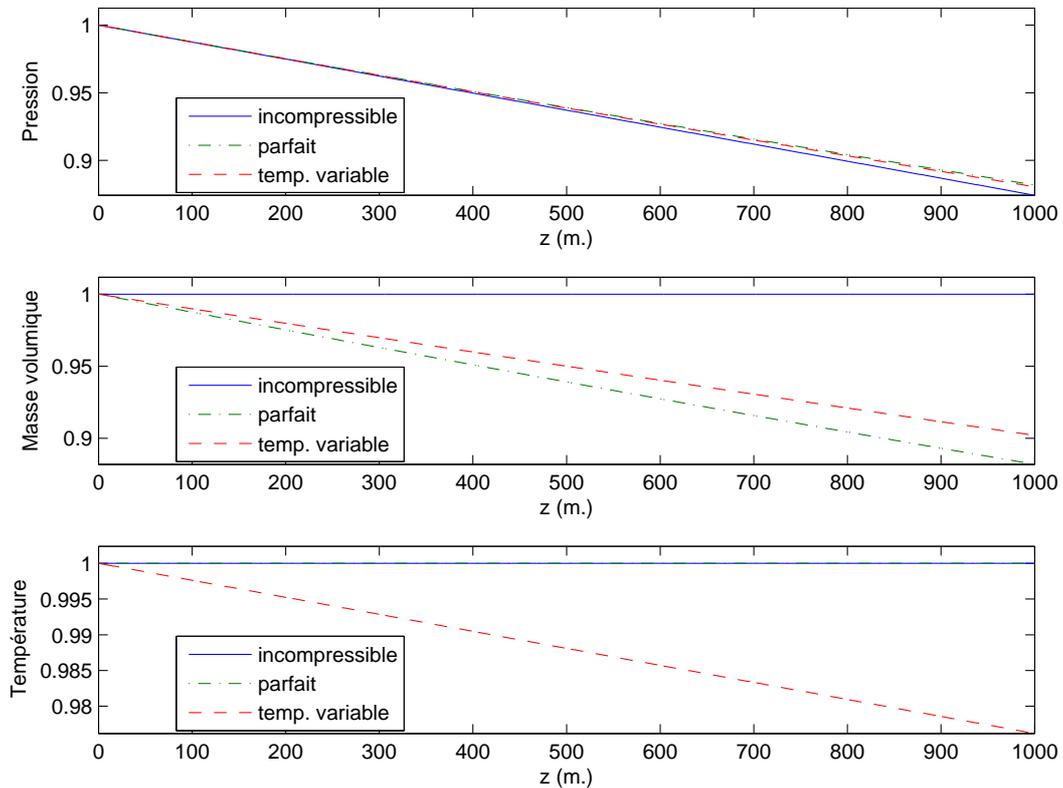


FIGURE J.1. Les courbes de pressions, masse volumique et température normalisées (c'est-à-dire P/P_0 , μ/mu_0 et T/T_0) pour les trois modèles pour l'altitude z variant dans $[0, z_m = 1000]$.

Sur la figure J.1, les trois modèles sont similaires, pour une faible variation d'altitude, ce qui n'est pas le cas pour la figure J.2.

On pourra aussi consulter d'autres modèles sur

http://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_du_nivellement_barométrique

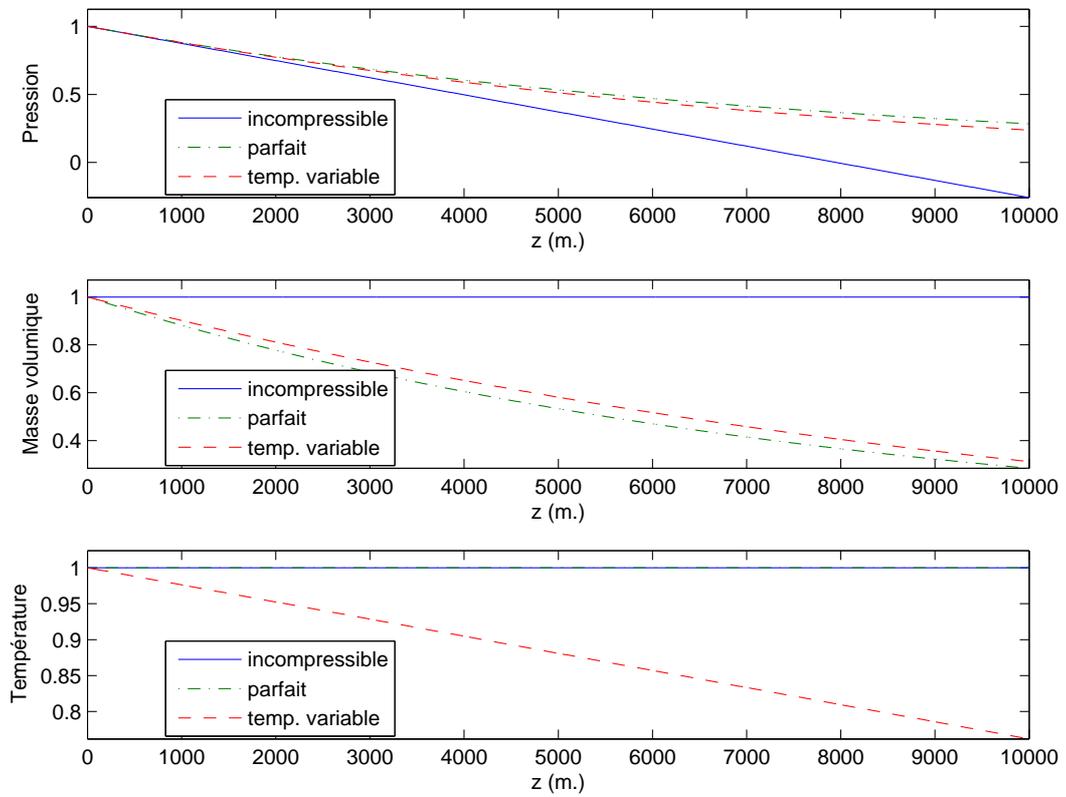


FIGURE J.2. Les courbes de pressions, masse volumique et température normalisées (c'est-à-dire P/P_0 , μ/μ_0 et T/T_0) pour les trois modèles pour l'altitude z variant dans $[0, z_m = 10000]$.

Étude d'un service de tennis

K.1. Introduction

On étudie le vol d'une balle de tennis, en prenant en compte une loi très simple de force de frottement visqueux exercé par l'air sur cette balle. Cela sera appliqué à l'étude d'un service.

K.2. Équation différentielle

On renvoie au chapitre 9.

On étudie ici le vol d'un objet.

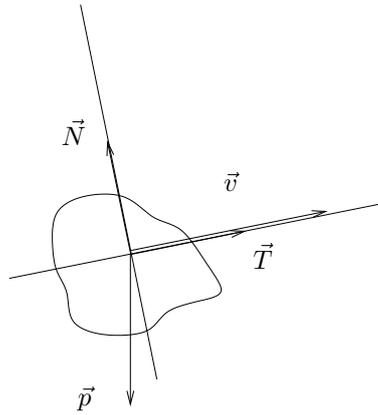


FIGURE K.1. L'objet en vol.

Voir la figure K.1.

L'objet est soumis à son propre poids $\vec{p} = m\vec{g}$. Notons, pour une vitesse non nulle, (\vec{T}, \vec{N}) , le repère local de Frenet.

Si \vec{v} est sa vitesse non nulle, on sait que la force de traînée \vec{F}_T , est colinéaire à $-\vec{v}$ et que la force de portance \vec{F}_P est colinéaire à \vec{N} . Cela reste vrai si la vitesse est nulle : dans ce cas, les deux forces de traînée et de portance sont nulles. Leurs normes sont définies par (9.85). Si la vitesse est nulle, cela est encore vrai. En remarquant que $\vec{v} = v\vec{T}$, on a donc

$$\vec{F}_T = -\gamma_T v \vec{v}, \quad (\text{K.1a})$$

$$\vec{F}_P = \gamma_P v^2 \vec{N}, \quad (\text{K.1b})$$

où

$$\gamma_T = \frac{1}{2} C_T S d, \quad (\text{K.2a})$$

$$\gamma_P = \frac{\varepsilon}{2} C_P S d, \quad (\text{K.2b})$$

où $\varepsilon = \pm 1$; il vaut 1 si la force de portance est dirigée vers la haut, -1 sinon. Cette force de portance est responsable de l'effet Magnus.

REMARQUE K.1. Notons qu'ici, pour simplifier le calcul, la vitesse de rotation de l'objet est supposée constante. En fait, elle diminue au cours du temps, mais les vitesses élevées justifient cette approximation. Pour plus de détails, on pourra consulter [DLGQC10] et [TPR⁺12].

◇

Notons enfin que $v\vec{N} = r(v\vec{T}) = r(\vec{v})$, où r est la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$, définie par

$$r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$v\vec{N} = r(v\vec{T}) = r(\vec{v}),$$

et

$$\vec{F}_T = -\gamma_T v \vec{v}, \quad (\text{K.3a})$$

$$\vec{F}_P = \gamma_P v r(\vec{v}). \quad (\text{K.3b})$$

L'objet, de masse m , est supposée ponctuel. La RFD donne donc

$$\sum \vec{F}_{\text{exterieures}} = m\vec{a},$$

soit

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_T + \vec{F}_P. \quad (\text{K.4})$$

Grâce à (K.3), cela est équivalent à

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - \gamma_T v \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \gamma_P v \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

On a donc l'équation différentielle ordinaire

$$m\ddot{x} = -\gamma_T v \dot{x} - \gamma_P v \dot{y} \quad (\text{K.5a})$$

$$m\ddot{y} = -mg - \gamma_T v \dot{y} + \gamma_P v \dot{x}, \quad (\text{K.5b})$$

avec

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \quad (\text{K.5c})$$

En posant

$$F(t, (x_1, x_2, x_3, x_4)) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m} (-\gamma_T v x_2 - \gamma_P v x_4) \\ x_4 \\ \frac{1}{m} (-mg - \gamma_T v x_4 + \gamma_P v x_2) \end{pmatrix} \quad (\text{K.6a})$$

où

$$v = \sqrt{x_2^2 + x_4^2} \quad (\text{K.6b})$$

$$(\text{K.6c})$$

Ainsi, on peut réécrire (K.5) sous la forme

$$\dot{X}(t) = F(t, X(t)), \quad (\text{K.7})$$

où

$$X(t) = (x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t)). \quad (\text{K.8})$$

REMARQUE K.2. On fera l'hypothèse forte sur des mouvements de courtes durées, avec des vitesses élevées et des coefficients de traînée et de portance faible, que ceux-ci peuvent être considérés comme constants.

Si les conditions initiales en déplacement x_0 et y_0 et vitesse (norme v_0 et angle α) sont connues, on peut donc résoudre cette équation différentielle de façon numérique, et calculer pour tout $t \geq 0$, $x(t)$ et $y(t)$.

Voir aussi en section K.5 :

- K.5.1 page 184, la résolution explicite dans le cas où C_p est nul et le mouvement est vertical ;
- K.5.2 page 186, le calcul de la vitesse limite ;
- K.5.3 page 187, la détermination de l'équation cartésienne sans approximation avec $C_p = 0$.

K.3. Détermination de l'équation cartésienne et calcul de l'angle α

Grâce à la section K.2, on peut calculer, pour tout $t \geq 0$, $x(t)$ et $y(t)$, de façon numérique grâce à un solveur de matlab.

K.3.1. Détermination de l'équation cartésienne $Y(X)$

REMARQUE K.3. On fera l'hypothèse plus forte encore que celle de la remarque K.2 : sur des mouvements de courtes durées, avec des vitesses élevées et des coefficients de traînée et de portance faible, les forces de portance et de traînée sont suffisamment faibles de sorte qu'on puisse approcher le mouvement étudié par le mouvement de chute libre dont les équations paramétriques sont

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t + x_0, \quad (\text{K.9a})$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + y_0. \quad (\text{K.9b})$$

Si on se donne $X \geq x_0$ si $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ (mouvement vers la droite) et $X \leq x_0$ sinon (mouvement vers la gauche), on détermine t tel que

$$x(t) = X \quad (\text{K.10})$$

Si $X = x_0$, on a $t = 0$. Sinon, grâce à l'hypothèse de la remarque K.3, on approchera cette valeur de t par cette correspondance à la chute libre donnée par

$$t = \frac{X - x_0}{v_0 \cos \alpha}. \quad (\text{K.11})$$

Partant de cette valeur, on résout l'équation non linéaire (K.10) grâce à matlab. On calcule alors

$$Y = y(t).$$

On posera alors

$$Y = f(X). \quad (\text{K.12})$$

K.3.2. Détermination de l'équation cartésienne réciproque $X^{-1}(Y)$

On peut aussi, pour Y donné calculer X (le plus proche à un sens que l'on va déterminer plus loin) tel que $Y = f(X)$. Si $Y = y_0$, $X = x_0$.

Sinon, on passe d'abord par la résolution du problème de la chute libre. Soit Y donné. On cherche t tel que $y(t) = Y$, c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + y_0 - Y = 0. \quad (\text{K.13})$$

On a plusieurs cas :

- Si le discriminant de cette équation est strictement négatif, pas de solution réelle ;
- sinon,

- si le produit des deux racines est négatif, on prend la positive ;
- sinon, on prend la plus petite.

Cette valeur de t étant trouvée, on résoud donc l'équation l'équation non linéaire

$$y(t) = Y$$

grâce à matlab, en partant de cette valeur de t . On calcule alors

$$X = x(t).$$

On posera alors

$$X = f^{-1}(Y). \quad (\text{K.14})$$

K.3.3. Calcul de l'angle α

Pour (X, Y) donné, on cherche α donné tel que la trajectoire définie par la vitesse initiale v_0 et α passe par (X, Y) .

Là encore, on passe par la vol libre.

Si on cherche t pour la chute libre tel que $x(t) = X$, défini par (K.11). On réinjecte cela dans (K.9b) :

$$-\frac{1}{2} \frac{g(X - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha (X - x_0) + y_0 - Y = 0$$

On a

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

et donc

$$-\frac{1}{2} \frac{g(X - x_0)^2}{v_0^2} \tan^2 \alpha + (X - x_0) \tan \alpha + y_0 - Y - \frac{1}{2} \frac{g(X - x_0)^2}{v_0^2} = 0 \quad (\text{K.15})$$

On résoud cette équation du second degré en $\tan \alpha$, dont on suppose que les deux racines z_1 et z_2 sont connues et réelles.

- Si on cherche un mouvement vers la droite, c'est-à-dire $\alpha \in] -\pi/2, \pi/2[$, on a alors deux solutions pour α , qui sont $\arctan(z_1)$ et $\arctan(z_2)$. La plus petite d'entre elle correspond au tir tendu et la plus grande au tir en cloche.
- Sinon, on cherche un mouvement vers la gauche et $\alpha \in] -\pi, -\pi/2[\cup] \pi/2, \pi[$. Si l'une des racines z_1 ou z_2 est strictement positive, alors l'angle α est dans $] -\pi, -\pi/2[$ et

$$\alpha_i = \arctan(z_i) - \pi.$$

Si l'une des racines z_1 ou z_2 est négative ou nulle, alors l'angle α est dans $] \pi/2, \pi[$ et

$$\alpha_i = \arctan(z_i) + \pi.$$

Si les deux angles trouvés sont toutes les deux dans $] -\pi, -\pi/2[$ ou toutes les deux dans $] \pi/2, \pi[$, alors la plus petite valeur de l'angle correspond au tir tendu. Sinon, la valeur négative correspond au tir tendu.

Pour le problème avec frottement, on se donne tout d'abord l'angle α et X . On calcule

$$Y = f_\alpha(X) \quad (\text{K.16})$$

Réciproquement, (X, Y) étant donné, on résoud l'équation (K.16) en α , la valeur initiale étant défini par la valeur définie plus haut en vol libre. On ne prendra que la valeur correspondant au vol libre tendu. On pose donc

$$\alpha = g(X, Y) \quad (\text{K.17})$$

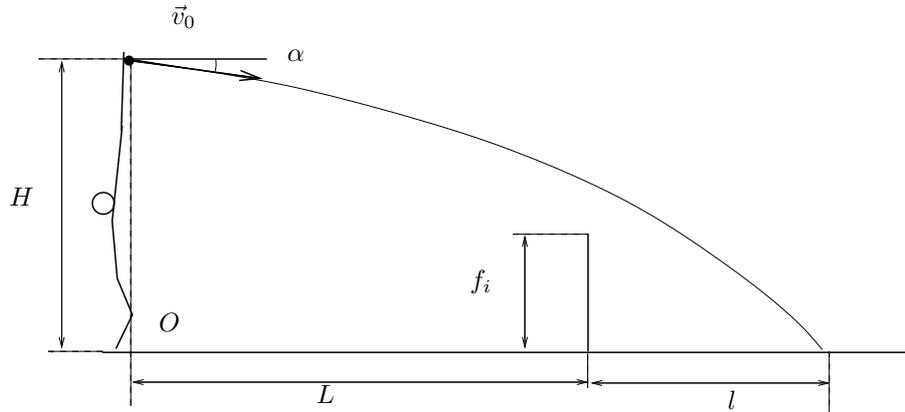


FIGURE K.2. La terrain et le service étudiés.

K.4. Application à l'étude d'une vol d'une balle de tennis sans portance

On suppose maintenant que $C_P = 0$, puisque l'on étudie une balle, censée ne pas tourner, donc sans effet de portance. On se donne les caractéristiques géométriques et mécaniques suivantes (voir figure K.2) :

- gravitation : $g = 9.81$,
- masse balle : $m = 57.5 \text{ g}$,
- coefficient de traînée : $C_T = 0.64$,
- surface (maître couple) : $S = 33.3 \text{ cm}^2$,
- masse volumique de l'air (à 20°) : $d = 1.229$,
- vitesse de frappe : $v_0 = 136 \text{ km/h}$,
- hauteur du filet : $f_i = 0.914$,
- demi-longueur du cours : $L = 11.89$,
- longueur du carré de service : $l = 6.40$
- hauteur totale de frappe : $H = 2.42$

L'origine du repère est placée en O .

On cherche à déterminer toutes les valeurs de angles α pour lesquelles, la balle atterrit dans le carré de service.

- On détermine tout d'abord $\alpha_1 = g(L, l)$ et on vérifie que, pour cette valeur de α , $f(l + L) \leq 0$. Ce service correspond au cas où la balle passe juste au-dessus du filet ;
 - On détermine tout d'abord $\alpha_2 = g(L + l, 0)$ et on vérifie que, pour cette valeur de α , $z = f(L) \geq f_i$. Ce service correspond au cas où la balle atterrit au fond du carré de service.
 - On vérifie ensuite que pour un nombre fini de valeurs de $\alpha \in]\alpha_1, \alpha_2[$, $f(l + L) \leq 0$ et $f(L) \geq f_i$.
- On a trouvé les valeurs suivantes (voir figure K.3) :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -4.4006^\circ, \\ \alpha_2 &= -2.7107^\circ, \\ z - f_i &= 0.3545 \text{ m}\end{aligned}$$

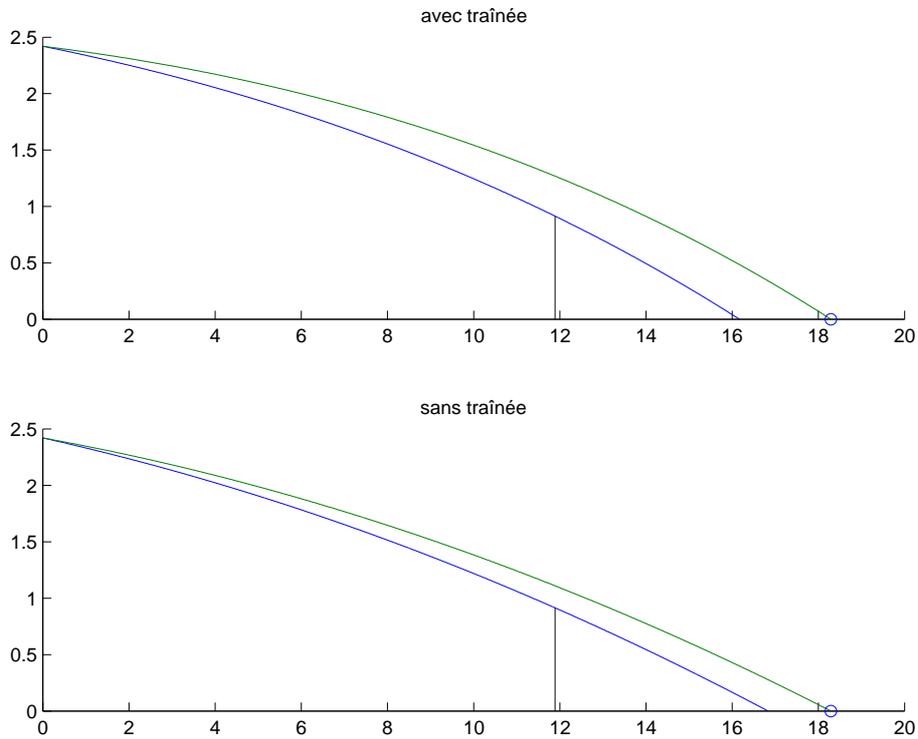


FIGURE K.3. Les résultats.

On a aussi indiqué sur cette même figure, les résultats sans force de traînée (chute libre) : la fenêtre de tir diminue :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -4.8868^\circ, \\ \alpha_2 &= -3.9558^\circ, \\ z - f_i &= 0.1956 \text{ m}\end{aligned}$$

On a aussi réalisé une simulation avec un «service cuillère» : toutes les données sont identiques sauf $v_0 = 59$, plus faible. Voir figure K.4.

K.5. Quelques rappels mathématiques

K.5.1. Résolution analytique de l'équation différentielle (K.5) dans le cas vertical et $C_p = 0$.

On renvoie à l'article de wikipédia :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Chute_avec_résistance_de_l'air.

On suppose donc que les conditions initiales x_0 et \dot{x}_0 sont nulles et, sans perte de généralité que les conditions initiales y_0 et \dot{y}_0 sont nulles. Ainsi, on a $x(t) = 0$ et (K.5) devient

$$m\ddot{y} = -mg - \gamma_T v \dot{y},$$

soit

$$m\ddot{y} = -mg - \gamma_T |\dot{y}| \dot{y}, \quad (\text{K.18})$$

On admet que y décroît ; on pose donc

$$v = -\dot{y} > 0. \quad (\text{K.19})$$

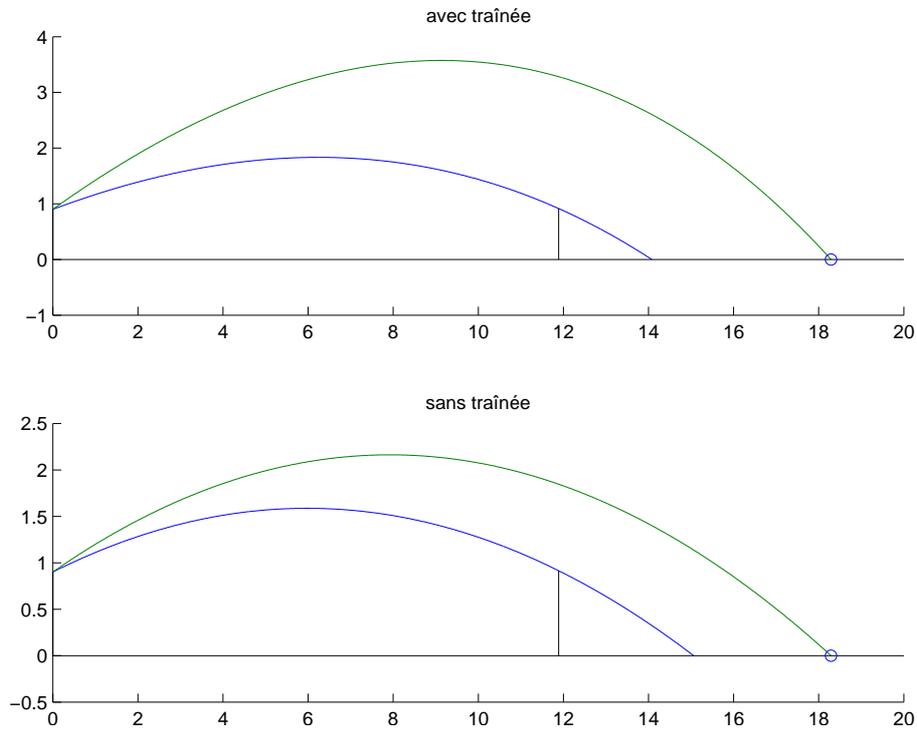


FIGURE K.4. Les résultats («service cuillère»).

On a alors

$$-m\dot{v} = -mg + \gamma_T v^2, \quad (\text{K.20})$$

On considère la vitesse limite v_0 définie par

$$v_0 = \sqrt{\frac{gm}{\gamma_T}}. \quad (\text{K.21})$$

On a donc

$$-m\dot{v} = -mg + \frac{mg}{v_0^2} v^2,$$

d'où

$$\dot{v} = g \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right). \quad (\text{K.22})$$

On fait le changement de fonction

$$u = \frac{v}{v_0}, \quad (\text{K.23})$$

de sorte que

$$\dot{v} = v_0 \dot{u}$$

Ainsi, (K.22) s'écrit

$$v_0 \dot{u} = g (1 - u^2),$$

soit encore

$$\frac{du}{1 - u^2} = \frac{g}{v_0} dt.$$

On peut procéder de deux façons.

(1) Si $u = \tanh(w)$, on a

$$du = (1 - u^2) dw$$

et donc

$$dw = \frac{g}{v_0} dt.$$

Posons

$$T = \frac{v_0}{g}. \quad (\text{K.24})$$

On a donc $w = t/T$ et en revenant aux fonctions initiales

$$u = \tanh(w) = \tanh\left(\frac{t}{T}\right).$$

Soit encore

$$v(t) = v_0 \tanh\left(\frac{t}{T}\right). \quad (\text{K.25})$$

Par intégration, il vient

$$y(t) = -v_0 t - v_0 T \ln\left(\frac{1}{2} \left(1 + e^{-\frac{2t}{T}}\right)\right). \quad (\text{K.26})$$

(2) On peut aussi intégrer la fonction $1/(1 - u^2)$ en décomposant en éléments simples

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 - u} \right)$$

de primitive

$$\frac{1}{2} (\ln |1 + u| + \ln |1 - u|),$$

et aboutir au même résultat.

K.5.2. Étude de la vitesse limite

Si l'hypothèse de la remarque K.2 est vraie pour t grand et s'il existe une vitesse limite, on peut calculer cette vitesse limite.

Si la vitesse limite est atteinte, l'accélération est nulle et (K.4) donne

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{F}_T + \vec{F}_P.$$

si on introduit de nouveau \vec{T} et \vec{N} , on a alors

$$-\gamma_T v^2 \vec{T} + \gamma_P v^2 \vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}. \quad (\text{K.27})$$

Si on note $\beta \in]-\pi, \pi]$, l'angle entre l'horizontale et la vitesse limite, portée par \vec{T}

$$\beta = \widehat{(\vec{i}, \vec{T})}, \quad (\text{K.28})$$

on peut donc écrire (K.27) sous la forme

$$-\gamma_T v^2 \cos \beta - \gamma_P v^2 \sin \beta = 0, \quad (\text{K.29a})$$

$$-\gamma_T v^2 \sin \beta + \gamma_P v^2 \cos \beta = mg. \quad (\text{K.29b})$$

Remarquons que (K.29b) ne peut avoir lieu que si γ_P et γ_T (ou leurs homologues C_T et C_T) ne sont pas simultanément nuls et si v est non nul. Pour toute la suite, on supposera que

$$C_T > 0 \quad (\text{K.30})$$

D'après (K.29a), β ne peut être nul ou égal à π et

$$\frac{\gamma_P}{\gamma_T} = -\frac{1}{\tan \beta}, \quad (\text{K.31})$$

soit donc

$$\frac{\varepsilon C_P}{C_T} = -\frac{1}{\tan \beta}. \quad (\text{K.32})$$

Il vient aussi, grâce à (K.29b),

$$-\gamma_T v^2 \sin \beta - \frac{\gamma_T v^2}{\tan \beta} \cos \beta = mg,$$

soit encore

$$-\gamma_T v^2 \sin \beta = mg$$

Ainsi, nécessairement, $\sin \beta$ est strictement négatif. Selon (K.32), si β appartient à $] -\pi, -\pi/2[$, alors, $\varepsilon = -1$ et si β appartient à $] -\pi/2, 0[$, alors, $\varepsilon = 1$. Le cas particulier $C_P = 0$ correspond à $\beta = -\pi/2$ (chute verticale).

On a alors

$$v = \sqrt{-\frac{mg \sin(\beta)}{\gamma_T}} \quad (\text{K.33})$$

ou encore

$$v = \sqrt{-\frac{2mg \sin(\beta)}{C_T S d}} \quad (\text{K.34})$$

Si par exemple, $\varepsilon = 1$, la portance est dirigée vers le haut. Si on appelle d_h la distance horizontale parcourue et d_v la distance verticale pendant le même temps, on a géométriquement

$$\frac{d_h}{d_v} = -\frac{1}{\tan \beta} \quad (\text{K.35})$$

et donc, grâce à (K.32)

$$\frac{d_h}{d_v} = \frac{C_P}{C_T} \quad (\text{K.36})$$

Ce rapport est appelé la finesse. Si l'objet étudié est un planeur ou un humain muni d'un wingsuit, ce rapport doit être le plus élevé possible.

K.5.3. Détermination de l'équation cartésienne sans approximation avec $C_P = 0$

Comme dans la section K.3.1, on a aussi déterminé de façon différente l'équation cartésienne $Y = f(X)$ sans utiliser l'approximation par le vol libre, dans le cas où $C_P = 0$. Dans ce cas, d'après la section K.5.2, la vitesse limite est dirigée vers le bas et sa norme vaut

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\gamma_T}} \quad (\text{K.37})$$

On admet que la vitesse en x décroît, jusqu'à éventuellement être nulle. À partir de cette instant, x devient constant, seul y décroît (mouvement vertical à vitesse constante, vers le bas) et cela définit donc la valeur extrême de x atteinte.

Supposons, sans perte de généralité, que le mouvement a lieu vers la droite. Pour X donné, on détermine tout d'abord l'instant t_0 tel que, pour le mouvement de chute libre, $x(t) = X$, valeur définie par (K.11). On sait que le mouvement de chute libre est plus rapide qu'avec frottement. Ainsi, on sait que, pour le mouvement avec force de traînée, $x(t) < X$. On cherche ensuite, la plus petite valeur de j telle que $x(jt_0) > X$, en résolvant l'édo (K.7) sur $[jt_0, (j+1)t_0]$. On imposera de vérifier, dans cette boucle, que $x'(jt_0) > 0$ et que $x((j+1)t_0) > x(jt_0)$; si cette condition n'a plus lieu, c'est que l'abscisse extrême est alors atteinte.

Étude de l'effet Magnus sur un tir au football

L.1. Un exemple de joli tir

On pourra consulter la vidéo suivante intitulée « Roberto Carlos - Le Plus Beau But Dans L'histoire Du Foot ».

<https://www.youtube.com/watch?v=IKto5H7cVQA>

Elle met en évidence l'effet la section 9.5.6.

Rappelons, à cet effet, quelques lignes extraites de

http://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_Magnus

« Lorsqu'une balle en rotation se déplace dans l'air, elle va par frottement modifier la vitesse du courant d'air autour d'elle. L'effet sera dissymétrique : d'un côté la balle entraîne l'air qui accélère. De ce côté la pression diminue. De l'autre côté la balle freine l'écoulement d'air et la pression augmente. On aura donc une différence de pression et la balle va se déplacer du côté où la pression est plus faible. Selon la vitesse de rotation de la balle, la position des points où la vitesse est respectivement minimale et maximale (et donc le sens de la force appliquée) varie.

Par exemple, si la balle roule au sol, la vitesse relative de l'air par rapport à sa surface supérieure augmentera. Si elle tourne de la même façon en l'air, la vitesse de l'air par rapport à sa surface inférieure diminuera. On aura une légère surpression en haut et une légère dépression en bas de la balle, ce qui la plongera plus vite vers le sol. »

D'autres liens évoque ce mécanisme connu, mais difficile à mettre en œuvre :

<http://vulgariz.com/media/video/le-coup-franc-de-roberto-carlos-explique-par-la-physique/>

<http://www.intellego.fr/soutien-scolaire--/aide-scolaire-physique/3-explication-physique-du-coup-franc-de-roberto-carlos/5664>

http://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_Magnus_et_turbulence_dans_le_football

Rappelons, à cet effet, quelques lignes extraites de l'url qui précède :

« Dans de nombreux jeux utilisant des boules ou des balles, du billard au golf en passant par le football, celles-ci sont souvent frappées de manière à entrer en rotation pour modifier leur comportement. Le mot effet est souvent utilisé pour décrire ce phénomène. Le problème a été particulièrement étudié à propos du football. Un ballon n'étant pas profilé, dès que la vitesse n'est plus très faible il y a à l'aval un sillage turbulent qui induit une traînée relativement importante, une partie de l'énergie étant consommée dans des mouvements erratiques de l'air. Au dessus d'une certaine vitesse ce sillage se rétrécit, ce qui se traduit par une diminution de la traînée. La vitesse critique à laquelle se situe cette transition dépend beaucoup des irrégularités de la surface du ballon et les «défauts» du ballon de football ont été pour beaucoup dans le caractère spectaculaire du jeu. Les grands tireurs de coups francs qui atteignent des vitesses de l'ordre de 30 m/s bénéficient donc pleinement de cet avantage. Si le footballeur ne frappe pas exactement le centre du ballon il impose non seulement une vitesse dans la direction de l'impulsion mais aussi une rotation dans le plan qui contient le centre et le point d'impact. Cette rotation provoque une asymétrie dans le décollement de la couche limite, ce qui dévie l'air sur l'un des cotés et par réaction entraîne une force de l'air sur le ballon de l'autre coté. Celle-ci est perpendiculaire à la traînée dans le plan de rotation, ce qui permet de la qualifier de portance. Lorsque la frappe porte sur la partie inférieure du ballon la rotation autour d'un axe induit un effet rétro (dans les sports de balle on parle de balle coupée) qui, lors d'une tentative de but avec une vitesse initiale vers le haut, conduit à une trajectoire rectiligne

qui passe facilement au-dessus de la cage. Cette technique est utilisée par le gardien pour ses dégagements. Au contraire, si c'est la partie supérieure qui est frappée la balle liftée prend une trajectoire plus tendue qui permet de marquer le but en passant au-dessus du mur défensif. Cela permet de frapper plus fort. Dans le cas où la frappe porte sur le côté l'effet latéral incurve la trajectoire dans le plan horizontal, ce qui permet de contourner le mur. »

On pourra consulter les deux papiers récents sur l'explication rigoureuse par le calcul [TPR⁺12, DLGQC10].

L.2. Calcul de cet effet

Nous allons supposer, pour simplifier, que l'on étudie un tir qui a lieu dans un plan vertical, par dessus un mur de joueurs, cas pour lequel l'effet Magnus s'exprime aussi.

Notons tout d'abord, que grâce au chapitre 8, on est capable de déterminer la trajectoire en chute libre, en négligeant la force de portance et de vérifier si le ballon passe au-dessus du mur de joueurs et en dessus de la barre des buts. On peut aussi, pour changer, utiliser les différents résultats de l'annexe G. On renvoie à la section G.4 de cette annexe.

Si on utilise les calculs simplifiés de l'annexe K, on est capable de déterminer cette fois-ci ce qu'il se passe sur on prend en compte la force de Portance.

On reprenant les calculs de l'annexe K, on peut donc simuler l'effet Magnus sur un tir de football. On rappelle que le tir a lieu dans un plan vertical et que la balle a un effet de rotation dans avant, c'est-à-dire que si elle se déplace, dans ce plan, de la gauche vers la droite, sa rotation est horraire. Ainsi, l'effet Magnus se manifeste par une action dirigée vers le bas, ce qui incurve la trajectoire vers le bas et l'aide à passer sous la barre transversale des buts. On néglige la force de traînée et on ne considère donc que la force de portance, responsable de l'effet Magnus.

Le joueur est situé à une distance $d_2 = 15$ m de la ligne de but et à une distance $d_1 = 10$ m du mur formé par les joueurs adverses. La hauteur h_1 du mur est évaluée à $h_1 = 2$ m et celle des buts à $h_2 = 2.5$ m. On supposera que la la vitesse initiale du ballon est de 15 ms^{-1} et son angle d'envol de 35° . Le rayon du ballon est égal à $R = 0.11$ m.

Les autres paramètres choisis sont donnés par (ils sont exprimés en Unité du SI sauf cas indiqué)

$$\begin{aligned}g &= 9.81000, \\m &= 0.43000, \\C_P &= -0.16490,\end{aligned}$$

la masse volumique de l'air :

$$\mu = 1.22900,$$

En figure L.1 page ci-contre, sont données les deux trajectoires. On constate donc que les deux trajectoires passent bien au dessus du mur, mais que, sans prise en compte de l'effet Magnus, donc *sans la rotation donnée par le footballeur, la balle passerait au dessus de la barre transversale*, alors que *l'effet Magnus infléchit suffisamment la trajectoire pour qu'elle rentre dans le but!* De plus, malgré l'effet Magnus, on constate que *la balle passe toujours au dessus du mur de joueurs.*

Plus de détails dans la dernière section de [Bas15a].

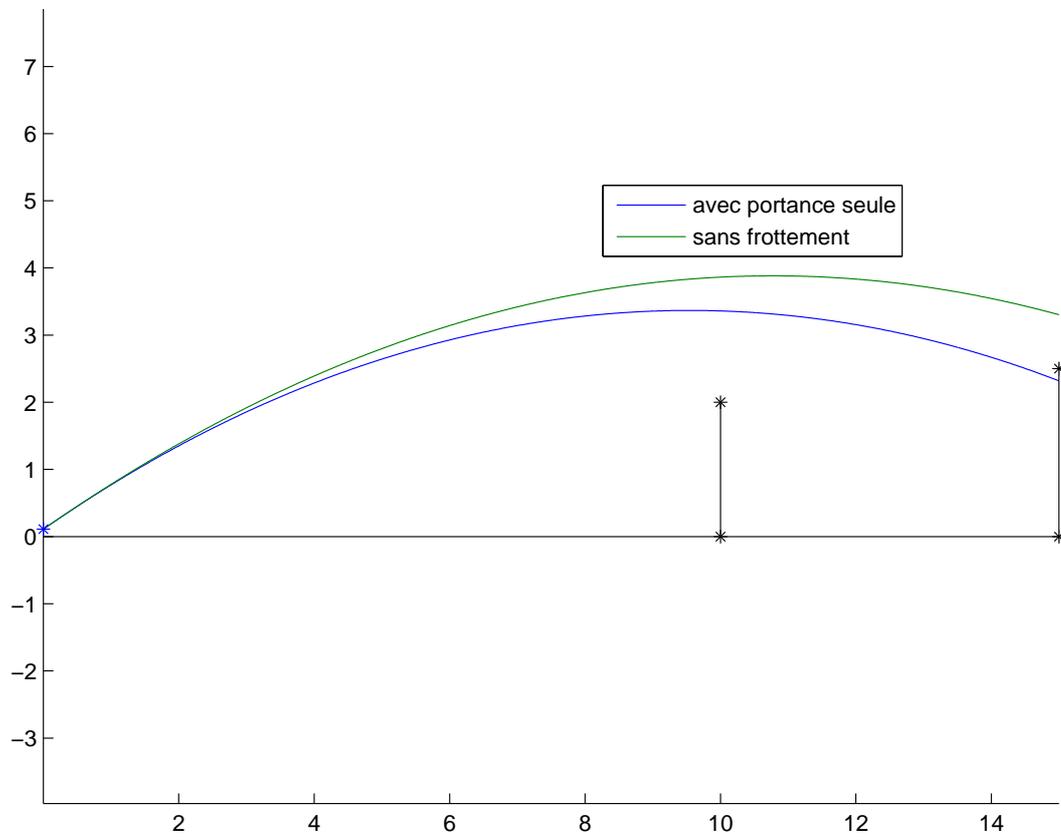


FIGURE L.1. La trajectoire sans frottement et la trajectoire avec frottement.

Bibliographie

- [Bas04] Jérôme Bastien. *Mathématiques : Applications.*, 2004. Notes de cours de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT31.
- [Bas07] Jérôme Bastien. *Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie.*, 2007. Notes de cours de l'UV MT25 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT25.
- [Bas12] Jérôme Bastien. *Vérité mathématique : paradoxe, preuve et conventions*, 2012. Transparents de l'UE Zététique de l'INSA de Lyon.
- [Bas15a] Jérôme Bastien. *Atelier Maths C2+ : Parabole et effet Magnus au football.*, 2015. MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/parabole_effet_magnus.pdf.
- [Bas15b] Jérôme Bastien. *Biomécanique du mouvement*, 2015. Tutorat de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca.
- [Bas15c] Jérôme Bastien. *Biomécanique du mouvement*, 2015. Corrigés de TD de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca.
- [Bas15d] Jérôme Bastien. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ?*, 2015. Transparents présentés lors du Forum des mathématiques 2015 à l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon, disponibles sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_forum_2015.pdf.
- [Bas15e] Jérôme Bastien. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ? - Deux questions d'algèbre et de dénombrement*, 2015. Transparents présentés au « séminaire détente » de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique, Lyon, disponibles sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_MMI_2015.pdf.
- [Bas15f] Jérôme Bastien. *Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3.*, 2015. Notes de cours de l'UV OMI3 de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>.
- [BC04] Jérôme Bastien et Dominique Chamoret. *Mathématiques : Applications.*, 2004. Travaux Dirigés de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT31.
- [Bla06] Thierry Blancon. *La physique et la mécanique à l'usage de la pratique sportive : formation initiale-formation continue*, volume Dossiers EPS, 69. Revue EP.S, 2006. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 612.7 BLA, 2^{ième} étage).
- [BMW11] Pascal Bigot, Richard Mauduit et Éric Wenner. *Mécanique des fluides en 20 fiches. Comprendre et s'entraîner facilement*. Dunod, 2011. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 532 BIG, 4^{ième} étage).
- [Bon91] Jean-Pierre Bonnin. *La plongée sous-marine sportive*. Masson, 1991. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 797.23 PLO, 2^{ième} étage).
- [Car89] Jean-Claude Carrega. *Théorie des corps*. Collection Formation des Enseignants et Formation Continue. [Collection on Teacher Education and Continuing Education]. Hermann, Paris, second édition, 1989. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 512.3 CAR, 4^{ième} étage).
- [Cau08] François Cauneau. *Mécanique des fluides*. Mines ParisTech - Les Presses, 2008. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 532 CAU, 4^{ième} étage).
- [Com02] Raymond Comolet. *Mécanique expérimentale des fluides. 1, Statique et dynamique des fluides non visqueux*. Dunod, 2002. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 532.007 COM, 4^{ième} étage).
- [Com06] Raymond Comolet. *Mécanique expérimentale des fluides. 2, Dynamique des fluides réels, turbomachines*. Dunod, 2006. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 532 COM, 4^{ième} étage).
- [DLGQC10] Guillaume Dupeux, Anne Le Goff, David Quéré et Christophe Clanet. The spinning ball spiral. *New Journal of Physics*, 12, 2010.
- [Dow02] Gilles Dowek. *Voulez-vous jouer avec les maths ?* Number 12 in Les Petites Pommes du Savoir. Édition Le Pommier, 2002.

- [DP71] Geoffrey H. G. Dyson et Jean Pons. *Principes de mécanique en athlétisme*. Vigot, 1971. Traduction de : The mechanics of athletics. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : SCI 11447, Magasin).
- [Duv90] Georges Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1990. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 531 DUV, 4 ième étage).
- [ET10] Christian English et Frédéric Thibaud, editors. *150 jeux pour muscler vos neurones*. City Editions, 2010.
- [Glé05] Les Glénans. *Le cours des Glénans*. Seuil, 2005. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 797.1 COU, 2 ième étage).
- [Gla15] Max Glaskin. *Cyclisme & science : comment fonctionne le couple homme-machine ?* Vigot, 2015. Traduit de l'anglais par Jean-Pascal Bernard ; titre original Cycling science. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 796.6 GLA, 2 ième étage).
- [GLC03] Francis Goubel et Ghislaine Lensel-Corbeil. *Biomécanique : éléments de mécanique musculaire*. Collection STAPS. Masson, 2003. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 612.74 GOU, 2 ième étage).
- [GS85] Hubert Gié et Jean-Pierre Sarmant. *Mécanique, volume 2*. Technique et documentation (Lavoisier), Paris, 1985. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 531 GIE, 4 ième étage).
- [HM13] Frédéric Holweck et Jean-Noël Martin. *Géométries pour l'ingénieur*. Ellipses, Paris, 2013.
- [les13] Les dossiers de la recherche, Août-Septembre 2013. Numéro 5.
- [LH97] Camille Lebossé et Corentin Hémerly. *Géométrie. Classe de Mathématiques (Programmes de 1945)*. Jacques Gabay, Paris, 1997. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 516 LEB 97307, niveau 0 Espace Capes/Agreg).
- [LM07] Romuald Lepers et Alain Martin. *Biomécanique, cours et exercices corrigés*. Ellipses, 2007. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 612.7 LEP, 2 ième étage).
- [Pie07] François Piednoir. *Pédaler intelligent, La biomécanique du cycliste*. Fédération Française de Cyclotourisme, 2007. voir le web : <http://www.piednoir.com/index.html>.
- [TPR⁺12] Simon Tuplin, Martin Passmore, Davide Rogers, Andy R Harland, Tim Lucas et Chris Holmes. The application of simulation to the understanding of football flight. *Journal of Sports Engineering and Technology*, 226(2) :134–142, 2012.
- [Van] Yannick Vanpouille. Cours d'escalade. disponible sur internet : <http://yannick-vanpouille.univ-lyon1.fr/>.
- [Van96] P. Vanderwegen. *Mécanique du solide*. Masson, Paris, 1996. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 531.07 VAN, 4 ième étage).