

Université Claude Bernard



Lyon 1

**TUTORAT EN BIOMÉCANIQUE DU MOUVEMENT**

**Janvier 2015**

**Jérôme BASTIEN**

Document compilé le 15 juillet 2022

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons : Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification ; 3.0



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

ou en français

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.fr>

## Table des matières

Avant-propos	iii
Chapitre 1. Repères, points, vecteurs	1
1.1. En une dimension	1
1.2. Repère en plus de deux dimensions	1
1.3. Applications	5
1.4. Correction d'exercices	6
Chapitre 2. Droites et paraboles, équations paramétriques et cartésiennes, fonctions	9
2.1. Droites	9
2.2. Équations de degrés 1 (rappels)	11
2.3. Paraboles	12
2.4. Équations de degré 2	12
2.5. Applications et fonctions	13
2.6. Équation paramétriques et cartésiennes	13
2.7. Exercices supplémentaires	14
2.8. Correction d'exercices	16
Chapitre 3. Trigonométrie	25
3.1. Correction d'exercices	32
Chapitre 4. Dérivée, vitesse, accélération, intégrale	35
4.1. Monodimensionnel	35
4.2. Bidimensionnel	50
4.3. Utilité de tout cela ?	57
4.4. Récapitulatif	58
4.5. Correction d'exercices	59
4.6. Ensemble des figures (des éléments de corrections)	73
Annexe A. Identités remarquables	83
Annexe B. Notation Scientifique	85
Bibliographie	87



## Avant-propos

Cette semaine de tutorat (Janvier 2015) a pour objectif de montrer les outils mathématiques qui seront utilisés en Biomécanique. Elle est surtout destinée aux étudiants non titulaires d'un bac S à qui on proposera des révisions de notions normalement vue en lycée (chapitres 1,2 et 3) ; les titulaires d'un bac S sont toutefois naturellement les bienvenus ; ceux-la étudieront surtout le chapitre 4.

Un QCM sera proposé en début de semaine (voir lien ci-dessus) qui vous permettra de vous évaluer par rapport aux compétences révisées cette semaine.

Ce document est normalement disponible à la fois

- en ligne sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html> à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
  - 'Poste de travail',
  - puis sur le répertoire 'P:' (appelé aussi '\\teraetu\Enseignants'),
  - puis 'jerome.bastien',
  - puis 'UFRSTAPS',
  - enfin sur 'tutorat\_biomecaL2'.

Jérôme BASTIEN



## Repères, points, vecteurs

### 1.1. En une dimension

On se donne un axe, orienté conventionnellement orienté vers la droite. On rappelle que sur cet axe, la mesure algébrique  $\overline{AB}$  est munie d'un signe : si  $A$  est à droite de  $B$ , elle est égale à la distance  $AB$ , sinon elle est égale à  $-AB$ .

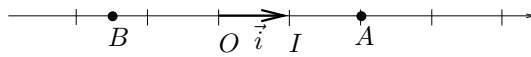


FIGURE 1.1. repère en une dimension

En une dimension, donner l'abscisse d'un point  $M$  dans un repère  $(O, \vec{i})$ , c'est compter (de façon algébrique), combien de fois ( $x$ ) la mesure algébrique  $\overline{OM}$  contient l'unité  $\overline{OI}$ . Voir figure 1.1. Cela s'écrit encore,

$$\overline{OM} = x\overline{OI} \quad (1.1)$$

On dit encore que  $M$  a pour abscisse  $x$  dans le repère  $(O, \vec{i})$ .

REMARQUE 1.1. Une image associée à ce repérage est que l'on passe de l'origine 0 au point  $M$  en faisant

- «  $x$  pas vers la droite » (chaque pas est de longueur  $OI$ ) si  $x$  est positif
- ou «  $|x|$  pas vers la gauche » si  $x$  est négatif.

EXEMPLE 1.2. Sur la figure 1.1, le point  $A$  est à droite de  $O$  et la distance  $OA$  vaut 2 fois la distance  $OI$  ; on a donc

$$x_A = 2$$

Sur la figure 1.1, le point  $B$  est à gauche de  $O$  et la distance  $OB$  vaut 1.5 fois la distance  $OI$  ; on a donc

$$x_B = -1.5$$

On transforme aussi l'égalité sur les mesures algébriques (1.1) par l'égalité sur les vecteurs

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} \quad (1.2)$$

où  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ .

Pour toute la suite, on suposera que le vecteur  $\vec{i}$  est normé, c'est-à-dire que la distance  $OI$  est égale à 1.

### 1.2. Repère en plus de deux dimensions

Dans le plan ou l'espace, on rajoute autant de vecteurs de base qu'il n'y a de dimension.

#### 1.2.1. Deux dimensions

Pour toute la suite de cette section, on se placera dans le plan et on supposera le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé direct, c'est-à-dire que

- les deux distances  $OI$  et  $OJ$  sont égales à 1,

- les directions des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont perpendiculaires,
- l'on passe de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  en tournant dans le sens trigonométrique (antihoraire).

REMARQUE 1.3. Parfois, on utilisera des repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  orthogonaux mais pas normés, c'est à dire que les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont orthogonaux mais pas unitaires. (voir chapitre 2).

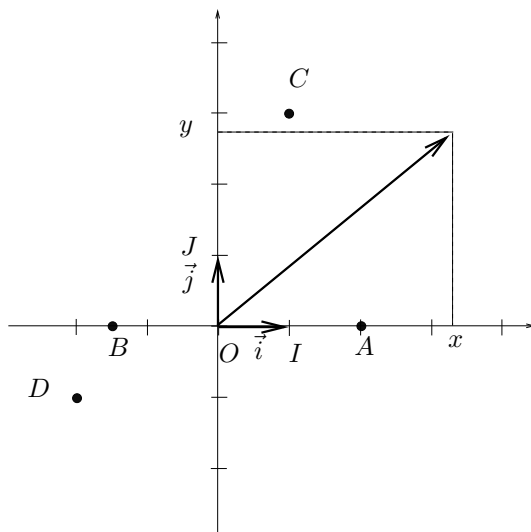


FIGURE 1.2. repère en deux dimensions

Voir figure 1.2.

On généralise (1.2) en disant que  $M$  a pour abscisse  $x$  et pour ordonnée  $y$  si

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}. \quad (1.3)$$

REMARQUE 1.4. En reprenant l'image de la remarque 1.1 page précédente, on passe de l'origine 0 au point  $M$  en faisant

- • «  $x$  pas vers la droite » (chaque pas est de longueur  $OI$ ) si  $x$  est positif
- ou «  $|x|$  pas vers la gauche » si  $x$  est négatif.
- puis en faisant
  - «  $y$  pas vers la haut » (chaque pas est de longueur  $OJ = OI$ ) si  $y$  est positif
  - ou «  $|y|$  pas vers la bas » si  $y$  est négatif.

EXEMPLE 1.5. Sur la figure 1.2,

- le point  $O$  a pour coordonnées  $(0, 0)$ ;
- le point  $I$  a pour coordonnées  $(1, 0)$ ;
- le point  $J$  a pour coordonnées  $(0, 1)$ ;
- le point  $A$  a pour coordonnées  $(2, 0)$ ;
- le point  $B$  a pour coordonnées  $(-1.5, 0)$ ;
- le point  $C$  a pour coordonnées  $(1, 3)$ ;
- le point  $D$  a pour coordonnées  $(-2, -1)$ .

On écrira aussi

$$x_D = -2, \quad y_D = -1$$



ou parfois abusivement

$$D = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les deux coordonnées ainsi définies sont appelées coordonnées cartésiennes. Il existe aussi des coordonnées dites polaires (voir définition 3.4 page 28).

On peut aussi repérer un vecteur par deux coordonnées cartésiennes : on assimile point et vecteur et on dit que le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  a pour coordonnée  $(x, y)$  en écrivant (1.3).

De façon plus générale, si  $A$  a pour coordonnées  $(x_A, y_A)$  et  $B$  a pour coordonnées  $(x_B, y_B)$ , alors on a

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}, \quad (1.4)$$

ce que l'on écrira aussi

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

ou parfois

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A). \quad (1.6)$$

Notons aussi la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \quad (1.7)$$

et une de ses conséquences :

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}. \quad (1.8)$$

La formule (1.5) peut se montrer en utilisant la définition (1.4) et la relation de Chasles (1.7) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}, \\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \\ &= x_B\vec{i} + y_B\vec{j} - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j}), \\ &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}. \end{aligned}$$

◇

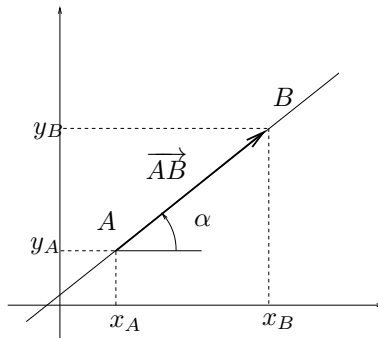


FIGURE 1.3. Le vecteur défini par  $A$  et  $B$

Pour tracer le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , il nous faut donc l'origine  $A$ , la fin  $B$ . On peut aussi remarquer qu'un vecteur est caractérisé (c'est-à-dire entièrement défini et de façon non redondante) par 4 éléments : (voir figure 1.3)

- Son point d'application ;
- Sa norme ;
- Sa direction (donné par l'angle entre l'horizontale et de la droite  $(AB)$  qui le supporte) ;
- Son sens (l'un des deux sens par rapport à la droite précédente).

De façon pratique, pour  $\overrightarrow{AB}$  défini par (1.4),

- la norme  $AB$  est calculée grâce au théorème de Pythagore :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Sa direction (donné par l'angle entre l'horizontale et de la droite qui le supporte) est défini par l'angle de la droite  $(AB)$  par rapport à l'horizontale. Si on utilise, en anticipant, l'équation (3.8) page 27, on a donc

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right), \quad (1.9)$$

où  $\operatorname{arctg}$  est la fonction réciproque de la fonction tangente. Cela sera justifiée *a posteriori* par (3.8).

- Son sens est défini par rapport aux signes de  $x_B - x_A$  et  $y_B - y_A$  (Haut, Bas, droite, gauche).

REMARQUE 1.6. Attention, en toute rigueur, un vecteur est une classe d'équivalence : seul importe le déplacement relatif de la fin  $B$  par rapport à l'origine  $A$ . Le point d'application  $A$  n'est donc pas nécessaire pour caractériser le vecteur. En fait, en biomécanique, les vecteurs représentent des vitesse ou des forces, dont le point d'application a toute son importance.

REMARQUE 1.7. Si  $x_A = x_B$ , le vecteur est portée par une droite verticale et la formule (1.9) donne  $\alpha = \pm\pi/2$ , qu'il n'est pas la peine de calculer. Si  $y_A = y_B$ , le vecteur est portée par une droite horizontale et la formule (1.9) donne  $\alpha = 0$ , qu'il n'est pas la peine de calculer.

EXERCICE 1.8.

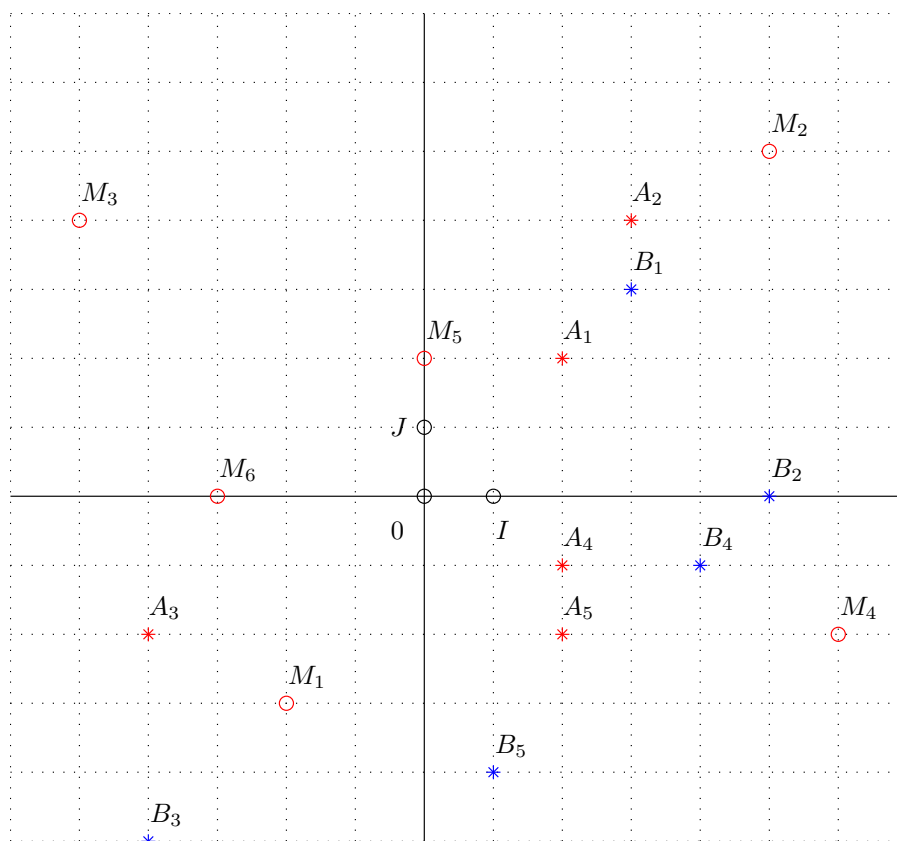


FIGURE 1.4. Quelques points

- (1) Déterminer les coordonnées des points  $M_i, A_i, B_i$  de la figure 1.4 page précédente.
- (2) Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{A_i B_i}$ .
- (3) Caractériser les vecteurs  $\overrightarrow{A_i B_i}$ . On pourra mesurer les angles et les normes «à la main», pour vérification.

Voir éléments de correction page 6.

Le vecteur nul (voir (1.8)) est caractérisé par

$$\vec{0} \text{ défini par } \begin{cases} \text{Point d'application :} & A \\ \text{Norme :} & 0 \\ \text{Direction :} & \text{Non défini} \\ \text{Sens :} & \text{Non défini} \end{cases}$$

◇

### 1.2.2. Trois dimensions

On peut réécrire (1.4) et (1.5) sous la forme

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}, \quad (1.10)$$

ce que l'on écrira aussi

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

La notion de norme est conservée :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Les notions d'angle sont plus difficiles à manipuler.

La relation de Chasles (1.7) est encore valable.

### 1.3. Applications

Les vecteurs représenteront des forces, des déplacements, des vitesses, des accélérations.

### 1.4. Correction d'exercices

#### ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 1.8

(1)

Voir les tableaux 1.1, 1.2 et 1.3.

	abscisse	ordonnée
$M_1$	-2	-3
$M_2$	5	5
$M_3$	-5	4
$M_4$	6	-2
$M_5$	0	2
$M_6$	-3	0

TABLE 1.1. Coordonnées des points  $M_i$

	abscisse	ordonnée
$A_1$	2	2
$A_2$	3	4
$A_3$	-4	-2
$A_4$	2	-1
$A_5$	2	-2

TABLE 1.2. Coordonnées des points  $A_i$

	abscisse	ordonnée
$B_1$	3	3
$B_2$	5	0
$B_3$	-4	-5
$B_4$	4	-1
$B_5$	1	-4

TABLE 1.3. Coordonnées des points  $B_i$

(2)

Voir le tableau 1.4 page suivante.

(3)

	abscisse	ordonnée
$\overrightarrow{A_1B_1}$	1	1
$\overrightarrow{A_2B_2}$	2	-4
$\overrightarrow{A_3B_3}$	0	-3
$\overrightarrow{A_4B_4}$	2	0
$\overrightarrow{A_5B_5}$	-1	-2

TABLE 1.4. Coordonnées des vecteurs

$$\overrightarrow{A_1B_1} \text{ défini par } \left\{ \begin{array}{l} \text{Point d'application : } A_1 \\ \text{Norme : } 1.41421 \\ \text{Direction : } 45 \\ \text{Sens : } \text{Droite Haut} \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{A_2B_2} \text{ défini par } \left\{ \begin{array}{l} \text{Point d'application : } A_2 \\ \text{Norme : } 4.47214 \\ \text{Direction : } -63.435 \\ \text{Sens : } \text{Droite Bas} \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{A_3B_3} \text{ défini par } \left\{ \begin{array}{l} \text{Point d'application : } A_3 \\ \text{Norme : } 3 \\ \text{Direction : } -90 \\ \text{Sens : } \text{Bas} \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{A_4B_4} \text{ défini par } \left\{ \begin{array}{l} \text{Point d'application : } A_4 \\ \text{Norme : } 2 \\ \text{Direction : } 0 \\ \text{Sens : } \text{Droite} \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{A_5B_5} \text{ défini par } \left\{ \begin{array}{l} \text{Point d'application : } A_5 \\ \text{Norme : } 2.23607 \\ \text{Direction : } 63.435 \\ \text{Sens : } \text{Gauche Bas} \end{array} \right.$$



## Droites et paraboles, équations paramétriques et cartésiennes, fonctions

### 2.1. Droites

#### EXERCICE 2.1.

On suppose que dans un magasin, vous achetez des légumes à 1,35 €/kg et que le sac plastique pour chacun d'eux coûte 35 cents (il n'intervient pas dans la masse des légumes pesés, à cause de la tare de la balance).

- (1) Pour chacune des masses suivantes, combien payez-vous : 1 kg ; 0,345 kg ; 2,656 kg ; 1,643 kg ; 5,345 kg ?
- (2) En choisissant un repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  orthogonal (pas nécessairement normé pour choisir une échelle correcte), tracer pour chaque masse un point d'abscisse égale à la masse et d'ordonnée, égale au prix payé.
- (3) Que remarquez vous ?
- (4) Montrer que, de façon générale :

$$\text{prix} = 1,35 \times \text{masse} + 0,35.$$

Voir éléments de correction page 16.

De façon générale, une équation de droite est du type

$$y = ax + b. \tag{2.1}$$

Dans un repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  orthogonal, si on trace des points de coordonnées  $(x, y = ax + b)$  ils sont sur cette droite. Si on trace tous les points de ce type, on obtient la droite entière.

REMARQUE 2.2. L'équation de droite  $y = ax$  est dite linéaire : elle passe par l'origine. L'équation de droite  $y = ax + b$  est dite affine : elle ne passe pas nécessairement par l'origine.

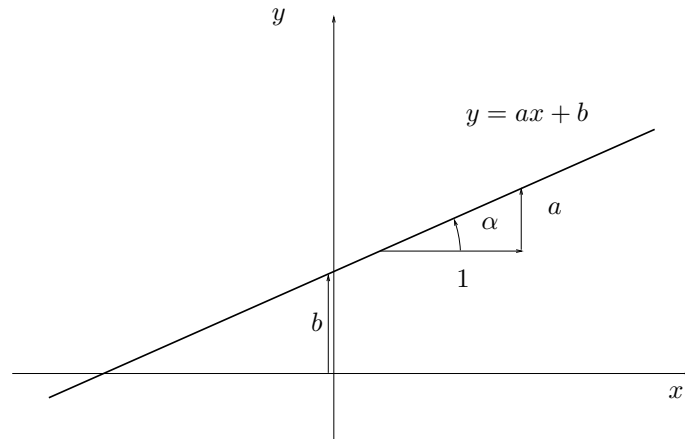
REMARQUE 2.3. Le nombre  $b$  est appelé ordonnée à l'origine ; c'est la valeur de l'ordonnée de l'intersection de la droite avec l'axe  $y$ . Autrement dit, quand  $x$  est nul,  $y$  est égal à  $b$  (Voir figure 2.1 page suivante), soit encore,  $y$  est la solution de

$$y = ax + b \text{ et } x = 0. \tag{2.2}$$

Remarquons que dans (2.1), si on remplace  $x$  par  $x + 1$ ,  $y$  augmente de  $a$  (Voir figure 2.1 page suivante).  $a$  est appelée la pente ; c'est aussi la tangente de l'angle  $\alpha$  entre l'horizontale et la droite. Le vecteur  $(1, a)$  est un vecteur directeur de la droite.

REMARQUE 2.4. Si  $a = 0$ , (2.1) est équivalent à

$$y = b.$$

FIGURE 2.1. La droite d'équation  $y = ax + b$ .

C'est une droite horizontale. Attention, il existe un type de droite dont l'équation n'est pas du type (2.1). C'est la droite du type

$$x = c, \quad (2.3)$$

qui est verticale. Si on réunit les droites du type (2.1) et (2.3), on obtient toutes les droites, de la forme

$$ax + by + c = 0. \quad (2.4)$$

Dans ce cas, le vecteur  $(-b, a)$  est un vecteur directeur de la droite.

REMARQUE 2.5. Voir la remarque 3.3 page 27 sur les rapports entre la pente d'une droite et celle d'une route, donnée en pourcentage.

REMARQUE 2.6. Pour calculer l'équation de droite passant par les points  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$ , il y a plusieurs façons.

- (1) Remarquons tout d'abord que si  $x_A = x_B$ , la droite est verticale et l'équation de cette droite ne peut se mettre sous la forme (2.1) mais sous la forme (2.4), ici

$$x = x_A.$$

- (2) On utilise si  $x_A \neq x_B$ , l'une des façons suivantes :

— On considère le point  $M(x, y)$  et on écrit qu'il appartient la droite  $(AB)$  si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires : le produit en croix de

$$\begin{pmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{pmatrix}$$

est nul, ce qui fournit l'équation de droite sous la forme (2.4).

— On peut aussi écrire que le vecteur  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$  est un vecteur directeur de la droite, dont on déduit que l'équation est de la forme

$$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + c = 0.$$

En écrivant que cette droite passe par  $A$  ou  $B$ , on en déduit  $c$ .

— Si  $x_A$  est différent de  $x_B$ , on cherche l'équation de droite sous la forme (2.1); le vecteur  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$  est un vecteur directeur de la droite, donc le vecteur  $\overrightarrow{AB} = (1, (y_B - y_A)/(x_B - x_A))$  est un vecteur directeur de la droite; ainsi, l'équation est de la forme

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + b.$$



En écrivant que cette droite passe par  $A$  ou  $B$ , on en déduit  $b$ .

- Une autre façon de faire, qui est très proche de la précédente est d'écrire l'équation de droite sous la forme (2.1) et d'écrire que cette droite passe par les deux points  $A$  et  $B$  :

$$\begin{aligned}y_A &= ax_A + b, \\y_B &= ax_B + b,\end{aligned}$$

qui est un système de deux équations à deux inconnues  $a$  et  $b$  que l'on résoud en soustrayant les deux équations :

$$y_B - y_A = a(x_B - x_A)$$

dont on déduit la valeur de  $a$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad (2.5)$$

que l'on réinjecte ensuite dans l'un des équations du système initial pour trouver  $b$ .

Voir exercice 2.7.

EXERCICE 2.7. Déterminer l'équation de la droite passant par  $A(1, 2)$  et  $B(3, 3)$ . Voir éléments de correction page 17.

REMARQUE 2.8. Pour tracer la droite d'équation donnée sous la forme (2.4), il y a plusieurs façons :

- On donne à  $x$  ou  $y$  deux valeurs différentes, on en déduit les valeurs de  $x$  ou  $y$  correspondantes et on trace la droite passant par ces deux points.
- Le vecteur  $\vec{u} = (-b, a)$  est un vecteur directeur de la droite ; on détermine comme précédemment, un des points de la droite et on complète le tracé du vecteur  $\vec{u}$  à partir de ce point.

Pour tracer la droite d'équation donnée sous la forme (2.1), il y a plusieurs façons :

- On donne à  $y$  deux valeurs différentes, on en déduit les valeurs de  $x$  correspondantes et on trace la droite passant par ces deux points.
- On utilise l'ordonnée à l'origine  $b$  et de la pente  $a$  (cf. remarque 2.3). Voir exercice 2.9.

EXERCICE 2.9. Tracer les droites d'équation  $x - 2y + 3 = 0$  et  $y = x/2 + 3/2$ .

## 2.2. Équations de degrés 1 (rappels)

Faisons les quelques rappels suivants :

- Dans une équation de degré un, l'inconnue, souvent notée  $x$  n'apparaît que sous la forme  $x$  : pas de  $x^2$ ,  $\cos x$  ..... toutes les autres nombres sont connus ;
- Pour la résoudre, c'est-à-dire, déterminer la valeur de l'inconnue  $x$ , on isole  $x$  d'un côté et on passe de l'autre côté toutes les quantités connues. On applique les règles suivantes :

- (1) On ne modifie pas une équation en additionnant ou soustrayant une même quantité de chaque côté ; ainsi ( $a, b, c \dots$  désignent des nombres connus et  $x$  est l'inconnue) :

$$\begin{aligned}ax + b = c &\iff ax = c - b, \\ax - b = c &\iff ax = c + b.\end{aligned}$$

En effet, dans la première équation par exemple, on a soustrait  $b$  de chaque côté.

- (2) On ne modifie pas une équation en multipliant ou en divisant par une même quantité *non nulle* de chaque côté ; ainsi, si  $a$  est non nul :

$$\begin{aligned}ax = d &\iff x = \frac{d}{a}, \\ \frac{1}{a}x = d &\iff x = ad.\end{aligned}$$

On se ramènera donc à une équation de la forme

$$ax + b = 0, \quad (2.6)$$

où  $a$  et  $b$  sont connus. Voir question 4 de l'exercice 2.10.

EXERCICE 2.10.

- (1) Dans le cadre de l'exercice 2.1, quel est le prix correspondant à une masse nulle? Est-ce raisonnable?
- (2) Dans le cadre de l'exercice 2.1, trouver la masse correspondant à un prix nul! Est-ce raisonnable?
- (3) Résolvez les équations suivantes (d'inconnue  $x$ ) :

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 0, \\ \frac{8}{7}x - 16 &= 0, \\ -23x + 19 &= 0 \end{aligned}$$

- (4) Pour  $a$  et  $b$  réels connus, résolvez l'équation (2.6).

Voir éléments de correction page 18.

EXERCICE 2.11. On suppose que  $y = ax + b$ . En utilisant l'équation (2.15), montrer graphiquement les deux solutions des équations  $x = 0$  ou  $y = 0$  pour  $a$  non nul. Que se passe-t-il si  $a$  est nul?

Voir éléments de correction page 19.

### 2.3. Paraboles

EXERCICE 2.12.

- (1) Pour chaque valeur de  $x$  appartenant à l'ensemble  $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , calculer

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad (2.7)$$

- (2) Tracer l'ensemble des points de coordonnées  $(x, y)$ . Que remarquez-vous?

Voir éléments de correction page 19.

De façon générale, une parabole est une courbe dont l'équation est du second degré :

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (2.8)$$

Dans un repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  orthogonal, si on trace des points de coordonnées  $(x, y = ax^2 + bx + c)$  ils sont sur cette parabole. Si on trace tous les points de ce type, on obtient la parabole entière

Si le nombre  $a$  est positif, la concavité de la parabole est tournée vers le haut; c'est le cas de l'exercice 2.12. Si le nombre  $a$  est négatif, la concavité de la parabole est tournée vers le bas (Voir par exemple la figure 4.27 page 77).

Si le nombre  $a$  est nul, on retombe sur une droite d'équation  $y = bx + c$ .

### 2.4. Équations de degré 2

Si on cherche à trouver l'intersection de la parabole de l'exercice 2.12 avec l'axe des  $x$ , il nous faut résoudre l'équation de degré 2

$$y = ax^2 + bx + c = 0$$

Si on regarde le tableau 2.3 page 20, on constate que  $x = 1$  et  $x = 3$  sont solutions.

On a déjà vu qu'une équation de degré 1 a toujours une unique solution (si  $a$  est non nul). Pour les équations de degré 2, il y a, selon les cas (si  $a$  est non nul), 0, 1 ou 2 solutions. Pour la résolution générale, consulter par exemple wikipédia à l'adress suivante :

[http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation\\_du\\_second\\_degr%C3%A9](http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_du_second_degr%C3%A9)

Dans cet article, on trouvera une (jolie mais très vieille) méthode géométrique!

Dans le cadre de la biomécanique, on n'aura besoin de résoudre cette équation que dans le cas particulier où  $c = 0$ . Il nous faut résoudre

$$ax^2 + bx = 0,$$

équivalent à

$$x(ax + b) = 0.$$

Un produit de facteur est nul étant nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, on obtient donc  $x = 0$  ou  $x = -b/a$  ( $a$  non nul).

EXERCICE 2.13. Résoudre

$$x^2 - 4x = 0.$$

Voir éléments de correction page 19.

## 2.5. Applications et fonctions

Nous avons vu précédemment deux types d'application associée à des équations de degré un ou deux. De façon générale, une application associe à chaque réel  $x$  un réel (unique)  $y$  noté  $f(x)$ . Dans le cas d'une équation de degré un, on a  $f(x) = ax + b$ . Dans le cas d'une équation de degré deux, on a  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Parfois, il existe des réels où  $f$  n'est pas définie; on dit que  $f$  est une fonction. Par exemple,  $f(x) = 1/x$  n'est définie que pour  $x \neq 0$ .  $f(x) = \sqrt{x}$  n'est définie que pour  $x \geq 0$ .  $f(x) = \arccos(x)$  n'est définie que pour  $x \in [-1, 1]$ .

## 2.6. Équation paramétriques et cartésiennes

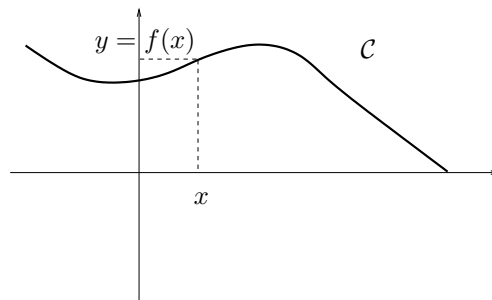


FIGURE 2.2. La courbe  $C$  d'équation cartésienne  $y = f(x)$ .

Nous avons vu précédemment deux types d'équation de courbe, de degré un (associée à une droite) ou de degré deux (associée à une parabole). De façon générale, l'ensemble des points de coordonnées  $(x, y = f(x))$  où  $f$  est une fonction est une courbe. C'est la courbe représentative de la fonction  $f$ . Voir la figure 2.2. L'équation

$$y = f(x) \tag{2.9}$$

est appelée équation cartésienne de la courbe.

On renvoie à l'exercice 2.16 pour un exemple de fonction et de courbe représentative.

Il existe une autre façon<sup>1</sup> de décrire une courbe : on imagine un point matériel dont les coordonnées sont connue en fonction d'un paramètre  $t$ , souvent appelé le temps. Pour chaque valeur de  $t$ , le point de coordonnées

1. Non équivalente

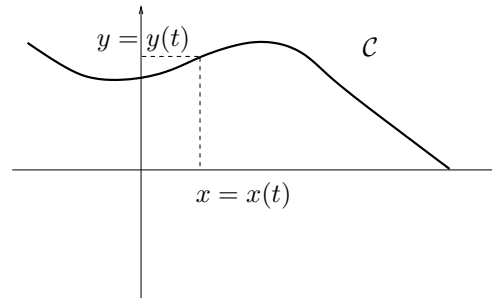


FIGURE 2.3. La courbe  $\mathcal{C}$  d'équations paramétriques  $(x = x(t), y = y(t))$ .

$(x(t), y(t))$  est un point de la courbe  $\mathcal{C}$ . L'ensemble des points  $(x(t), y(t))$  quand  $t$  varie est la courbe  $\mathcal{C}$ . Voir la figure 2.3. Les équations

$$x = x(t), \quad (2.10a)$$

$$y = y(t), \quad (2.10b)$$

sont appelées équations paramétriques de la courbe  $\mathcal{C}$ .

Nous reviendrons sur ces équations paramétriques lors du chapitre 4.

EXERCICE 2.14.

(1) Pour chaque valeur de  $t$  appartenant à l'ensemble  $\{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$ , calculer

$$x(t) = 2t + 1, \quad (2.11a)$$

$$y(t) = 4t^2 - 4t. \quad (2.11b)$$

(2) Tracer l'ensemble des points de coordonnées  $(x(t), y(t))$ . Que remarquez-vous ?

(3) Montrer que les équations paramétriques (2.11) se mettent sous la forme de l'équation cartésienne (2.7).

Voir éléments de correction page 19.

EXERCICE 2.15. En utilisant le chapitre 3, trouver l'équation paramétrique du cercle de centre  $A(2, 1)$  et de rayon  $R = 10$ . Voir éléments de correction page 21.

## 2.7. Exercices supplémentaires

EXERCICE 2.16.

Cet exercice est issu de la page 105 de [Bas10].

	taux (en %)
jusqu'à 5963 €	0.00
de 5964 € à 11896 €	5.50
de 11897 € à 26420 €	14.00
de 26421 € à 70830 €	30.00
au-delà de 70831 €	41.00

TABLE 2.1. les tranches et les taux

Parmi les impôts direct, l'IRPP est l'impôt sur le revenu des personnes physiques. Progressif, il est calculé au moyen d'un barème d'imposition dont les tranches s'élèvent avec le revenu. Les tranches s'élèvent progressivement, mais pour chacune d'elles, le taux d'imposition est fixe. l'impôt est donc à la fois progressif et proportionnel. Les taux et les tranches sont données dans le tableau 2.1. Attention, ceux-ci sont donnés pour l'année 2010 et peuvent varier! Dans un premier temps, il est demandé au contribuable de déterminer son revenu imposable, qui est un entier, à cause de l'arrondi fait; à partir de celui-ci, on détermine tranche par tranche, chacune d'elle ayant un taux donné dans le tableau 2.1. On fait le total des résultats obtenus, ce qui donne le revenu à payer, qui sera ensuite éventuellement divisé par le nombre de parts (en général égal au nombre de personnes travaillant plus une demi part par enfant).

(1) Méditer les trois exemples de calculs ci-dessous :

(a) Le calcul de l'impôt à payer pour un revenu déclaré égal à 2500 € est le suivant : Le revenu déclaré égal à 2500 € est inférieur au montant maximal de la première tranche : 5963 €. Ainsi, le montant de l'impôt est nul.

(b) Le calcul de l'impôt à payer pour un revenu déclaré égal à 12000 € est le suivant :

— calcul de la tranche numéro 1 (première tranche) :  
en deça de 5963 € au taux de 0.00 :

$$(5963 \times 0.00)/100 = 0.00 \text{ €}$$

— calcul de la tranche numéro 2 :  
de 5964 € à 11896 € au taux de 5.50 :

$$(11896 - 5963) \times 5.50/100 = 326.31 \text{ €}$$

— calcul de la tranche numéro 3 (dernière tranche) :  
au delà de 11897 € au taux de 14.00 :

$$(12000 - 11896) \times 14.00/100 = 14.56 \text{ €}$$

En sommant les différents résultats, on obtient pour le montant de l'impôt, un total de 340.87 €

(c) Le calcul de l'impôt à payer pour un revenu déclaré égal à 140000 € est le suivant :

— calcul de la tranche numéro 1 (première tranche) :  
en deça de 5963 € au taux de 0.00 :

$$(5963 \times 0.00)/100 = 0.00 \text{ €}$$

— calcul de la tranche numéro 2 :  
de 5964 € à 11896 € au taux de 5.50 :

$$(11896 - 5963) \times 5.50/100 = 326.31 \text{ €}$$

— calcul de la tranche numéro 3 :  
de 11897 € à 26420 € au taux de 14.00 :

$$(26420 - 11896) \times 14.00/100 = 2033.36 \text{ €}$$

— calcul de la tranche numéro 4 :  
de 26421 € à 70830 € au taux de 30.00 :

$$(70830 - 26420) \times 30.00/100 = 13323.00 \text{ €}$$

— calcul de la tranche numéro 5 (dernière tranche) :  
au delà de 70831 € au taux de 41.00 :

$$(140000 - 70830) \times 41.00/100 = 28359.70 \text{ €}$$

En sommant les différents résultats, on obtient pour le montant de l'impôt, un total de 44042.37 €

- (2) Déterminer les montants de l'impôts correspondant aux revenus suivants : 0 €, 5963 €, 5964 €, 11896 €, 11897 €, 26420 €, 26421 €, 70830 €, 70831 €, 11896 €.
- (3) Tracer un graphique en représentant le montant à payer en fonction du montant déclaré.
- (4) Montrer que, pour chaque tranche, le montant de l'impôt est une fonction affine du montant déclaré. Quel est la pente du segment de droite correspondant à chacun des morceaux ?
- (5) **FS : faire question sur impôt marginal**

Voir éléments de correction page 21.

## 2.8. Correction d'exercices

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 2.1

(1)

masses	prix
1.000	1.700
0.345	0.816
2.656	3.936
1.643	2.568
5.345	7.566

TABLE 2.2. Quelques prix

Voir le tableau 2.2.

(2)

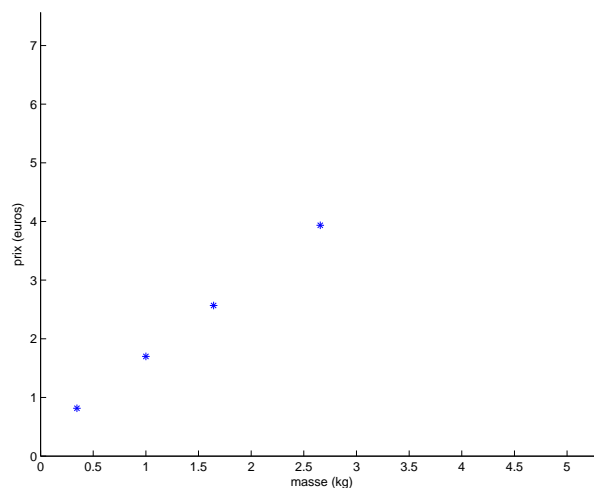


FIGURE 2.4. Le nuage de points (masse,prix).

Voir la figure 2.4.

(3)

Les points sont alignés sur la droite d'équation

$$prix = 1,35 \times masse + 0,35.$$

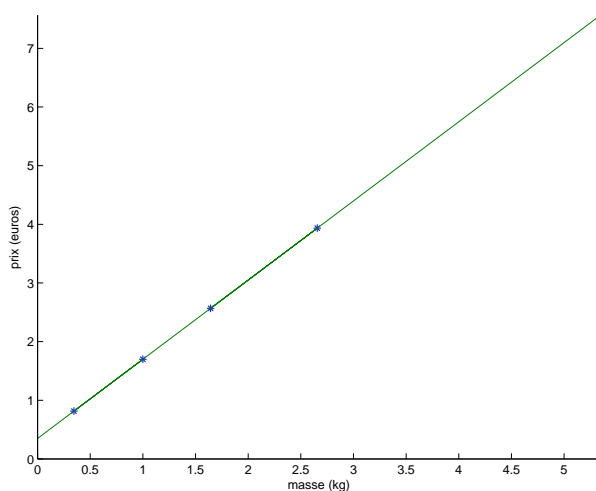


FIGURE 2.5. le nuage de points (masse,prix) et la droite d'équation  $price = 1,35 \times masse + 0,35$ .

Voir la figure 2.5.

(4)

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 2.7

On utilise l'une des méthodes de la remarque 2.6 :

- On considère le point  $M(x, y)$  et on écrit qu'il appartient à la droite  $(AB)$  si et seulement si les vecteurs  $\vec{AM} = (x - 1, y - 2)$  et  $\vec{AB} = (2, 1)$  sont colinéaires : le produit en croix de

$$\begin{pmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 & 2 \\ y - 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est nul, ce qui fournit l'équation de droite sous la forme (2.4) :

$$(x - 1) - 2(y - 2) = 0,$$

soit

$$x - 2y + 3 = 0. \tag{2.12}$$

- On peut aussi écrire que le vecteur  $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2, 1)$  est un vecteur directeur de la droite, dont on déduit que l'équation est de la forme

$$1 \times x - 2y + c = 0.$$

En écrivant que cette droite passe par  $A$ , on obtient

$$1 - 2 \times 2 + c = 0.$$

d'où  $c = 3$  et donc on retrouve (2.12).

- Puisque  $x_A$  est différent de  $x_B$ , on cherche l'équation de droite sous la forme (2.1); le vecteur  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$  est un vecteur directeur de la droite, donc le vecteur  $\overrightarrow{AB} = (1, (y_B - y_A)/(x_B - x_A)) = (1, 1/2)$  est un vecteur directeur de la droite; ainsi, l'équation est de la forme

$$y = \frac{1}{2}x + b.$$

En écrivant que cette droite passe par  $A$ , on en déduit

$$2 = \frac{1}{2} + b,$$

d'où  $b = 3/2$  et donc l'équation est

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \quad (2.13)$$

dont on remarque que c'est équivalent à (2.12).

- Si on écrit (2.5), on a

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{2}.$$

On réinjecte cela dans

$$y_A = ax_A + b$$

dont on tire

$$b = y_A - ax_A = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

et on retrouve donc bien (2.13).

#### ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 2.10

- (1) Si la masse est nulle, on a

$$\text{prix} = 1,35 \times \text{masse} + 0,35 = 0 \times 0 + 0,35 = 0,35,$$

ce qui correspond au prix du sac! Est-ce un moyen intéressant d'acheter des sacs?

- (2) On résoud

$$\text{prix} = 1,35 \times \text{masse} + 0,35 = 0$$

et on trouve

$$\text{masse} = -\frac{0,35}{1,35} \approx -0,2592593,$$

ce qui correspond à une masse négative, mathématiquement acceptable, mais pas physiquement!

- (3) On trouve successivement :

$$\begin{aligned} x &= -\frac{3}{2} = -1,5; \\ x &= \frac{16 \times 7}{8} = 2 \times 7 = 14; \\ x &= \frac{19}{23} \approx 0,826087. \end{aligned}$$

- (4) Deux cas se présentent, selon la nullité de  $a$  :

— Si  $a$  est non nul, (2.6) n'a qu'une solution

$$x = -\frac{b}{a} \quad (2.14)$$

— Si  $a$  est nul, deux cas se présentent, selon la nullité de  $b$  :

— Si  $b$  est non nul, (2.6) n'a aucune solution.

— Si  $b$  est nul, tout réel est solution de (2.6).



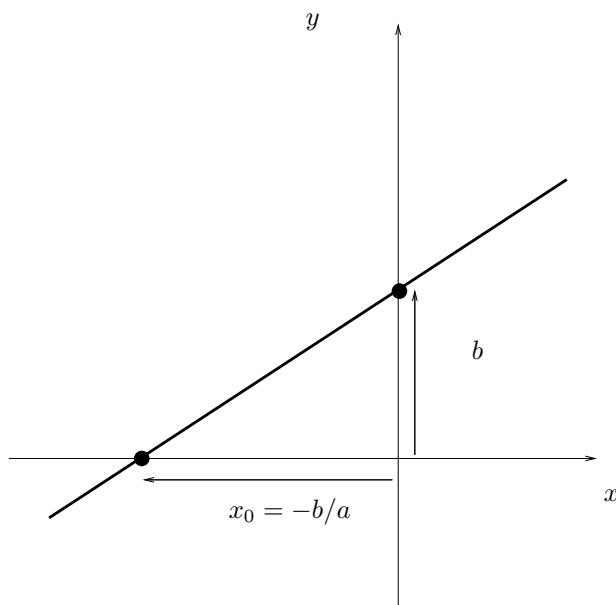


FIGURE 2.6. Les deux solutions de  $x = 0$  ou  $y = 0$  pour  $y = ax + b$  et « l'abscisse à l'origine  $x_0$  »

Voir aussi exercice 2.11.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 2.11

Si  $x = 0$ ,  $y = ax + b$  est égale à l'ordonnée à l'origine de la droite d'équation  $y = ax + b$ .  $y = b$  est l'ordonnée de l'intersection de cette droite avec l'axe des  $y$ . Voir figure 2.6.

Réciproquement, grâce à (2.15), si  $y = 0$ ,  $y = ax + b = 0$  et  $x = -b/a$  (pour  $a$  non nul).  $x = -b/a$  est l'abscisse de l'intersection de cette droite avec l'axe des  $x$ . Voir figure 2.6.

Remarquons que si  $a$  est non nul, (2.6) n'a qu'une solution

$$x = -\frac{b}{a} \quad (2.15)$$

Dans ce cas,  $x_0 = -b/a$  est l'unique solution de

$$y = ax + b \text{ et } y = 0. \quad (2.16)$$

ce qui est l'analogie de (2.2). De même que  $y = b$ , solution de (2.2), ordonnée de l'intersection de la droite avec l'axe des  $y$  et appelée ordonnée à l'origine,  $x = x_0 = -b/a$ , solution de (2.16), abscisse de l'intersection de la droite avec l'axe des  $x$ , pourrait être légitimement appelée « abscisse à l'origine ». Si  $a$  est nul, la droite est parallèle à l'axe des  $x$  et le coupe soit en aucun point soit en infinité de points.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 2.12

(1)

Voir le tableau 2.3 page suivante.

(2)

Voir la figure 2.7 page suivante. Les points appartiennent à une courbe, appelée parabole d'équation  $y = x^2 - 4x + 3$ .

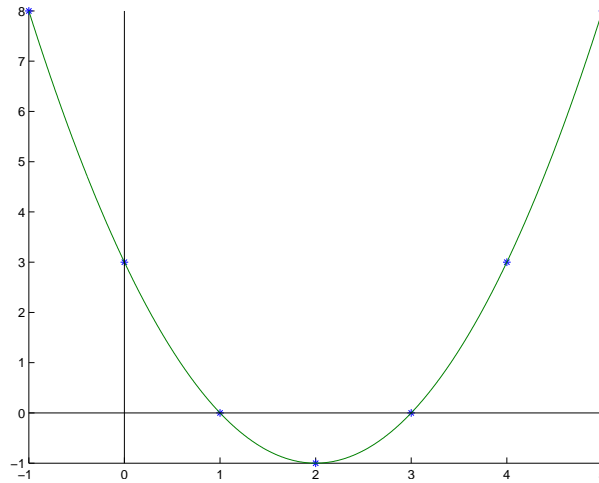
ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 2.13 On trouve  $x = 0$  ou  $x = 4$ .

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 2.14

(1)

Voir le tableau 2.4 page suivante.

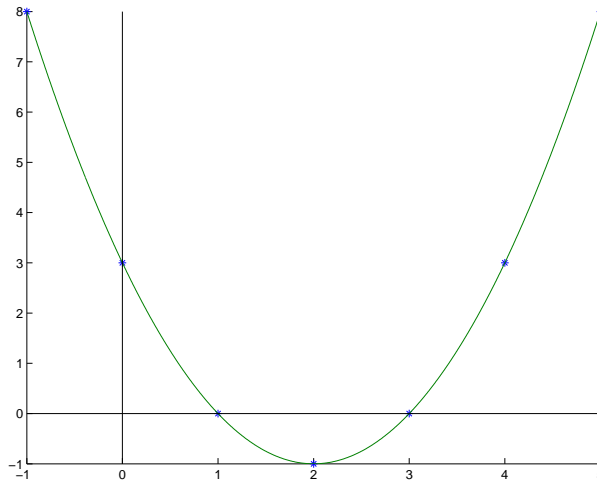
$x$	$y$
-1.00	8.00
0.00	3.00
1.00	0.00
2.00	-1.00
3.00	0.00
4.00	3.00
5.00	8.00

TABLE 2.3. Les valeurs de  $x$  et de  $y = x^2 - 4x + 3$ FIGURE 2.7. Le nuage de points  $(x, y)$  et la parabole d'équation  $x^2 - 4x + 3$ .

$t$	$x(t)$	$y(t)$
-1.00	-1.00	8.00
-0.50	0.00	3.00
0.00	1.00	0.00
0.50	2.00	-1.00
1.00	3.00	0.00
1.50	4.00	3.00
2.00	5.00	8.00

TABLE 2.4. Les valeurs de  $t$ ,  $x(t)$  et  $y(t)$ 

(2)

FIGURE 2.8. Le nuage de points  $(x(t), y(t))$ .

Voir la figure 2.8, qui est la même que la figure 2.7 page ci-contre! Les points appartiennent à une courbe qui semble être la même parabole que celle de la figure 2.7 page précédente.

- (3) Montrons donc que les équations paramétriques (2.11) se mettent sous la forme de l'équation cartésienne (2.7). Dans l'équation (2.11a) éliminons  $t$  au profit de  $x(t)$  :

$$t = \frac{x(t) - 1}{2} = \frac{x - 1}{2}$$

Réinjectons cette valeur dans (2.11b) et utilisons les résultats de l'annexe A :

$$\begin{aligned} y &= y(t), \\ &= 4t^2 - 4t, \\ &= 4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{x-1}{2}\right), \\ &= (x-1)^2 - 2(x-1), \\ &= x^2 - 2x + 1 - 2x + 2, \\ &= x^2 - 4x + 3, \end{aligned}$$

ce qui est exactement l'équation cartésienne (2.7).

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 2.15 On écrit qu'il existe un angle  $\theta \in [0, 2\pi]$  tel que

$$\begin{aligned} x(\theta) - x_A &= R \cos \theta, \\ y(\theta) - y_A &= R \sin \theta, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} x(\theta) &= 10 \cos \theta + 2, \\ y(\theta) &= 10 \sin \theta + 1. \end{aligned}$$

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 2.16

(1)

revenu	impôt
0	0.00
5963	0.00
5964	0.05
11896	326.31
11897	326.45
26420	2359.67
26421	2359.97
70830	15682.67
70831	15683.08
115241	33891.18

TABLE 2.5. Les différents montants des impôts à payer

(2) Voir le tableau 2.5.

(3)

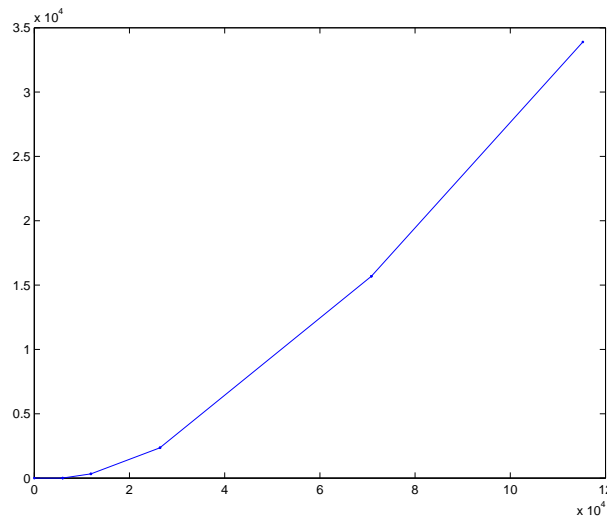


FIGURE 2.9. Le montant de l'impôt en fonction du revenu.

Voir les graphiques 2.9. Attention, puisque le montant déclaré est un entier, il y a des trous dans le graphe : voir figure 2.10.

(4) Pour chaque tranche, le montant de l'impôt est égal à

$$p = tr + b,$$

où  $r$  est le revenu entier déclaré et  $t$  le taux de la tranche considéré.  $b$  est le montant de l'impôt correspondant à la plus grande valeur de la tranche qui précède. On a donc une fonction affine par morceaux.

(5) **FS : faire corrigé en s'aidant de**

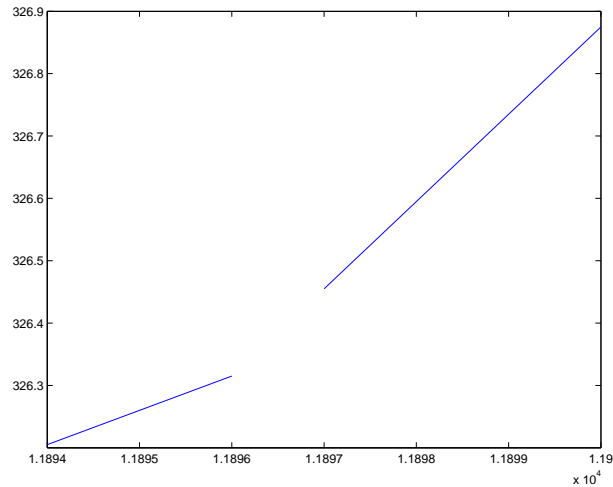


FIGURE 2.10. Le montant de l'impôt en fonction du revenu (zoom).

(a) Le calcul de l'impôt à payer pour un revenu déclaré égal à 11896 € est le suivant :

- calcul de la tranche numéro 1 (première tranche) :  
en deçà de 5963 € au taux de 0.00 :

$$(5963 \times 0.00)/100 = 0.00 \text{ €}$$

- calcul de la tranche numéro 2 (dernière tranche) :  
au delà de 5964 € au taux de 5.50 :

$$(11896 - 5963) \times 5.50/100 = 326.31 \text{ €}$$

En sommant les différents résultats, on obtient pour le montant de l'impôt, un total de 326.31 €

(b) Le calcul de l'impôt à payer pour un revenu déclaré égal à 11897 € est le suivant :

- calcul de la tranche numéro 1 (première tranche) :  
en deçà de 5963 € au taux de 0.00 :

$$(5963 \times 0.00)/100 = 0.00 \text{ €}$$

- calcul de la tranche numéro 2 :  
de 5964 € à 11896 € au taux de 5.50 :

$$(11896 - 5963) \times 5.50/100 = 326.31 \text{ €}$$

- calcul de la tranche numéro 3 (dernière tranche) :  
au delà de 11897 € au taux de 14.00 :

$$(11897 - 11896) \times 14.00/100 = 0.14 \text{ €}$$

En sommant les différents résultats, on obtient pour le montant de l'impôt, un total de 326.45 €



## Trigonométrie

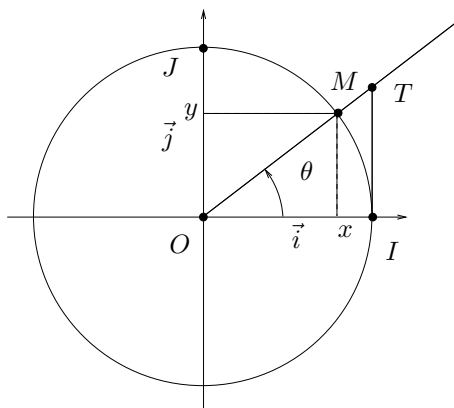


FIGURE 3.1. Le cercle trigonométrique.

Dans tout ce chapitre, les angles sont orientés dans le sens trigonométrique (antihoraire).

On rappelle la définition des lignes trigonométriques (voir figure 3.1) :

On se donne  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct (voir chapitre 1).

Soit  $\theta$  un angle (en radians ou en degrés). On considère le point  $M$ , de coordonnées  $x$  et  $y$  telles que

$$\left( \vec{i}, \widehat{OM} \right) = \theta.$$

Le triangle<sup>1</sup>  $0xM$  est rectangle en  $x$  ; ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (3.1)$$

Le radian est récent dans les mathématiques ; pourquoi l'utilise-t-on ? Voir par exemple <http://fr.wikipedia.org/wiki/Radian>

◇

Par définition, on a

$$x = \cos \theta, \quad (3.2a)$$

$$y = \sin \theta \quad (3.2b)$$

Cette équation fournit donc  $x$  et  $y$  en fonction de  $\theta$ . D'après (3.1), on obtient la première formule de trigo<sup>2</sup> :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \quad (3.3)$$

Ici, on note  $\cos^2 \theta$  à la place de  $(\cos \theta)^2$ .

---

1. Par abus de notation, on confond  $x$  et le point  $(x, 0)$   
 2. Et elles sont légions !

Réciproquement, si deux réels  $x$  et  $y$  de  $[-1, 1]$  vérifient (3.1), il existe un unique  $\theta$  vérifiant (3.2). Cet angle est défini modulo  $2\pi$  radians ou 360 degrés. Grâce à la calculatrice, il faudrait utiliser les fonction réciproques des fonctions cos et sin, en faisant attention au quart de plan où se trouve le point  $M$  !

On rappelle que l'on passe des degrés aux radians en utilisant la mesure d'un angle plat :  $180^\circ$  ou  $\pi$  radians. On a donc, d'après la règle de trois

$$\begin{aligned}\theta_o &= \theta_r \times \frac{180}{\pi}, \\ \theta_r &= \theta_o \times \frac{\pi}{180}.\end{aligned}$$

Remarquons aussi, que si  $\theta$  n'est pas un multiple impair d'un angle droit  $\pi/2$ , la droite  $(0M)$  coupe la droite perpendiculaire à  $(OI)$  passant par  $I$  au point  $T$  (voir figure 3.1). Notons  $t$  l'ordonnée de  $T$ . D'après le théorème de Thalès, il vient

$$\frac{xM}{IT} = \frac{Ox}{OI},$$

soit

$$\frac{\sin \theta}{t} = \frac{\cos \theta}{1}, \quad (3.4)$$

et donc

$$t = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}. \quad (3.5)$$

On a donc une lecture graphique de la tangente, définie comme

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}. \quad (3.6)$$

On peut montrer, comme conséquence du théorème de Thalès la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1.

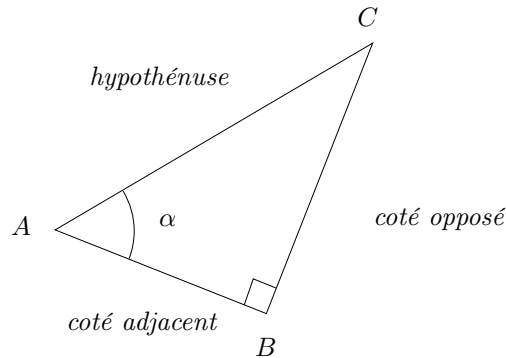


FIGURE 3.2. L'angle  $\alpha$  dans la triangle rectangle  $ABC$ .

On considère un triangle rectangle  $ABC$  et  $\alpha$  l'un des deux angles non droits (voir figure 3.2). On a, par rapport à cet angle :

$$\cos \alpha = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypothénuse}}, \quad (3.7a)$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypothénuse}}, \quad (3.7b)$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}}. \quad (3.7c)$$



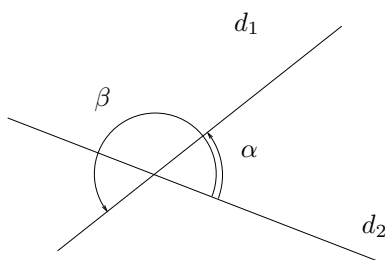


FIGURE 3.3. Angle de droites.

REMARQUE 3.2. On peut aussi introduire des angles de vecteurs, définis modulo  $2\pi$  ou  $360$ .

De même, on parle d'angle de droites, définis cette fois-ci modulo  $\pi$  ou  $180$ . Sur la figure 3.3, on a représenté les deux mesures identiques  $\alpha$  et  $\beta$  de l'angle entre les droites  $d_1$  et  $d_2$ .

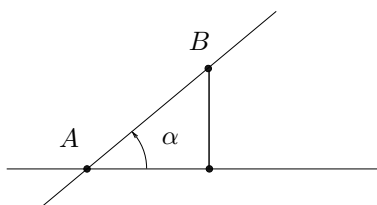


FIGURE 3.4. Angle de droite et l'horizontale.

Grâce à la proposition 3.1, on peut montrer (voir figure 3.4) que si  $\alpha$  désigne l'angle entre la droite  $(AB)$  et l'horizontale (portée par  $\vec{i}$ ), alors

$$\tan \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}. \quad (3.8)$$

On retrouve donc (1.9).

REMARQUE 3.3. Grâce à (3.8) et la notion de pente d'une droite vue au cours du chapitre 2, on peut maintenant comprendre le rapport entre la pente d'une droite et celle d'une route, donnée en pourcentage et qui coïncident. En effet, la notion de pente  $a$  d'une droite, signifie que si on se déplace d'un pas vers la droite, on monte de  $a$  sur la droite (si  $a$  est positif) ou on descend de  $|a|$  (si  $a$  est négatif). Pour une route, c'est identique : la pente de la route (si elle est droite) est la pente de la droite. Puisque'elle est exprimée en pourcentage, une pente de  $p\%$  signifie que si on se déplace de 100 m., à l'horizontal (et non en suivant la route!), alors on monte de  $p$  m. Ainsi, d'après (1.9) ou (3.8) appliqués avec  $y_B - y_A = p$  et  $x_B - x_A = 100$ , on a alors le lien entre la pente  $p$  (en pourcentage) et l'angle  $\alpha$  :

$$\tan \alpha = \frac{p}{100}.$$

soit encore

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{p}{100} \right). \quad (3.9)$$

Par exemple une pente de valeur  $p = 5\%$  correspond à un angle donné par

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{5}{100} \right) = 2.8624^\circ. \quad (3.10)$$

Voir aussi le tableau 3.1 page suivante, qui montre l'avantage du radian par rapport au degré !

Pentes (%)	Angles (degrés)	Angles (radians)	Pentes
100	45	0.78539816	1
15	8.53076561	0.14888995	0.15
5	2.86240522	0.04995839	0.05
1	0.57293870	0.00999967	0.01
0.2	0.11459141	0.00200000	0.0020
0	0	0	0

TABLE 3.1. Le rapport entre pente et angle, en degré ou en radian

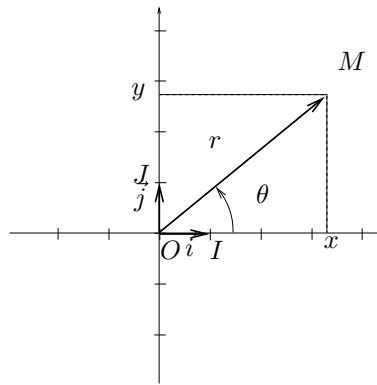


FIGURE 3.5. Les coordonnées cartésiennes et polaires

DÉFINITION 3.4. On évoque aussi les coordonnées polaire  $(r, \theta)$  de la façon suivante (voir figure 3.5) : un point  $M$  de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  a pour coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $r$  est la distance  $OM$  et  $\theta$  l'angle  $(\vec{i}, \widehat{OM})$ . On a donc

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.11a)$$

$$x = r \cos \theta, \quad (3.11b)$$

$$y = r \sin \theta \quad (3.11c)$$

Si  $x$  et  $y$  sont connus, on détermine d'abord  $r$ . On cherche ensuite l'unique angle  $\theta$  vérifiant

$$\frac{x}{r} = \cos \theta, \quad (3.12a)$$

$$\frac{y}{r} = \sin \theta \quad (3.12b)$$

ce qui est possible puisque les deux nombres  $X = x/r$  et  $Y = y/r$  vérifient  $X^2 + Y^2 = 1$ .

Remarquons que les équations (3.2a) et (3.2b) sont un cas particulier de (3.11b) et (3.11c).

La trigonométrie, associée à une calculatrice, constitue en fait « un rapporteur numérique ». En effet, elle nous donne les liens qui existent entre les cotés et les angles dans un triangle. Avec une calculatrice, elle permet de tracer ou de mesurer des angles, sans rapporteur !

(1)

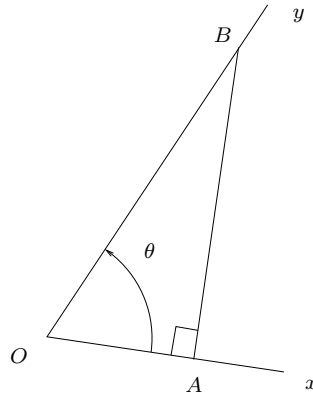


FIGURE 3.6. Mesurer un angle avec la trigonométrie

En effet, si un angle  $\theta = (\widehat{Ox, Oy})$  est donné sur une figure (voir figure 3.6), on trace un triangle  $OAB$  rectangle et on cherche à déterminer  $\theta$  vérifiant

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{OA}{OB}, \\ \sin \theta &= \frac{AB}{OB}\end{aligned}$$

grâce aux fonctions réciproques.

EXERCICE 3.5.

Mesurer de cette façon l'angle  $\theta$  de la figure 3.6.

(2)

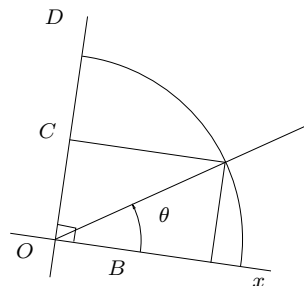


FIGURE 3.7. Tracer un angle avec la trigonométrie

Réciproquement, si on veut tracer un angle  $\theta$  donné, à partir d'une demi-droite  $[Ox)$  (voir figure 3.7), on calcule son cosinus (resp. sinus) ; on trace ensuite un cercle  $C$  de centre  $O$  et de rayon  $R$  quelconque, puis on trace le point  $B \in [Ox)$  (resp. le point  $C$  sur  $D$ , la droite perpendiculaire  $[Ox)$ , passant par  $O$ ) tel que  $OB = R \cos \theta$  (resp.  $OC = R \sin \theta$ ). Enfin, on trace  $M$  l'intersection de la droite passant par  $B$  (resp.  $C$ ) perpendiculaire à  $[Ox)$  (resp.  $D$ ) et du cercle  $C$ . On a alors

$$\theta = [\widehat{Ox, OM}.$$

Sans compas on peut aussi utiliser simultanément le sinus et le cosinus, ou alors la tangente seule.

EXERCICE 3.6.

Tracer de même un angle égal à  $27,3^\circ$

◇

Rappelons pour finir une règle empirique pour se rappeler les lignes trigonométriques de quelques angles remarquables : on remplit successivement un tableau de la manière suivante (voir calcul de ces lignes trigonométriques particulières) dans l'exercices 3.11) :

$\theta$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\theta$ (°)	0	30	45	60	90
$\cos \theta$	4	3	2	1	0
$\sin \theta$	0	1	2	3	4

$\theta$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\theta$ (°)	0	30	45	60	90
$\cos \theta$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{0}$
$\sin \theta$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$

$\theta$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\theta$ (°)	0	30	45	60	90
$\cos \theta$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$
$\sin \theta$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$

$\theta$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\theta$ (°)	0	30	45	60	90
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin \theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

## EXERCICE 3.7.

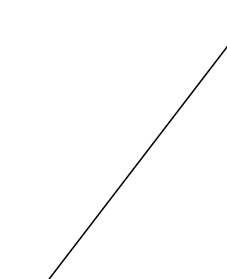


FIGURE 3.8. Une échelle.

Une échelle, qui mesure 5 m., est adossée à un mur. La distance du pied de l'échelle au pied du mur est de 2,5 m. Donner l'angle entre l'échelle et le sol.

Voir éléments de correction page 32.

## EXERCICE 3.8.

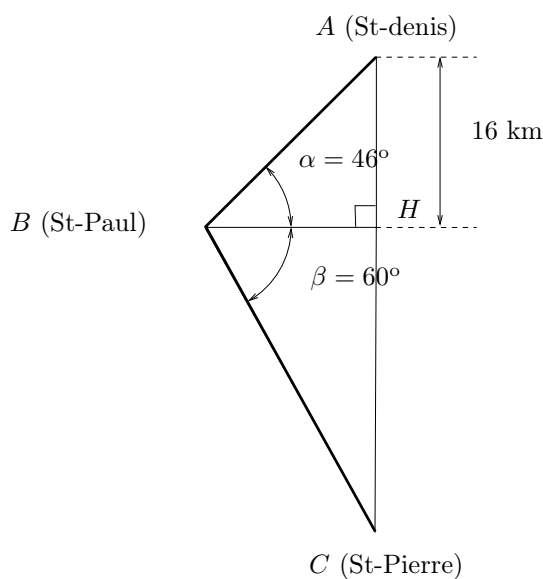


FIGURE 3.9. Le trajet Saint-Denis Saint-Pierre via Saint-Paul.

Un oiseau veut aller de St-Denis à St-Pierre en passant par St-Paul (distance en gras sur la figure 3.9).

- (1) Tracer sur une feuille la figure 3.9, avec une échelle appropriée, pour vérifier que le problème est bien posé.
- (2) Calculer la distance totale parcourue par l'oiseau.

Voir éléments de correction page 32.

## EXERCICE 3.9.

Refaire la même chose pour la figure 3.10 page suivante, sans aucun calcul de trigonométrie! Seule la valeur de  $\alpha$  a changé!

Voir éléments de correction page 33.

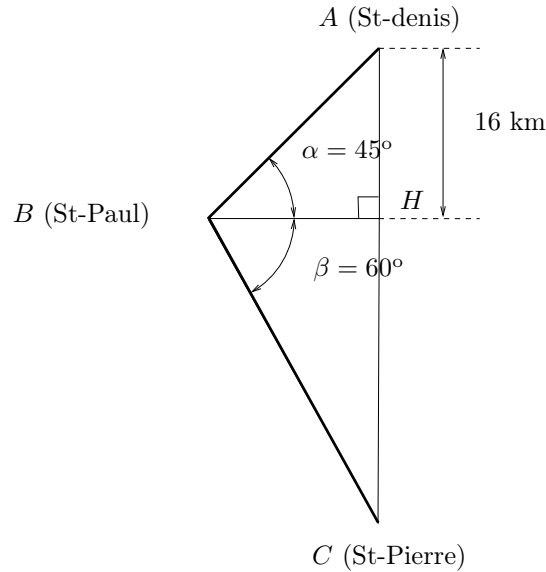


FIGURE 3.10. Le trajet Saint-Denis Saint-Pierre via Saint-Paul.

## EXERCICE 3.10.

Donnons une application directe de la trigonométrie, qui sera utilisée en biomécanique. On se donne une vitesse  $\vec{v}_0$  de norme  $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$  et qui fait un angle  $\alpha = 30^\circ$  avec l'horizontale.

- (1) Faire une figure et y tracer  $v_{0x}$  et  $v_{0y}$ , les composantes horizontales et verticales de la vitesse, c'est-à-dire, l'abscisse et l'ordonnée du vecteur  $\vec{v}_0$ .
- (2) Calculer  $v_{0x}$  et  $v_{0y}$ .

Voir éléments de correction page 34.

## EXERCICE 3.11.

- (1) (a) Tracer, à la règle est au compas, un triangle équilatéral de côté 1.  
(b) En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de  $\pi/3$  (ou  $60^\circ$ ).
- (2) Faites de même pour le tracer et le calcul des lignes trigonométriques de  $\pi/6$  et de  $\pi/4$ .

Voir éléments de correction page 34.

## 3.1. Correction d'exercices

## ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 3.7

D'après la propriété 3.1 page 26, on a

$$\cos \alpha = \frac{2,5}{5} = 0,5.$$

En calculant le rapport de droite et en utilisant la fonction réciproque de la fonction sinus, on trouve (attention aux unités)

$$\alpha = 60^\circ$$

## ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 3.8

- (1) En utilisant le fait que dans le triangle  $ABH$ , la somme des deux angles non droits est égale à  $\pi/2$ , on peut tracer la figure : on trace successivement et dans cet ordre :  $H$ ,  $A$ ,  $B$ , puis  $C$ .

(2) Dans le triangle rectangle  $AHB$ , on a

$$\sin \alpha = \frac{AH}{AB},$$

et donc

$$AB = \frac{AH}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(46)} = 22,242$$

On en déduit ensuite de même

$$BH = \frac{AH}{\tan \alpha} = \frac{16}{\tan(46)} = 15,451$$

De même, dans le triangle rectangle  $BHC$ , on a

$$\cos \beta = \frac{BH}{BC},$$

et donc

$$BC = \frac{BH}{\cos \beta} = \frac{15,451}{\cos(60)} = 30,902$$

et donc, on a (en km),  $L = AB + BC$ , soit encore

$$L = 53,144. \quad (3.13)$$

REMARQUE 3.12. En biomécanique, on vous demandera de faire un calcul littéral en gardant les symboles « le plus longtemps possible » et de ne faire l'application numérique à la fin. Il serait donc préférable pour cet exercice d'écrire plutôt pour le corrigé de la question 2 :

$$AB = \frac{AH}{\sin \alpha},$$

puis

$$BH = \frac{AH}{\tan \alpha},$$

et enfin

$$BC = \frac{BH}{\cos \beta},$$

qui devient donc

$$BC = \frac{AH}{\tan \alpha \cos \beta}.$$

Ainsi,  $L = AB + BC$  et donc

$$L = \frac{AH}{\sin \alpha} + \frac{AH}{\tan \alpha \cos \beta}. \quad (3.14)$$

soit encore

$$L = AH \left( \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha \cos \beta} \right). \quad (3.15)$$

L'application numérique fournit alors

$$L = 16 \times \left( \frac{1}{\sin(46)} + \frac{1}{\tan(46) \cos(60)} \right), \quad (3.16)$$

ce qui donne naturellement la même valeur que (3.13).

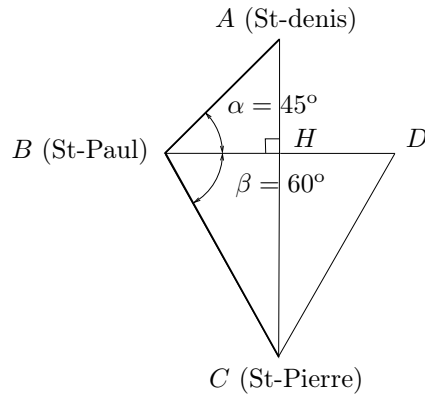
ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 3.9

L'angle  $\widehat{HAB}$  est égal à  $\alpha = 45$  ; ainsi,  $HAB$  est isocèle et

$$BH = 16 \quad (3.17)$$

Grâce au théorème de Pythagore, on en déduit que

$$AB = 16 \times \sqrt{2} = 22,627.$$

FIGURE 3.11. la triangle  $BDC$  équilatéral.

Par ailleurs, si l'on trace le point  $D$  symétrique de  $B$  par rapport à  $(AC)$  (voir figure 3.11), on constate que, par symétrie,  $\widehat{HDC} = \beta = 60^\circ$ , donc  $BDC$  est équilatéral et donc, grâce à (3.17),

$$BC = BD = 2BH = 32$$

et donc

$$L = AB + BC = 22,62753 + 32 = 54,627. \quad (3.18)$$

ce qui est légèrement différent de (3.13).

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 3.10

Le « triangle »  $v_{0x}$ ,  $\vec{v}_0$  et  $v_{0y}$  est rectangle. On en tire

$$\cos \alpha = \frac{v_{0x}}{v_0},$$

$$\sin \alpha = \frac{v_{0y}}{v_0},$$

et donc

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 10 \cos 30 = 8,6602,$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 10 \sin 30 = 5.$$

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 3.11

**taper correction FS**

Voir aussi le calcul de  $2\pi/5$  et de la construction du pentagone, p. 153 de [Bas04].



## Dérivée, vitesse, accélération, intégrale

On pourra aussi consulter le chapitre 1 de [Bas14].

La plupart de exercices ont des éléments de correction, tous rassemblés en section 4.5.

### 4.1. Monodimensionnel

#### 4.1.1. Rappels sur vitesse

Commençons tout de suite par un exercice simple sur les vitesses (moyennes).

EXERCICE 4.1.

Cet exercice est issu de la page 144 de [Bas10].

Un amoureux de la marche à pied est invité dans le Pas-de-Calais, au bord de la Manche. Le trajet comprend une partie

- en train corail (260 km en 2h 15 min)
- en TER (27 km en 20 min)
- à pied (5 km en 1h 10 min)

- (1) Déterminer la vitesse moyenne du voyageur sur chaque partie du trajet.
- (2) Déterminer la vitesse moyenne du voyageur sur l'ensemble du trajet.

Voir éléments de correction page 59.

Nous allons traiter maintenant, sous formes de petits exercices, trois exemples pour tenter d'introduire la notion de vitesse et de dérivée et d'accélération.

#### 4.1.2. Vitesse, dérivée

EXERCICE 4.2.

Nous considérons une voiture automobile, roulant en ligne droite et munie d'un compteur kilométrique extrêmement précis. Au début de l'étude, quand le chronomètre est déclenché (à  $t = 0$ ), le véhicule est au kilomètre zéro.

Nous donnons, en figure 4.1 page suivante, la distance, la vitesse et l'accélération au cours du temps (en kilomètre et en heure, sans notation en base 60, pour simplifier le calcul). Le but de cet exercice est de donner une approche empirique de la notion de vitesse et d'accélération dans un cas particulier.

- (1) Commentez de façon qualitative le graphique du haut de la figure 4.1.
- (2)

On donne maintenant, quelques relevés kilométriques au cours du temps dans la tableau 4.1 page suivante.

Tracer, à partir de ces valeurs, une courbe (temps, déplacement). Commentez!

- (3) Peut-on déduire de l'alignement des points, la relation entre la distance  $d$  et temps  $t$ ?
- (4) Calculer la vitesse moyenne de la voiture entre les instants numérotés 1 et 2, 1 et 3, 1 et 10, 5 et 10, 6 et 10. Qu'observe-t-on?

Voir éléments de correction page 59.

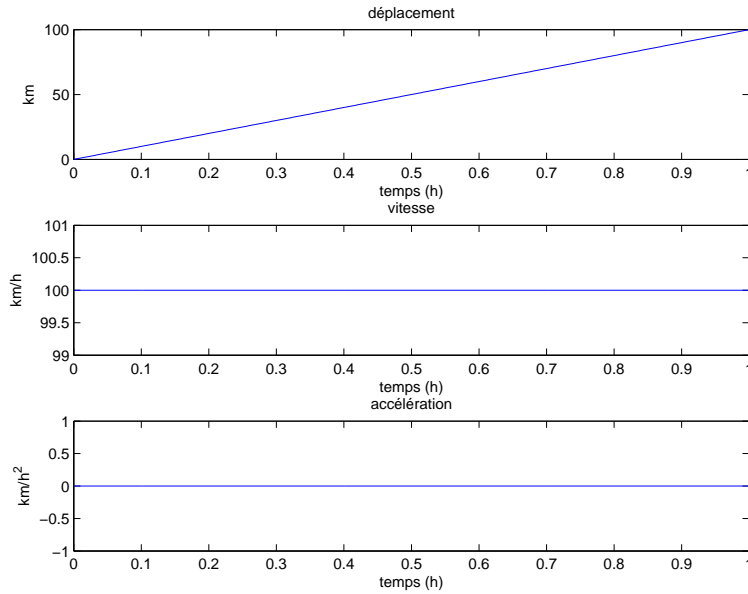


FIGURE 4.1. Distance, vitesse et accélération.

indice	temps	déplacement
1	0.000	0.000
2	0.119	11.900
3	0.187	18.690
4	0.276	27.600
5	0.382	38.160
6	0.439	43.870
7	0.498	49.840
8	0.585	58.530
9	0.646	64.630
10	0.680	67.970
11	0.960	95.970
12	1.000	100.000

TABLE 4.1. Quelques déplacements mesurés

Retenons de cet exercice, la propriété suivante :

PROPOSITION 4.3. *Si la vitesse est constante et notée  $v_0$ , alors la distance parcourue est égale à*

$$d(t) = v_0 t + d_0, \quad (4.1)$$

où  $d_0$  désigne la distance parcourue à  $t = 0$ . La vitesse moyenne sur tout intervalle est égale à  $v_0$ .

REMARQUE 4.4. Attention, on travaillera avec les unités usuelles "km/h" ou "km h<sup>-1</sup>" alors que les USI sont en "m/s" ou "m s<sup>-1</sup>", unité utilisée en biomécanique.

## EXERCICE 4.5.

Comme dans l'exercice 4.2, nous considérons une voiture automobile, roulant en ligne droite et munie d'un compteur kilométrique extrêmement précis.

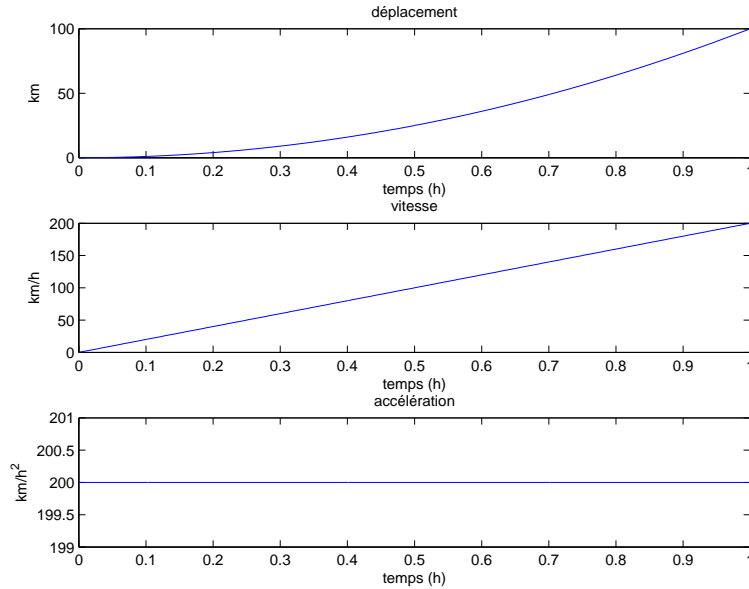


FIGURE 4.2. Distance, vitesse et accélération.

Nous donnons, en figure 4.2, la distance, la vitesse et l'accélération au cours du temps

(1)

indice	temps	déplacement
1	0.000	0.000
2	0.111	1.235
3	0.222	4.938
4	0.333	11.111
5	0.444	19.753
6	0.556	30.864
7	0.667	44.444
8	0.778	60.494
9	0.889	79.012
10	1.000	100.000

TABLE 4.2. Quelques déplacements mesurés

On donne maintenant, quelques relevés kilométriques au cours du temps dans la tableau 4.2.

Tracer, à partir de ces valeurs, une courbe (temps, déplacement). Commentez !

(2) Calculer la vitesse moyenne de la voiture entre les instants numérotés 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5, 5 et 6, 1 et 10. Qu'observe-t-on ?

Interprétez graphiquement ces valeurs de vitesses en terme de pentes de droites.

- (3) Nous allons maintenant faire un zoom de la courbe et donner les valeurs des déplacement mesurés autour de la valeur  $t_0 = 0.4563$  (choisie arbitrairement).

indice	temps	déplacement
1	0.4563000000	20.8209690000
2	0.9563000000	91.4509690000
3	0.8563000000	73.3249690000
4	0.7563000000	57.1989690000
5	0.6563000000	43.0729690000
6	0.5563000000	30.9469690000
7	0.5063000000	25.6339690000
8	0.4663000000	21.7435690000
9	0.4613000000	21.2797690000
10	0.4573000000	20.9123290000
11	0.4564000000	20.8300960000
12	0.4563100000	20.8218816100
13	0.4563010000	20.8210602601
14	0.4563001000	20.8209781260

TABLE 4.3. Quelques déplacements mesurés

Voir le tableau 4.3.

- (a) Comme précédemment calculer la vitesse moyenne de la voiture entre les instants numérotés 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, ..., 1 et 13, 1 et 14.

Qu'observe-t-on ?

- (b) Interprétez graphiquement ces valeurs de vitesses en terme de pentes de droites.

- (c) On admet ici que la vitesse exacte à l'instant  $t_0$  vaut

$$v(t_0) = 200t_0. \quad (4.2)$$

Comparez cette valeur aux différentes valeurs de vitesses moyennes calculées précédemment. Conclure.

Voir éléments de correction page 59.

Retenons la propriété suivante :

PROPOSITION 4.6. *Si le déplacement  $x$  dépend du temps, à chaque instant  $t$ , la vitesse (instantanée)  $v(t)$  est obtenue comme la limite des vitesses moyennes sur des intervalles  $[t, t + h]$  quand  $h$  tend vers 0 :*

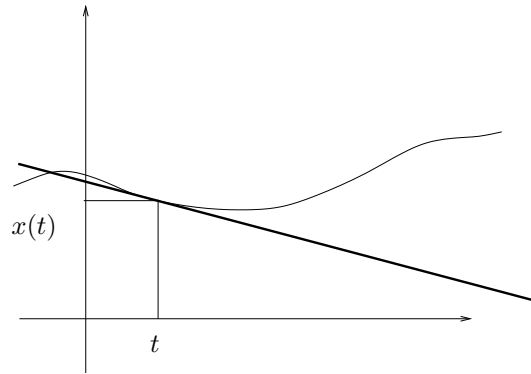
$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}. \quad (4.3)$$

On écrit

$$v(t) = x'(t) \quad (4.4)$$

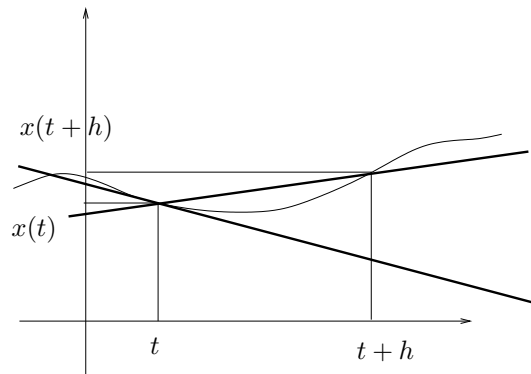
Cette quantité peut être approchée par

$$v(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \quad (4.5)$$

FIGURE 4.3. La tangente à la courbe au point  $(t, x(t))$ 

pour  $h$  assez petit.

Graphiquement, la tangente est la droite qui localement, ne touche la courbe qu'en un seul point (voir figure 4.3). C'est la limite quand  $h$  tend vers zéro de la droite qui passe par les points  $(t, x(t))$  et  $(t+h, x(t+h))$  (voir figure 4.4).

FIGURE 4.4. La droite passant par  $(t, x(t))$  et  $(t+h, x(t+h))$  et la tangente à la courbe au point  $(t, x(t))$ 

On utilise parfois la notation différentielle pour réécrire (4.4) sous la forme

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t). \quad (4.6)$$

Cette notation est justifiée par le fait que  $dx$  et  $dt$  représentent de petits accroissements :

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}.$$

REMARQUE 4.7. Notons aussi que la quantité  $(x(t+h) - x(t))/h$  représente la pente (voir chapitre 2) de la droite passant par les points  $(t, x(t))$  et  $(t+h, x(t+h))$  (voir figure 4.4) et que la quantité  $dx/dt$  représente la pente de la tangente à la courbe en  $t$ .

REMARQUE 4.8. On remplacera parfois (4.5) par

$$v(t) \approx \frac{x(t+h/2) - x(t-h/2)}{h}, \quad (4.7)$$

égalité qui est, en théorie, plus précise.

REMARQUE 4.9. Cette vitesse instantannée est celle qui est donnée par le compteur d'un vélo ou d'une voiture. Les premiers compteurs étaient munis d'une petite dynamo qui transforme la vitesse en courant. Ils ont ensuite été remplacés par des appareils électroniques.

EXERCICE 4.10. Sur les figure 4.20 page 74 et 4.21 page 75, déterminer les pentes des droites et justifier la remarque 4.7.

EXERCICE 4.11 (facultatif). On cherche à montrer rigoureusement l'égalité (4.2) en utilisant l'expression exacte du déplacement

$$x(t) = 100t^2. \quad (4.8)$$

Montrer que

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = 100(2t+h).$$

et conclure.

Voir éléments de correction page 61.

Retenons aussi la propriété suivante :

PROPOSITION 4.12. *Là où la vitesse est positive (resp. négative), le déplacement est croissant (resp. décroissant).*

EXERCICE 4.13 (facultatif). Vérifier la proposition 4.12 pour l'exercice 4.5 page 37.

### 4.1.3. Accélération

EXERCICE 4.14. Justifier la nullité de l'accélération (voir figure 4.1 page 36) dans le cadre de l'exercice 4.2 page 35.

EXERCICE 4.15. On reprend maintenant l'exercice 4.10.

Comme la notion de vitesse moyenne définie par (4.56), on introduit l'accélération moyenne entre  $t_j$  et  $t_i$  par

$$a = \frac{v_j - v_i}{t_j - t_i} \quad (4.9)$$

indice	temps	vitesse
1	0.000	0.000
2	0.119	23.800
3	0.187	37.380
4	0.276	55.200
5	0.382	76.320
6	0.439	87.740
7	0.498	99.680
8	0.585	117.060
9	0.646	129.260
10	0.680	135.940
11	0.960	191.940
12	1.000	200.000

TABLE 4.4. Quelques vitesses mesurées

À partir du tableau 4.4 page ci-contre, déterminer les accélérations moyennes de la voiture entre les instants numérotés 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5, 5 et 6, 1 et 10. Qu'observe-t-on ?

REMARQUE 4.16. Attention, on travaillera avec les unités usuelles "km/h<sup>2</sup>" ou "km h<sup>-2</sup>" alors que les USI sont en "m/s<sup>2</sup>" ou "m s<sup>-2</sup>", unité utilisée en biomécanique.

Voir éléments de correction page 61.

On peut alors donner l'analogie de ce qu'on a vu en section 4.1.2 : on passe de la vitesse à l'accélération de la même façon que du déplacement à la vitesse.

PROPOSITION 4.17. Si la vitesse  $v$  dépend du temps, à chaque instant  $t$ , l'accélération (instantanée)  $a(t)$  est obtenue comme la limite des accélérations moyennes sur des intervalles  $[t, t+h]$  quand  $h$  tend vers 0 :

$$a(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}. \quad (4.10)$$

On écrit

$$a(t) = v'(t) = x''(t) \quad (4.11)$$

Cette quantité peut être approchée par

$$a(t) \approx \frac{v(t+h) - v(t)}{h}, \quad (4.12)$$

pour  $h$  assez petit.

Graphiquement, la tangente est la droite qui localement, ne touche la courbe de la vitesse qu'en un seul point. C'est la limite quand  $h$  tend vers zéro de la droite qui passe par les points  $(t, v(t))$  et  $(t+h, v(t+h))$ .

On utilise parfois la notation différentielle pour réécrire (4.11) sous la forme

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t). \quad (4.13)$$

Cette notation est justifiée par le fait que  $dx$  et  $dt$  représentent de petits accroissements :

$$a \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}.$$

PROPOSITION 4.18. Là où l'accélération est positive (resp. négative), la vitesse est croissante (resp. décroissante).

EXERCICE 4.19.

Comme dans l'exercice 4.2, nous considérons une voiture automobile, roulant en ligne droite et munie d'un compteur kilométrique extrêmement précis.

Nous donnons, en figure 4.5 page suivante, la distance, la vitesse et l'accélération au cours du temps

Nous donnons, en figure 4.6 page suivante, la distance, la vitesse et l'accélération au cours du temps sur un zoom au début du mouvement.

(1)

On donne maintenant, quelques relevés de vitesse au cours du temps dans la tableau 4.5 page 43.

À partir de la formule (4.12), calculer les accélérations moyennes entre les instants 1 et 2, 2 et 3, ... 9 et 10.

(2)

Vérifier que vous obtenez bien les résultat du tableau 4.6 page 43. et comparez avec les accélérations exactes données dans ce même tableau.

(3) Une donnée souvent introduite par le constructeur est le temps mis pour passer d'une vitesse nulle à une vitesse donnée (souvent 100 km/h).

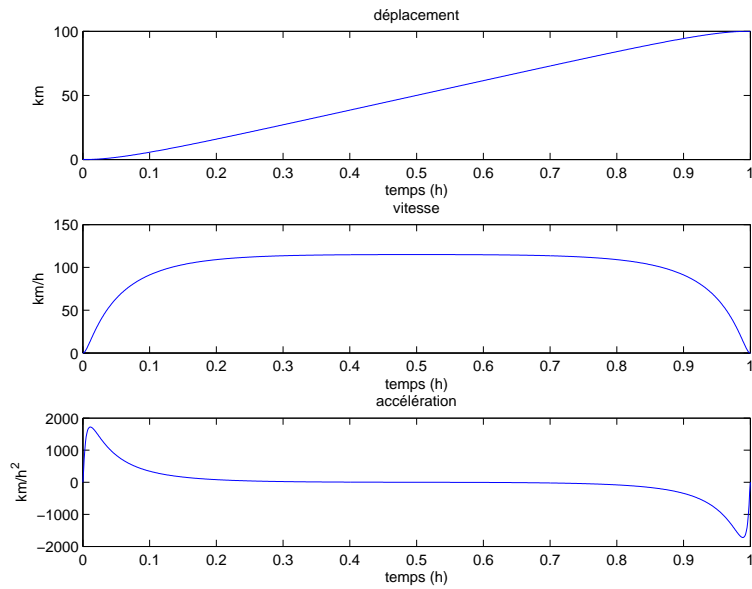


FIGURE 4.5. Distance, vitesse et accélération.

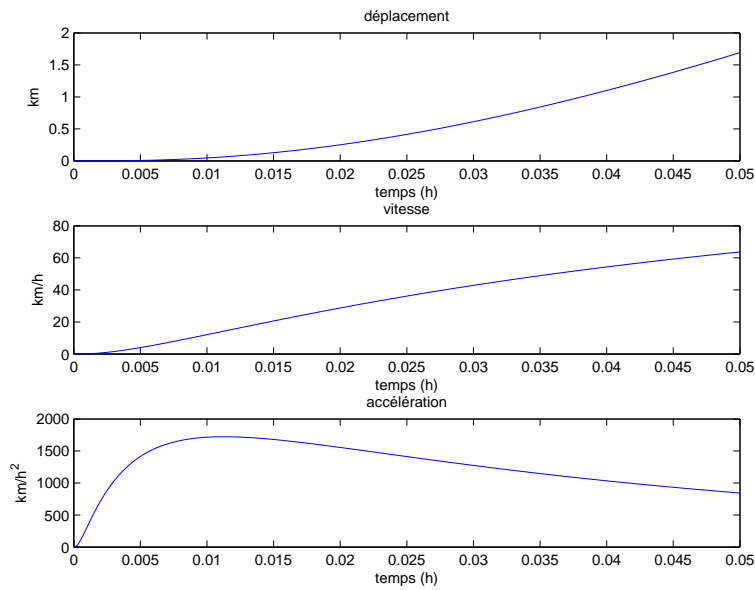


FIGURE 4.6. Distance, vitesse et accélération (zoom).

- (a) Approximativement, quel est le temps  $t_1$  mis pour passer de 0 à  $v_1 = 60$  km/h ?  
 (b) Calculer le rapport

$$a = \frac{v_1}{t_1}.$$

- (c) Conclure

Voir éléments de correction page 61.



indice	temps	vitesse
1	0.00000	0.00000
2	0.00556	4.80498
3	0.01111	13.98215
4	0.01667	23.39208
5	0.02222	32.11241
6	0.02778	39.96245
7	0.03333	46.96467
8	0.03889	53.19819
9	0.04444	58.75250
10	0.05000	63.71228

TABLE 4.5. Quelques vitesses mesurées

approchées	exactes
864.89565	964.34780
1651.89046	1675.75857
1693.78789	1699.28995
1569.65980	1570.67838
1413.00763	1412.73983
1260.39934	1259.77337
1122.03284	1121.35080
999.77618	999.13810
892.75974	892.19436

TABLE 4.6. Quelques accélérations calculées

#### 4.1.4. En pratique

En pratique, le signal  $x(t)$  n'est pas connu. Seuls sont connues les valeurs  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  représentant les valeurs de  $x$  aux instants  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  séparés par un pas de temps

$$h = 1/f_e \quad (4.14)$$

où  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage. On a donc

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i = x(t_i) = x(t_0 + hi) \quad (4.15)$$

On utilise alors (4.7) pour calculer les vitesses approchées

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad v_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \approx v(t_i + h/2). \quad (4.16)$$

On détermine alors les accélérations approchées grâce à

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad a_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \approx a(t_i). \quad (4.17)$$

#### 4.1.5. Notion d'intégrale

Nous avons vu que nous passons du déplacement à la vitesse et de la vitesse à l'accélération par dérivation, ce qui graphiquement, correspond à prendre la tangente à la courbe.

Nous allons maintenant faire l'opération inverse, passer de la vitesse au déplacement ou de l'accélération à la vitesse.

EXERCICE 4.20.

On reprend l'exercice 4.2. On suppose la vitesse constante et connue, égale à  $v_0 = 100$  km/h.

- (1) À partir de la vitesse, comment calculer le déplacement au cours du temps ?
- (2) Montrer que sur la courbe (temps,vitesse), cette quantité correspond à l'aire «sous la courbe» entre 0 et  $t$ .

Voir éléments de correction page 62.

EXERCICE 4.21.

On reprend l'exercice 4.5. On suppose la vitesse connue et définie par la formule (4.2) :

$$v(t) = 200t$$

En utilisant la formule du déplacement donnée par (4.8), montrer sur la courbe (temps,vitesse), le déplacement cette quantité correspond à l'aire «sous la courbe» entre 0 et  $t$ .

Voir éléments de correction page 62.

Supposons la courbe  $v$  connue. On cherche à déterminer  $x$ .

Plus précisément, on se donne  $a < b$ ; on se suppose connue  $x(a)$ , la fonction  $v$  sur l'intervalle  $[a, b]$  et on cherche à calculer  $x(b)$ .

Pour cela, on se donne un entier  $N$  et on découpe l'intervalle  $[a, b]$  en  $N$  intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  de la façon suivante : on pose

$$\begin{aligned} t_0 &= a, \\ h &= \frac{b-a}{N}, \\ \forall i \in \{0, \dots, N\}, \quad t_i &= hi + a. \end{aligned}$$

On a donc  $t_N = b$ .

Voir figure 4.7.

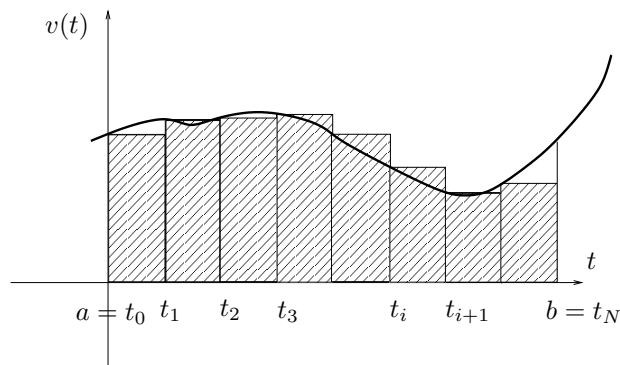


FIGURE 4.7. L'aire sous la courbe avec des rectangles

Soit  $i$  dans  $\{0, \dots, N-1\}$  fixé. Nous allons «tricher» et supposer que, dans l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , la vitesse  $v$  varie peu, de façon à remplacer la vitesse *a priori* quelconque par la vitesse constante  $v(t_i)$ . Cette approximation sera d'autant meilleure que  $h$  est petit (c'est-à-dire  $N$  grand). On a donc, pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,

$$v(t) \approx v(t_i)$$

La vitesse est constante et d'après ce que l'on a déjà vu, on a

$$v(t) \approx v(t_i) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_i)}{t - t_i}$$

et donc

$$x(t) \approx (t - t_i)v(t_i) + x(t_i)$$

En particulier

$$x(t_{i+1}) \approx (t_{i+1} - t_i)v(t_i) + x(t_i) = hv(t_i) + x(t_i).$$

soit encore

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx (t_{i+1} - t_i)v(t_i) = A_i, \quad (4.18)$$

où

$$A_i = hv(t_i). \quad (4.19)$$

Notons que  $A_i = hv(t_i)$  représente l'aire sous la courbe  $v(t)$  où  $v(t) \approx v(t_i)$  entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ . C'est l'aire du rectangle de largeur  $h$  et de hauteur  $v(t_i)$ . Voir figure 4.7 page ci-contre.

On en déduit successivement

$$\begin{aligned} x(t_1) &\approx hv(t_1) + x(t_0) = hv(t_0) + x(a), \\ x(t_2) &\approx hv(t_2) + x(t_1) = h(v(t_0) + v(t_1)) + x(a), \\ x(t_3) &\approx h(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2)) + x(a), \\ &\vdots \\ x(t_{i+1}) &\approx hv(t_i) + x(t_i) = h(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2) + \dots + v(t_i)) + x(a), \\ &\vdots \\ x(t_N) &\approx h(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2) + \dots + v(t_i) + \dots + v(t_{N-1})) + x(a). \end{aligned}$$

Autrement dit

$$x(b) - x(a) \approx h(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2) + \dots + v(t_i) + \dots + v(t_{N-1})) = h \sum_{i=0}^{N-1} v(t_i). \quad (4.20)$$

Cette formule fait apparaître «l'aire des rectangles», hachurée sur la figure 4.7 page précédente. Quand le nombre  $N$  tend vers l'infini, cette aire tend vers l'aire qui est sous la courbe  $v$  entre  $a$  et  $b$ . Cette aire est notée  $\int_a^b v(s)ds$ . On a donc montré que

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(s)ds. \quad (4.21)$$

L'équation (4.20) pourrait constituer une définition de l'intégrale, en passant à la limite. Elle constitue aussi une approximation de cette aire, comme indiqué dans l'exercice 4.24 page suivante.

REMARQUE 4.22 (Méthodes des rectangles à pas variable). Dans la méthode des rectangles, on n'est pas obligé de prendre un pas  $h$  constant. On peut découper l'intervalle en sous-intervalle de taille variable et remplacer (4.18) et (4.19) par

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx A_i, \quad (4.22)$$

où

$$A_i = (t_{i+1} - t_i)v(t_i). \quad (4.23)$$

REMARQUE 4.23 (Méthodes des trapèzes à pas variable).

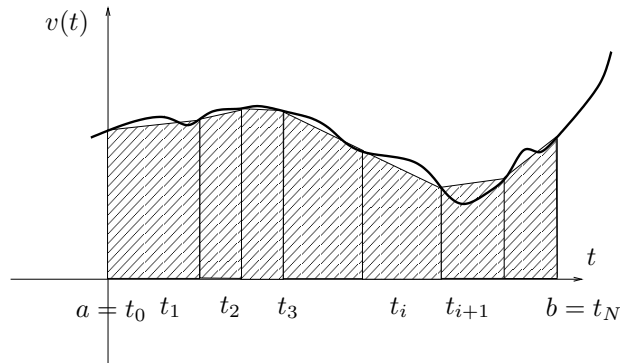


FIGURE 4.8. L'aire sous la courbe avec des trapèzes

Comme dans l'exercice 4.21 page 44, on peut aussi utiliser la méthode des trapèzes à pas variable, plus précise que celle des rectangles : (Voir figure 4.8) on remplace, sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $v(t)$  par une vitesse  $v$  linéaire. De sorte que l'aire approchée est remplacée par l'aire des trapèzes. On a donc

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx A_i, \quad (4.24)$$

où

$$A_i = \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i)(v(t_i) + v(t_{i+1})). \quad (4.25)$$

On a enfin

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(s)ds \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i)(v(t_i) + v(t_{i+1})). \quad (4.26)$$

Souvent, cette formule est utilisée pour  $h$  constant.

EXERCICE 4.24.

On se place de nouveau dans le cadre de l'exercice 4.19 page 41. On se donne  $a = 0$ ,  $b = 0.05$ . On suppose connue la vitesse  $v$  sur  $[a, b]$ . On donne  $x(0) = 0$ .

indice	temps	vitesses
0	0.00000	0.00000
1	0.00556	4.80498
2	0.01111	13.98215
3	0.01667	23.39208
4	0.02222	32.11241
5	0.02778	39.96245
6	0.03333	46.96467
7	0.03889	53.19819
8	0.04444	58.75250

TABLE 4.7. Quelques vitesses

On pose  $N = 9$ ,  $h$  est défini par  $h = (b - a)/N$ . Conformément à ce que l'on a vu ci-dessus, on donne les valeurs de  $v(t_i)$  pour  $i \in \{0, \dots, 8\}$ ; voir le tableau 4.7.

- (1) En appliquant la formule (4.20), proposer une approximation de  $x(b)$ . Comparer avec la valeur exacte  $x(0.05) = 1.692195433$ .

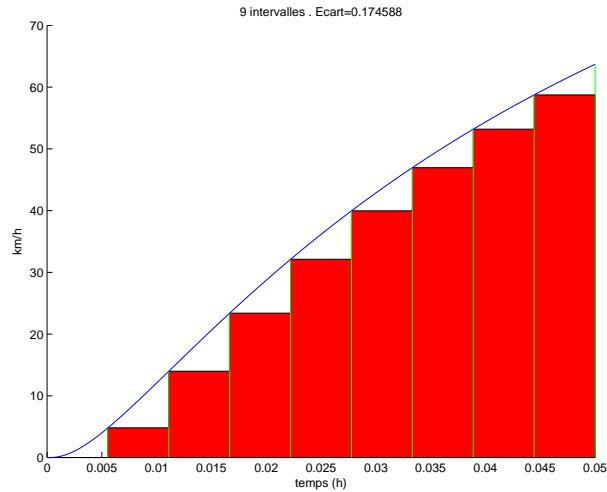


FIGURE 4.9. La vitesse et l'aire approchée sous la courbe

Commentez la figure 4.9 et concluez.

- (2) Comment feriez-vous pour  $N = 49$ ,  $N = 99$  ?

Voir éléments de correction page 62.

#### EXERCICE 4.25.

On indique sur la figure 4.10 page suivante un profil de vitesse, donné<sup>1</sup> par le «mouchard» d'un poids-lourd. On cherche dans cet exercice, à déduire des données en vitesse, la distance totale parcourue par le véhicule.

indice	temps	vitesse
0	0.000000	0.000000
1	0.200000	0.000000
2	0.400000	130.000000
3	1.000000	130.000000
4	1.100000	120.000000
5	1.200000	100.000000
6	1.300000	90.000000
7	2.300000	90.000000
8	2.500000	10.000000
9	2.550000	0.000000

TABLE 4.8. Quelques vitesses

1. En réalité, celui-ci n'est pas réel, il est très simplifié!

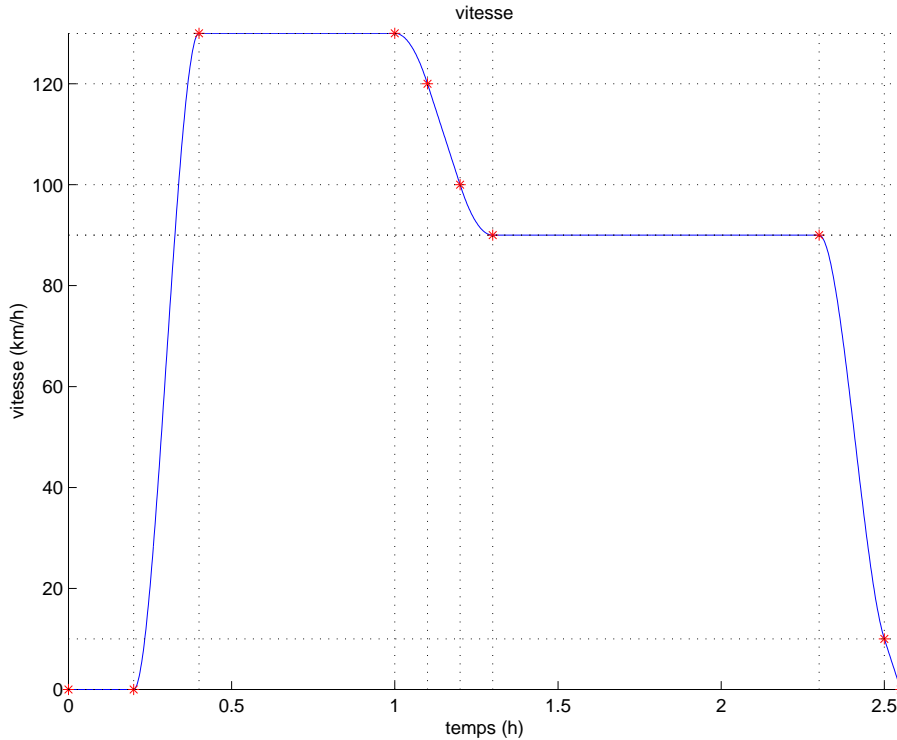


FIGURE 4.10. Un profil de vitesse

On donne dans le tableau 4.8 page précédente, quelques vitesses particulières relevées à différents instants. Ces vitesses et ces instants sont notés  $v_i$  et  $t_i$  pour  $0 \leq i \leq 9$ . Sur chacune des phases  $[t_i, t_{i+1}]$ , la vitesse est soit affine soit d'un autre type non précisé ici<sup>2</sup>.

- (1) Commentez chacune des phases.
- (2) En utilisant la méthode des trapèzes à pas variable de la remarque 4.23 page 46 et les équations (4.25) et (4.26), déterminez la distance totale parcourue par le poids-lourd. Sur chaque phase  $[t_i, t_{i+1}]$ , on remplacera l'intégrale par l'aire du trapèze.

On pourra vérifier que sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , l'aire calculée est bien celle donnée dans le tableau 4.9 page suivante.

- (3) Tracer approximativement l'accélération au cours du temps. Retrouver, par exemple, les valeurs du tableau 4.10 page ci-contre.

Voir éléments de correction page 63.

EXERCICE 4.26 (facultatif). En utilisant les formules de dérivations ( $a$  est un réel)

$$(a)' = 0, \quad (4.27a)$$

$$(t)' = 1, \quad (4.27b)$$

$$(t^2)' = 2t, \quad (4.27c)$$

2. Ce sont en fait des polynômes de degrés au plus trois.

indice	$t_i$	$t_{i+1}$	$v(t_i)$	$v(t_{i+1})$	$A_i$
0	0.000000	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000
1	0.200000	0.400000	0.000000	130.000000	13.000000
2	0.400000	1.000000	130.000000	130.000000	78.000000
3	1.000000	1.100000	130.000000	120.000000	12.500000
4	1.100000	1.200000	120.000000	100.000000	11.000000
5	1.200000	1.300000	100.000000	90.000000	9.500000
6	1.300000	2.300000	90.000000	90.000000	90.000000
7	2.300000	2.500000	90.000000	10.000000	10.000000
8	2.500000	2.550000	10.000000	0.000000	0.250000

TABLE 4.9. Aires approchées par intervalles

indice	temps	accélérations
0	0.000000	0.000000
1	0.200000	0.000000
2	0.400000	0.000000
3	1.000000	0.000000
4	1.100000	-200.000000
5	1.200000	-200.000000
6	1.300000	0.000000
7	2.300000	0.000000
8	2.500000	-200.000000
9	2.550000	-200.000000

TABLE 4.10. Quelques accélérations

et d'intégrations ( $x_0$  est une constante d'intégration)

$$\int 0 dt = a_0, \quad (4.27d)$$

$$\int dt = t + a_0, \quad (4.27e)$$

$$\int t dt = \frac{t^2}{2} + a_0, \quad (4.27f)$$

écrire les déplacements, vitesses et accélérations d'un solide dans les deux situations suivantes :

- (1) L'accélération est nulle.
- (2) L'accélération est constante.

On pourra tracer les graphiques associés.

Voir éléments de correction page 64.

EXERCICE 4.27 (facultatif). Dans cet exercice, il s'agit de montrer de façon un peu rigoureuse, que l'opération inverse de l'intégration est bien la dérivée. On pose

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s) ds.$$

(1) Montrer que

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(s) ds.$$

(2) On suppose que la fonction  $v$  est continue en  $t$ , ce qui s'écrit

$$v(s) = v(t) + \varepsilon(s),$$

avec

$$\lim_{s \rightarrow t} \varepsilon(s) = 0.$$

En déduire, en passant à la limite quand  $h$  tend vers zéro que

$$x'(t) = v(t)$$

Voir éléments de correction page 66.

## 4.2. Bidimensionnel

### 4.2.1. Un peu de théorie

Un solide en deux ou trois dimensions a un mouvement défini par son centre de gravité, dont on connaît en théorie la position au cours du temps.

Pour toute la suite, pour simplifier, on se placera dans le cas plan.

On se donne un repère orthonormé direct  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ . À chaque instant, on connaît donc  $x(t)$  et  $y(t)$  les coordonnées de la particule étudiée, de sorte que l'on a les équations paramétriques (voir la section 2.6 page 13) du mouvement suivantes :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

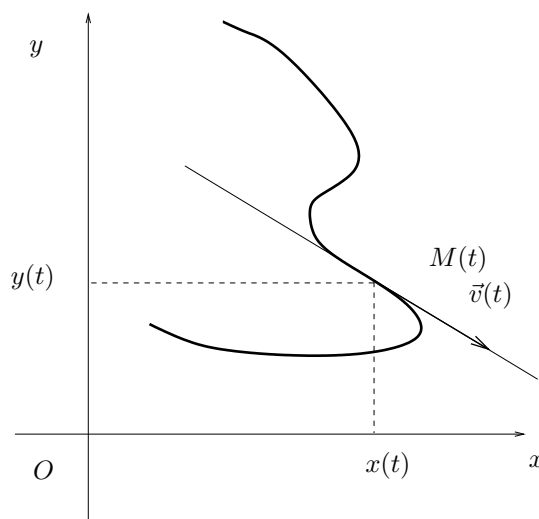


FIGURE 4.11. Description paramétrique d'un mouvement plan



Voir la figure 4.11 page ci-contre.

Le vecteur vitesse (instantané)  $\vec{v}(t)$  est défini en dérivant les deux composantes du déplacement

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OM}(t)) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

À tout instant (quand il est non nul), ce vecteur vitesse est tangent à la trajectoire (voir la figure 4.11 page précédente).

De même, le vecteur accélération (instantané)  $\vec{a}(t)$  est défini en dérivant les deux composantes de la vitesse

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} (\vec{v}(t)) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_x(t) \\ v'_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

On appelle aussi la vitesse (scalaire), le nombre vitesse  $v(t)$  défini comme la norme du vecteur  $\vec{v}(t)$  (voir chapitre 1) :

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad (4.31)$$

Les plus curieux d'entre vous pourront consulter le chapitre 1 de [Bas07].

#### 4.2.2. En pratique

Comme dans la section 4.1.4, les signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  ne sont pas connus. Seules sont connues les valeurs  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  représentant les valeurs de  $x$  et de  $y(t)$  aux instants  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  séparés par un pas de temps

$$h = 1/f_e \quad (4.32)$$

où  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage. On a donc

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i = x(t_i) = x(t_0 + hi), \quad (4.33a)$$

$$y_i = y(t_i) = y(t_0 + hi). \quad (4.33b)$$

On peut noter

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad M_i = M(t_i) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

On utilise alors (4.7) pour calculer

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad v_{xi} = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \approx v_x(t_i + h/2), \quad (4.35a)$$

$$v_{yi} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx v_y(t_i + h/2). \quad (4.35b)$$

On a donc l'approximation suivante de la vitesse instantanée en  $t_i + h/2$  par la vitesse moyenne calculée sur le trajet  $M_i M_{i+1}$  :

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \vec{v}_i = f_e \overrightarrow{(x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i)} \approx \vec{v}(t_i + h/2) \quad (4.36)$$

Conventionnellement, cette vitesse est appliqué au milieu de  $[M_i, M_{i+1}]$ , endroit où l'on suppose que se trouve le point  $M$  à l'instant  $t_i + h/2$ , ce qui n'est qu'une approximation (voir la figure 4.12 page suivante).

Remarquons que la vitesse approchée s'écrit aussi

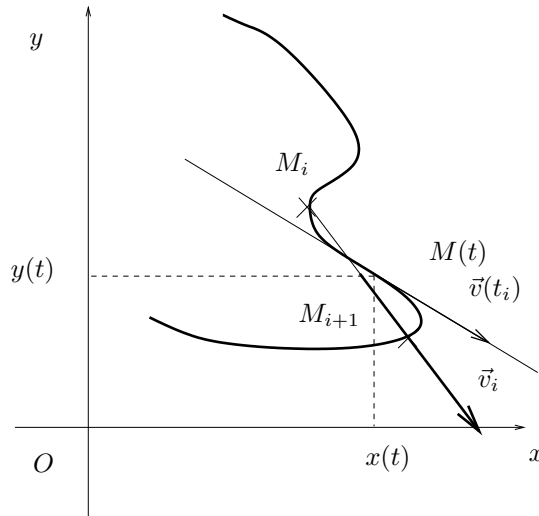
$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \vec{v}_i = \frac{1}{h} \overrightarrow{M_i M_{i+1}}, \quad (4.37)$$

ou encore

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \vec{v}_i = f_e \overrightarrow{M_i M_{i+1}}. \quad (4.38)$$

Ainsi, la norme  $v_i$  de la vitesse approchée  $\vec{v}_i$  vaut

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad v_i = \frac{1}{h} M_i M_{i+1}. \quad (4.39)$$

FIGURE 4.12. Vitesse en  $t_i + h/2$ 

La vitesse approchée est donc prise comme la vitesse moyenne sur le trajet  $[M_i M_{i+1}]$ . On détermine alors les accélérations approchées

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \vec{a}_i = \frac{\vec{v}_i - \vec{v}_{i-1}}{h} \approx \vec{a}(t_i). \quad (4.40)$$

ou encore

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \vec{a}_i = f_e (\vec{v}_i - \vec{v}_{i-1}) \approx \vec{a}(t_i). \quad (4.41)$$

EXERCICE 4.28.

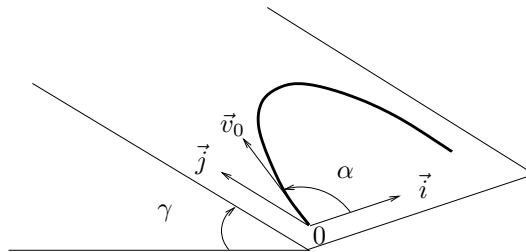


FIGURE 4.13. Le plan incliné.

On s'intéresse maintenant à l'expérience que vous avez déjà peut être vue au lycée, celle du palet lancé sur un plan incliné (voir figure 4.13). Celui-ci est muni d'un dispositif qui propulse de l'air sous lui et lui permet d'évoluer avec des forces de frottements très faibles, qui sont donc négligées par la suite. De plus, sur le plan incliné est posée une grande feuille blanche. Avec une fréquence d'acquisition

$$f_e = 10 \text{ Hz}, \quad (4.42)$$

le palet émet un étincelle qui perce un tout petit trou sur la feuille.

On peut donc relever les positions  $x_i$  et  $y_i$  du palet avec la fréquence d'acquisition  $f_e$ . Voir le tableau 4.11 page ci-contre.

- (1) Représenter deux graphiques distincts,  $x_i$  et  $y_i$  en fonction du temps  $t$ .
- (2) Représenter sur un graphique la trajectoire, c'est-à-dire l'ensemble des points  $x_i$  et  $y_i$ . Commentez !

indice	abscisses	ordonnées
0	0.00000000	0.00000000
1	0.09987654	0.15098479
2	0.19975309	0.26841741
3	0.29962963	0.35229785
4	0.39950618	0.40262611
5	0.49938272	0.41940220
6	0.59925927	0.40262611
7	0.69913581	0.35229785
8	0.79901235	0.26841741
9	0.89888890	0.15098479
10	0.99876544	0.00000000

TABLE 4.11. Quelques déplacements mesurés

- (3) Grâce à la section 4.2.2 et à partir du tableau 4.11, calculer des vitesses approchées. En quels instants ces vitesses sont elles déterminées ? Commentez !
- (4) À partir de vos calculs précédents, calculer des accélérations approchées. En quels instants sont elles déterminées ? Commentez !
- (5) Une méthode légèrement différente pour tracer les vitesse et accélérations approchées, purement graphique peut être proposée ; peut-être l'avez-vous déjà étudiée au lycée ?

On reformule graphiquement les résultats de la section 4.2.2 : pour les vitesse, il suffit d'utiliser la formule (4.38) qui peut être directement traduite de façon graphique à partir des points  $M_i$  et  $M_{i+1}$ .

Pour les accélérations, on pose

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \vec{u}_i = \overrightarrow{M_i M_{i+1}} - \overrightarrow{M_{i-1} M_i}. \quad (4.43)$$

On a alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \vec{a}_i = f_e^2 \vec{u}_i. \quad (4.44)$$

Voir les figures 14(a) page suivante et 14(b) page suivante.

On pourra, pour plus de précision, utiliser la figure 4.34 page 81 pour tracer les vitesses et les accélérations, en utilisant une échelle éventuelle et en n'utilisant que les points expérimentaux (c'est-à-dire sans utiliser la parabole tracée!).

- (6) En vous servant du tableau 4.12 page suivante qui donne les vitesses exactes en  $t_0, t_1, \dots, t_9$ , utiliser la méthode d'intégration approchées des rectangles de la section 4.1.5, pour retrouver une approximation de  $x_{10}$  et de  $y_{10}$ .

Comparez aux valeurs exactes et commentez !

Voir éléments de correction page 67.

EXERCICE 4.29 (facultatif). Nous admettons dans cet exercice les formules suivantes exactes qui donne  $x(t)$  et  $y(t)$  (elles seront démontrées dans l'exercice 4.30). On note  $\gamma$  l'angle entre l'horizontale et la plus grande pente du plan incliné (voir la figure 4.13 page ci-contre). Dans un plan contenu dans le plan incliné, on considère un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Dans ce plan,  $\alpha$  est l'angle entre  $\vec{i}$  et la vitesse initiale du palet. On note

$$g_0 = g \sin \gamma \quad (4.45)$$

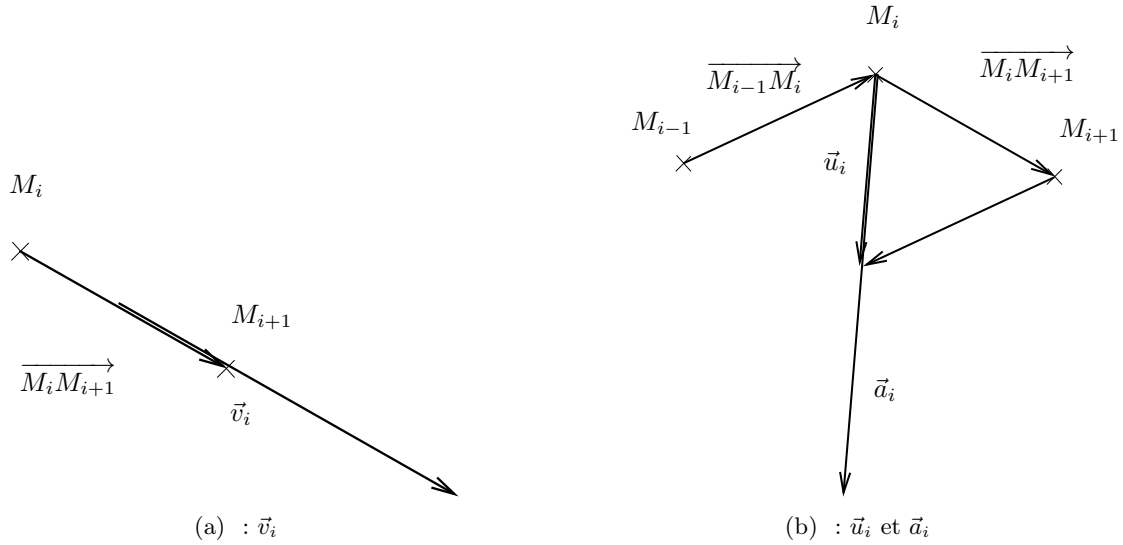


FIGURE 4.14. Les constructions graphiques des vitesses et des accélérations approchées

indice	abscisses	ordonnées
0	0.99876544	1.67760880
1	0.99876544	1.34208704
2	0.99876544	1.00656528
3	0.99876544	0.67104352
4	0.99876544	0.33552176
5	0.99876544	0.00000000
6	0.99876544	-0.33552176
7	0.99876544	-0.67104352
8	0.99876544	-1.00656528
9	0.99876544	-1.34208704

TABLE 4.12. Quelques vitesses exactes

On a alors

$$a_x(t) = 0, \quad (4.46a)$$

$$a_y(t) = -g_0, \quad (4.46b)$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (4.46c)$$

$$v_y(t) = -g_0 t + v_0 \sin \alpha, \quad (4.46d)$$

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad (4.46e)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g_0 t^2 + v_0 \sin \alpha t \quad (4.46f)$$

(1)

indice	exactes	approchées	erreurs
0	0.9987654433	0.9987654433	0.0000000000
1	0.9987654433	0.9987654433	0.0000000000
2	0.9987654433	0.9987654433	0.0000000000
3	0.9987654433	0.9987654433	0.0000000000
4	0.9987654433	0.9987654433	0.0000000000
5	0.9987654433	0.9987654433	0.0000000000
6	0.9987654433	0.9987654433	0.0000000000
7	0.9987654433	0.9987654433	0.0000000000
8	0.9987654433	0.9987654433	0.0000000000
9	0.9987654433	0.9987654433	0.0000000000

TABLE 4.13. Quelques abscisses de vitesses exactes, approchées et erreurs

indice	exactes	approchées	erreurs
0	1.5098479227	1.5098479227	0.0000000000
1	1.1743261621	1.1743261621	0.0000000000
2	0.8388044015	0.8388044015	0.0000000000
3	0.5032826409	0.5032826409	0.0000000000
4	0.1677608803	0.1677608803	0.0000000000
5	-0.1677608803	-0.1677608803	0.0000000000
6	-0.5032826409	-0.5032826409	0.0000000000
7	-0.8388044015	-0.8388044015	0.0000000000
8	-1.1743261621	-1.1743261621	0.0000000000
9	-1.5098479227	-1.5098479227	0.0000000000

TABLE 4.14. Quelques ordonnées de vitesses exactes, approchées et erreurs

Examiner les tableaux 4.13, 4.14, 4.15 et 4.16, qui fournissent les vitesses et accélérations approchées (déjà déterminées dans l'exercice 4.28) ainsi que les vitesses et accélérations exactes correspondantes déterminées grâce aux formules (4.45). Conclure!

- (2) Montrer que les formules de la section 4.2.2 fournissent les vitesses exactes aux instants  $t_0 + h/2$ ,  $t_1 + h/2$ , ...,  $t_{n-1} + h/2$ .
- (3) Montrer que les formules de la section 4.2.2 fournissent les accélérations exactes aux instants  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ .
- (4) Conclure!

Voir éléments de correction page 69.

EXERCICE 4.30 (facultatif). On renvoie de nouveau à la figure 4.13 page 52. On cherche à démontrer les formules (4.46) page précédente.

- (1) On admet, qu'en l'absence de frottements, la réaction du plan incliné  $\vec{R}$  est perpendiculaire à celui-ci, c'est-à-dire que  $\vec{R}$  est perpendiculaire à la fois à  $\vec{i}$  et à  $\vec{j}$ .

indice	exactes	approchées	erreurs
1	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	-0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
3	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
4	-0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
5	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
6	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
7	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
8	-0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
9	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

TABLE 4.15. Quelques abscisses d'accélération exactes, approchées et erreurs

indice	exactes	approchées	erreurs
1	-3.3552176060	-3.3552176060	0.0000000000
2	-3.3552176060	-3.3552176060	0.0000000000
3	-3.3552176060	-3.3552176060	0.0000000000
4	-3.3552176060	-3.3552176060	0.0000000000
5	-3.3552176060	-3.3552176060	0.0000000000
6	-3.3552176060	-3.3552176060	0.0000000000
7	-3.3552176060	-3.3552176060	0.0000000000
8	-3.3552176060	-3.3552176060	0.0000000000
9	-3.3552176060	-3.3552176060	0.0000000000

TABLE 4.16. Quelques ordonnées d'accélération exactes, approchées et erreurs

Le principe fondamental de la dynamique nous dit que dans tout référentiel galiléen, pour un système  $S$ , de masse  $m$  et de centre de gravité  $G$ , la somme des forces externes est égale au produit de la masse  $m$  par l'accélération  $a_G(t)$ , soit

$$\sum \vec{F}_e = m\vec{a}_G(t). \quad (4.47)$$

Écrire les composante de cette équation vectorielle sur les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et en déduire (4.46a) et (4.46b).

- (2) Par intégration, en utilisant (4.27d) et (4.27f), déduire les formules (4.46c) et (4.46d).
- (3) Par intégration, en utilisant (4.27e) et (4.27f), déduire les formules (4.46e) et (4.46f).

Notons que ces équations constituent celles de la chute libre (en fait le plan incliné ne fait que réduire la gravitation  $g$ ); elles seront revues en cours et TD de biomécanique (voir le chapitre 8 de [Bas15]).

Voir éléments de correction page 70.

EXERCICE 4.31 (facultatif). Nous avons vu dans l'exercice 4.29 page 53 que les formules (4.45) donnaient les valeurs exactes des vitesses aux instants  $t_0 + h/2, t_1 + h/2, \dots, t_{n-1} + h/2$  et des accélérations aux instants  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ .

Nous allons donc utiliser la méthode graphique 5 de l'exercice 4.28 pour remonter des accélérations vers les vitesses et des vitesses vers les déplacements pour les construire graphiquement. Puisque dans le cas de la parabole, les formules (4.45) sont exactes, on donne donc une construction exacte d'une parabole et de ses tangentes, point par point ! On suppose donc que l'on a (4.45) et (4.46). On suppose donc connue l'accélération et constante sous la forme

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g_0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

(1) Pourquoi a-t-on

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \vec{a}_i = \vec{a} ? \quad (4.49)$$

(2) Montrer que les équations (4.40) fournissent

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \vec{v}_i = h\vec{a}_i + \vec{v}_{i-1}. \quad (4.50)$$

(3) On suppose connu le vecteur vitesse  $\vec{v}_{0,0}$  exact à l'instant  $t_0$ . Montrer que le vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  exact à l'instant  $t_0 + h/2$  est donné par

$$\vec{v}_0 = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g_0 \end{pmatrix} + \vec{v}_{0,0}. \quad (4.51)$$

En déduire une construction successive des vecteurs vitesses exactes  $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$  aux instants  $t_0 + h/2, t_1 + h/2, \dots, t_{n-1} + h/2$ .

(4) On suppose connue la position exacte  $M_0$  à l'instant  $t_0$ . Montrer que

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \overrightarrow{M_i M_{i+1}} = h\vec{v}_i. \quad (4.52)$$

En déduire une construction successive des positions exactes  $M_0, M_1, \dots, M_n$  aux instants  $t_0, t_1, \dots, t_n$ .

(5) Faire la construction de points et de vitesses de la parabole avec les données suivantes :

$$n = 10,$$

$$f_e = 10,$$

$$\gamma = 20^\circ,$$

$$t_0 = 0,$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_{0,0} = \begin{pmatrix} 0.998765443300000 \\ 1.6776088030124052 \end{pmatrix}.$$

Voir éléments de correction page 70.

### 4.3. Utilité de tout cela ?

En biomécanique, on étudiera souvent un sujet humain, dont on connaîtra les déplacements de différents capteurs placés à des articulations. Le principe de la biomécanique permettra de remplacer l'homme par une chaîne formée de segments rigides et indéformables, les os ; on suppose que ces segments concentrent toute la masse (chair, os, tendons, ...). On pourra calculer alors la position du centre de gravité.

Le principe fondamental de la dynamique (utilisé dans l'exercice 4.30) donne un lien entre force externe et accélération du centre de gravité.

Dans les expériences menées en laboratoire (au CRIS par exemple), on aura alors des moyens, par intégration ou dérivation, de passer des déplacements aux vitesses, des vitesses aux accélérations, des accélérations aux forces et réciproquement. On pourra alors, par des techniques dites de dynamiques inverses, de savoir ce qui se passe dans les muscles du corps.

Attention, tout cela est théorique. En pratique, les signaux sont entâchés et des traitements du signal doivent être utilisés pour «nettoyer» les signaux de leurs «bruits».

Les notions de dérivées et d'intégrales sont utilisées partout, pas nécessairement comme lien entre la vitesse et le déplacement. Par exemple, on verra dans le chapitre consacré à l'énergie (voir chapitre 7 de [Bas15]), les notions de travail  $W$  et de puissance  $P$  d'une force. On aura les relations suivantes :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

et

$$W = \int P dt$$

Ces notions peuvent être utiles dans la vie courante ! Par exemple, elles s'appliquent au calcul de votre facture EDF. Si vous utilisez un ou plusieurs appareils qui consomment une puissance  $P$  (exprimée en Watt) et qui peut varier dans le temps, sur un intervalle de temps  $[a, b]$ , outre les frais supplémentaires (abonnements ...) le prix que vous allez payer sera proportionnel à l'énergie (voir le chapitre 7 de [Bas15]) consommée qui vaut :

$$E = \int_a^b P(t) dt$$

#### 4.4. Récapitulatif

Retenons de tout cela que l'on passe des déplacements  $x$  et  $y$  aux vitesses  $v_x$  et  $v_y$  par dérivation :

$$\begin{aligned} v_x(t) &= x'(t), \\ v_y(t) &= y'(t), \end{aligned}$$

et de même que l'on passe des vitesses  $v_x$  et  $v_y$  aux accélérations  $a_x$  et  $a_y$  par dérivation :

$$\begin{aligned} a_x(t) &= v'_x(t) = x''(t), \\ a_y(t) &= v'_y(t) = y''(t). \end{aligned}$$

La dérivation est une opération qui consiste à mesurer la tangente à la courbe, souvent remplacée par un calcul approché de pente :

$$z'(t) = \frac{z(t+h) - z(t)}{h}$$

où encore

$$z'(t) = \frac{z(t+h/2) - z(t-h/2)}{h}$$

où  $h$  est «petit». On écrira encore

$$z'(t) = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

où  $\Delta z$  et  $\Delta t$  désignent de «petites variations» des quantités  $z$  et  $t$ .

Réciproquement, on passe des accélérations  $a_x$  et  $a_y$  aux vitesses  $v_x$  et  $v_y$  par intégration

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(s) ds, \\ v_y(t) &= v_y(t_0) + \int_{t_0}^t a_y(s) ds, \end{aligned}$$



et de même on passe des vitesses  $v_x$  et  $v_y$  aux des déplacements  $x$  et  $y$  par intégration

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(s) ds,$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(s) ds.$$

L'intégration entre  $t_0$  et  $t$  est une opération qui consiste à mesurer l'aire sous la courbe, entre les abscisses  $t_0$  et  $t$ .

Pour les approximations que l'on utilisera toujours en biomécanique, on relira bien la section 4.2.2.

#### 4.5. Correction d'exercices

Pour raison de clarté, toutes les figures de courbes données en correction sont données en section 4.6 page 73.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.1

**FS à taper**

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.2

- (1)
- (2) On obtient la figure 4.17 page 73.  
les points sont alignés ! On renvoie au chapitre 2.
- (3) On peut donc en déduire la relation entre distance  $d$  et temps  $t$  :

$$d = v_0 t + d_0 \quad (4.53)$$

où  $d_0$ , l'ordonnée à l'origine est nulle. On mesure  $v_0$  graphiquement :

$$v_0 \approx 100. \quad (4.54)$$

Il vient donc

$$d = v_0 t \quad (4.55)$$

de laquelle on déduit la célèbre formule  $v = d/t$ , quand celle-ci est constante.

- (4) On calcule à chaque fois

$$v = \frac{d_j - d_i}{t_j - t_i} \quad (4.56)$$

100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

TABLE 4.17. Quelques vitesses moyennes calculées

Voir les résultats dans le tableau 4.17 : toutes les vitesses moyennes sont identiques et égales à la distance définie par (4.54). Cela est normal puisque (4.53) entraîne :

$$v = \frac{d_j - d_i}{t_j - t_i} = \frac{v_0 t_j - v_0 t_i}{t_j - t_i} = v_0.$$

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.5

- (1) On obtient la figure 4.18 page 73. La courbe semble être une parabole ! On renvoie au chapitre 2.

1 et 2	11.11111
2 et 3	33.33333
3 et 4	55.55556
4 et 5	77.77778
5 et 6	100.00000
1 et 10	100.00000

TABLE 4.18. Quelques vitesses moyennes calculées

(2) On calcule à chaque fois la vitesse définie par (4.56).

Voir les résultats dans le tableau 4.18. Cette fois-ci, contrairement à l'exercice 4.2, les vitesses moyennes varient ! On constate qu'elles augmentent !

Ces vitesses correspondent aux pentes des droites passant par les deux points de coordonnées  $(t_i, d_i)$  et  $(t_j, d_j)$ . Voir figure 4.19.

(3) (a)

indice des instants	vitesse	écarts entre les instants
1 et 2	141.2600000000	0.5000000000
1 et 3	131.2600000000	0.4000000000
1 et 4	121.2600000000	0.3000000000
1 et 5	111.2600000000	0.2000000000
1 et 6	101.2600000000	0.1000000000
1 et 7	96.2600000000	0.0500000000
1 et 8	92.2600000000	0.0100000000
1 et 9	91.7600000000	0.0050000000
1 et 10	91.3600000000	0.0010000000
1 et 11	91.2700000000	0.0001000000
1 et 12	91.2609999999	0.0000100000
1 et 13	91.2601000020	0.0000010000
1 et 14	91.2600099996	0.0000001000

TABLE 4.19. Quelques vitesses moyennes calculées

Voir les résultats dans le tableau 4.19. Les vitesses moyennes semblent tendre vers une limite, quand l'écart entre les temps de calcul se rapproche de zéro.

Ces vitesses correspondent aux pentes des droites passant par les deux points de coordonnées  $(t_i, d_i)$  et  $(t_j, d_j)$  et valent

$$v = \frac{d_j - d_i}{t_j - t_i}$$

Voir figure 4.20.

Il semble donc que

$$\frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h} \approx 91.2600099996$$

pour  $h$  «petit».

(b)

1 et 2	$5.0 \cdot 10^1$
1 et 3	$4.0 \cdot 10^1$
1 et 4	$3.0 \cdot 10^1$
1 et 5	$2.0 \cdot 10^1$
1 et 6	$1.0 \cdot 10^1$
1 et 7	5.0
1 et 8	$10.0 \cdot 10^{-1}$
1 et 9	$5.0 \cdot 10^{-1}$
1 et 10	$1.0 \cdot 10^{-1}$
1 et 11	$1.0 \cdot 10^{-2}$
1 et 12	$9.9999994 \cdot 10^{-4}$
1 et 13	$1.203 \cdot 10^{-4}$
1 et 14	$9.9996345 \cdot 10^{-6}$

TABLE 4.20. Ecarts entre vitesses moyennes et approchées

Dans le tableau 4.20, on a donné les écarts entre les vitesses moyennes calculées précédemment et la vitesse donnée par (4.2), écarts qui s'amenuisent donc bien !

Pour la notation utilisée dans ce tableau, ainsi que pour l'équation (4.61) page page 69, voir l'annexe B page 85.

La droite passant par les points de coordonnées  $(t_0, d(t_0))$  et  $(t_0 + h, d(t_0 + h))$  se rapproche, quand  $h$  est petit, d'une droite fixe, appelée tangente à la courbe, et dont la pente vaut donc la vitesse instantanée en ce point. Voir figure 4.21.

REMARQUE 4.32. Pour cet exercice, ainsi que les suivants, les déplacements ont été en fait calculé par un ordinateur et sont donc «idéaux» ; leur détermination expérimentale serait beaucoup plus délicate.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.11 Il suffit de développer et de simplifier

$$\begin{aligned}
 \frac{x(t+h) - x(t)}{h} &= \frac{100(t+h)^2 - 100t^2}{h}, \\
 &= 100 \frac{(t+h)^2 - t^2}{h}, \\
 &= 100 \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h}, \\
 &= 100 \frac{2th + h^2}{h}, \\
 &= 100(2t + h).
 \end{aligned}$$

Si  $h$  tend vers zéro, cette quantité tend bien vers  $200t$ .

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.15

Les résultats sont donnés dans le tableau 4.21 page suivante. Toutes les accélérations sont constantes !

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.19

(1)

1 et 2	200.00000
2 et 3	200.00000
3 et 4	200.00000
4 et 5	200.00000
5 et 6	200.00000
1 et 10	200.00000

TABLE 4.21. Quelques accélération moyennes calculées

(2) (a) On trouve graphiquement  $t_1 \approx 0.05$ . Plus précisément  $t_1 = 0.0457$ .

(b) On a

$$a = 1311.59737418$$

Cette quantité est de l'ordre de l'accélération maximale donnée sur la figure 4.6 page 42.

#### ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.20

(1) À partir de la formule (4.55), on obtient

$$d = v_0 t$$

(2) Voir la figure 4.22 page 75. Utiliser le fait que l'aire d'un rectangle est égale au produit de la longueur par la largeur !

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.21 On utilise le fait que l'aire d'un triangle est connue :

$$x(t) = t \times 200t/2 = 100t^2$$

Voir la figure 4.23 page 75

#### ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.24

(1) On a  $h = (b-a)/N = 0.0055555555555556$ . On utilise la formule (4.20) page 45 et le tableau 4.7 page 46. On obtient

$$x(0.05) \approx 1.517607876$$

soit un écart

$$|x(0.05) - x_{\text{exa}}(0.05)| = 0.1745875566$$

Voir la figure 4.9 page 47.

(2) Pour  $N = 49$ , on calculerait de même

$$x(0.05) \approx 1.659764392$$

soit un écart

$$|x(0.05) - x_{\text{exa}}(0.05)| = 0.03243104007$$

Voir la figure 15(a) page ci-contre.

Pour  $N = 99$ , on calculerait de même

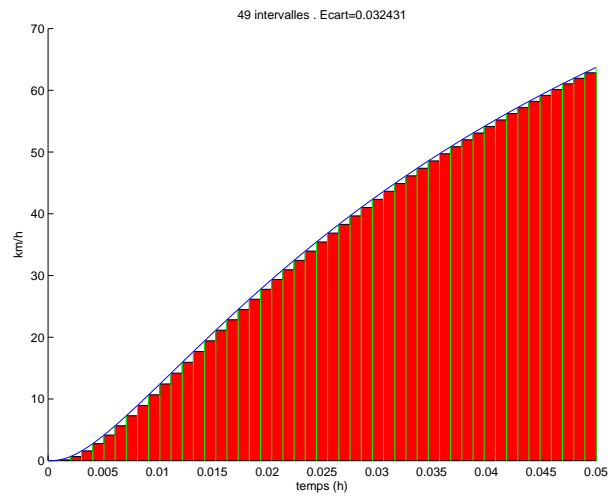
$$x(0.05) \approx 1.676124522$$

soit un écart

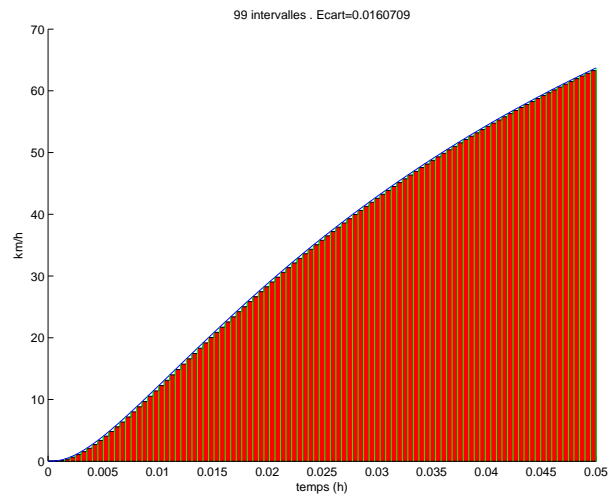
$$|x(0.05) - x_{\text{exa}}(0.05)| = 0.01607091064$$

Voir la figure 15(b) page suivante.

Les écarts diminuent bien quand  $N$  augmente !



(a)



(b)

FIGURE 4.15. La vitesse et l'aire approchée sous la courbe

Dans le tableau 4.22 page suivante, où on a pris des plus grandes valeurs de  $N$ , on constate que l'écart diminue bien.

#### ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.25

- (1) Chacune des phases correspond à une vitesse affine ou non. Plus précisément :
- En phase 1, la vitesse est nulle ; le camion est immobile.
  - En phase 2, la vitesse augmente progressivement de 0 à 130 (km/h).
  - En phase 3, elle est constante et vaut 130 ; c'est probablement une autoroute fluide.
  - En phase 4, elle décroît de 130 à 120.
  - En phase 5, elle décroît de 120 à 100, en étant affine.
  - En phase 6, elle décroît de 100 à 90.
  - En phase 7, elle est constante et vaut 90 ; c'est probablement une route fluide.
  - En phase 8, elle décroît de 90 à 10.

Nombre d'intervalles	valeur approchée	erreur
9	1.5176078759	0.1745875566
99	1.6761245219	0.0160709106
999	1.6906012074	0.0015942251
9999	1.6920361377	0.0001592949
99999	1.6921795043	0.0000159282
999999	1.6921938397	0.0000015928

TABLE 4.22. Déplacements approchés et erreurs

— En phase 9, elle décroît de 10 à 0, en étant affine. À la fin du mouvement (comme au début), le camion est à l'arrêt.

- (2) On trouve la valeur exacte de la distance parcourue, qui est la somme des toutes les aires données dans la dernière colonne du tableau 4.9 page 49 :

$$x_t = 224.25 \text{ km.}$$

Voir la figure 4.24 page 76 qui illustre le calcul de la méthode des trapèzes. On pourra comparer cette valeur très proche de la valeur exacte :

$$x_e = 224.9166667 \text{ km.}$$

- (3) Voir la figure 4.25 page 76. Les valeurs du tableau 4.10 page 49 peuvent être déterminées en remarquant que là où la vitesse est affine, on a l'expression exacte de l'accélération :

$$a = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

#### ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.26

- (1)

Attention, ici on considère des déplacements, vitesses et accélérations mesurés le long d'une direction et par conséquent représentés par des nombres (des scalaires) et non des vecteurs à deux ou trois composantes. On ne les note donc pas sous forme d'un vecteur.

Voir la figure 16(a). Un tel solide est dit à vitesse uniforme. C'est par exemple le cas d'une craie qui roule sur une table, un vélo ou une voiture qui roule sans force motrice, si on prend un intervalle de temps suffisamment bref pour que les forces de frottement soient négligées.

Pour ceux qui n'ont jamais vu la notion de dérivée, il est facile de comprendre qu'en voiture ou en vélo, si on ne freine pas et si on n'accélère pas, si un laps de temps assez bref, la vitesse est constante !

De façon plus explicite, on a, en notant  $x$  le déplacement,  $v$  la vitesse et  $a$  l'accélération :

$$a(t) = 0, \tag{4.57a}$$

$$v(t) = v_0, \tag{4.57b}$$

$$x(t) = v_0 t + x_0, \tag{4.57c}$$

où  $v_0$  et  $x_0$  sont des constantes d'intégration, quelconque et *a priori* non nulles.

Remarquons que si la vitesse est constante, on a

$$v_0 = \frac{x}{t},$$

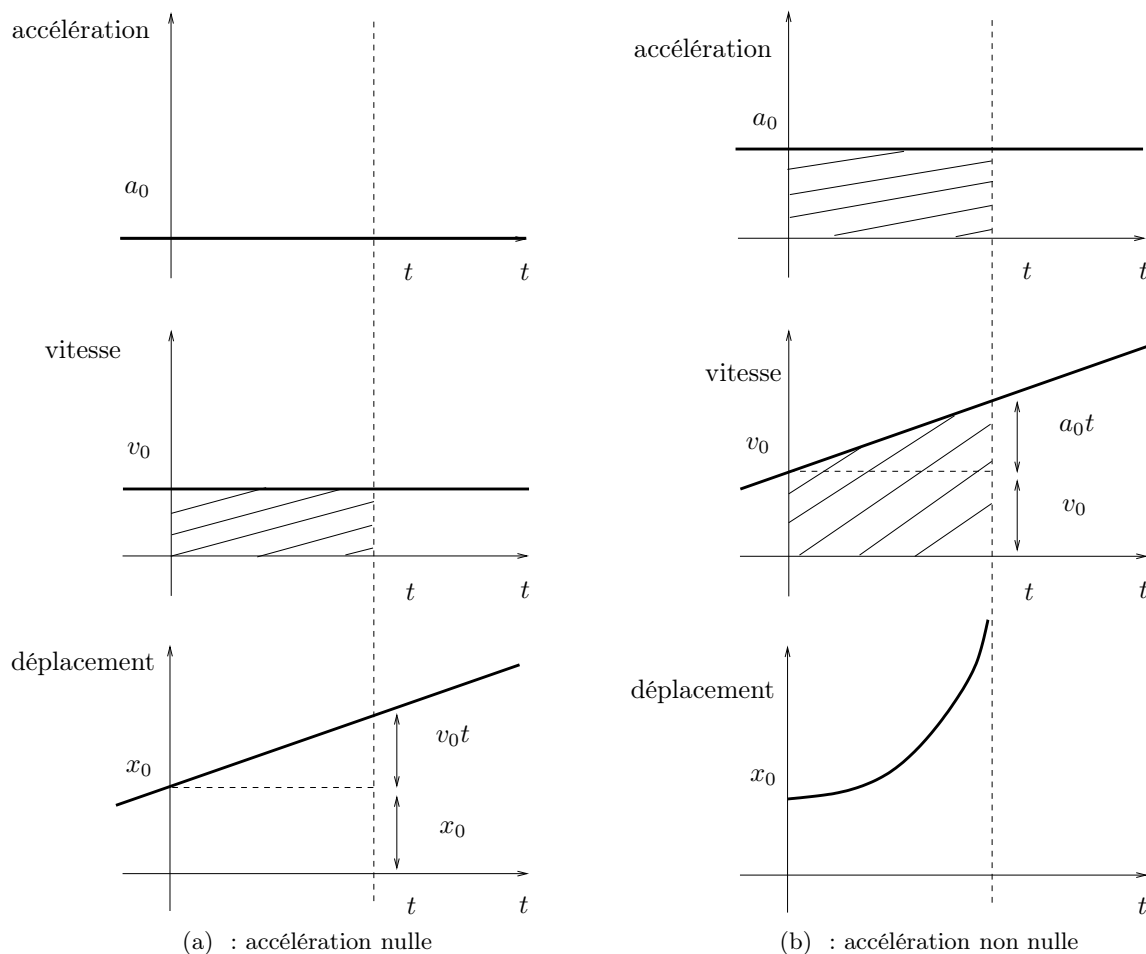


FIGURE 4.16. Les courbes d'accélération, de vitesse et de déplacement

formule à partir de laquelle, on peut retrouver (4.57c) (hormis la constante d'intégration  $x_0$ ).

Le sens (4.57a)  $\rightarrow$  (4.57b)  $\rightarrow$  (4.57c) correspond à une intégration et le sens (4.57c)  $\rightarrow$  (4.57b)  $\rightarrow$  (4.57a) correspond à une dérivation. De façon plus générale, on donne les formules suivantes :

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t), \quad (4.58a)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t). \quad (4.58b)$$

Pour les plus matheux, cela revient aussi à écrire :

$$v(t) = \int_0^t a(s)ds + v_0, \quad (4.59a)$$

$$x(t) = \int_0^t v(s)ds + x_0, \quad (4.59b)$$

c'est-à-dire que  $v$  est une primitive de  $a$  et  $x$  est une primitive de  $v$ .  $\diamond$

De façon géométrique, cela peut aussi se retrouver en écrivant qu'une intégration correspond à un calcul sous la courbe. Pour passer de l'accélération à la vitesse, on écrit que l'aire comprise entre les abscisses 0 et  $t$  et sous la courbe de la figure du haut de (16(a)) est égale à 0, à laquelle on rajoute la constante d'intégration  $v_0$  : on retrouve donc (4.57b). Pour passer de la vitesse au déplacement, on

écrit que l'aire comprise entre les abscisses 0 et  $t$  et sous la courbe de la figure du milieu de (16(a)) (en hachuré) est égale à  $v_0 \times t$ , à laquelle on rajoute la constante d'intégration  $x_0$  : on retrouve donc (4.57c).

Pour les plus matheux, cela revient à écrire, en utilisant (4.59) :

$$v(t) = \int_0^t a(s)ds + v_0 = \int_0^t 0ds + v_0 = v_0,$$

$$x(t) = \int_0^t v(s)ds + x_0 = \int_0^t v_0 ds + x_0 = v_0 t + x_0.$$

◇

(2)

Il suffit de reprendre la question précédente en remplaçant  $a(t) = a_0 = 0$  par  $a(t) = a_0 \neq 0$ .

Voir la figure 16(b). Un tel solide est dit à mouvement uniformément accéléré. C'est par exemple le cas d'une craie qui tombe dans le vide, un vélo ou une voiture qui roule avec une force motrice constante, si on prend un intervalle de temps suffisamment bref pour que les forces de frottement soient négligées. On reviendra sur cette situation dans le TD chute libre.

De façon plus explicite, on a

$$a(t) = a_0, \quad (4.60a)$$

$$v(t) = a_0 t + v_0, \quad (4.60b)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0, \quad (4.60c)$$

où  $v_0$  et  $x_0$  sont des constantes d'intégration, quelconque et *a priori* non nulles.

Remarquons que si l'accélération est constante, on a

$$a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t},$$

formule à partir de laquelle, on peut retrouver (4.60b). Ici, si la vitesse n'est constante, et on n'a plus  $v_0 = x/t$ , comme le montre (4.60c).

De façon géométrique, cela peut aussi se retrouver en écrivant qu'une intégration correspond à un calcul sous la courbe. Pour passer de l'accélération à la vitesse, on écrit que l'aire comprise entre les abscisses 0 et  $t$  et sous la courbe de la figure du haut de (16(b)) (en hachuré) est égale à  $a_0 \times t$ , à laquelle on rajoute la constante d'intégration  $v_0$  : on retrouve donc (4.60b). Pour passer de la vitesse au déplacement, on écrit que l'aire comprise entre les abscisses 0 et  $t$  et sous la courbe de la figure du milieu de (16(b)) (en hachuré) est égale à l'aire du trapèze de «petite base»  $v_0$ , de «grande base»  $a_0 t + v_0$  et de «hauteur»  $t$ , soit :

$$\frac{v_0 + a_0 t + v_0}{2} \times t = \frac{1}{2} a_0 t \times t + v_0 \times t,$$

à laquelle on rajoute la constante d'intégration  $x_0$  : on retrouve donc (4.60c).

Pour les plus matheux, cela revient à écrire :

$$v(t) = \int_0^t a(s)ds + v_0 = \int_0^t a_0 ds + v_0 = a_0 t + v_0,$$

$$x(t) = \int_0^t v(s)ds + x_0 = \int_0^t (a_0 s + v_0)ds + x_0 = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0.$$

◇

#### ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.27



(1) Par définition

$$\begin{aligned} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} &= \frac{1}{h} \left( x_0 + \int_{t_0}^{t+h} v(s) ds - x_0 - \int_{t_0}^t v(s) ds \right), \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_{t_0}^{t+h} v(s) ds + \int_t^{t_0} v(s) ds \right), \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(s) ds. \end{aligned}$$

(2) On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(t) + \varepsilon(s) ds, \\ &= \frac{v(t)}{h} \int_t^{t+h} ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon(s) ds, \\ &= v(t) + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon(s) ds, \end{aligned}$$

et donc que

$$\left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - v(t) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon(s) ds \right| \leq \frac{1}{h} \max_{s \in [t, t+h]} |\varepsilon(s)| \int_t^{t+h} ds \leq \max_{s \in [t, t+h]} |\varepsilon(s)|$$

Quand  $h$  tend vers zéro, cette dernière quantité tend vers zéro, ce qui nous permet de conclure.

#### ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.28

(1)

Voir la figure 4.26 page 77. La courbe  $x$  semble être une droite et la courbe  $y$  semble être une parabole.

(2)

Voir la figure 4.27 page 77. Cette trajectoire semble être une parabole.

(3)

indice	abscisses	ordonnées
0	0.99876544	1.50984792
1	0.99876544	1.17432616
2	0.99876544	0.83880440
3	0.99876544	0.50328264
4	0.99876544	0.16776088
5	0.99876544	-0.16776088
6	0.99876544	-0.50328264
7	0.99876544	-0.83880440
8	0.99876544	-1.17432616
9	0.99876544	-1.50984792

TABLE 4.23. Quelques vitesses approchées calculées

Grâce à la section 4.2.2 et à partir du tableau 4.11 page 53, on peut déterminer les vitesses approchées et obtenir les résultats donnés dans le tableau 4.23 page précédente. Les vitesses en  $x$  semblent être constantes, contrairement à celles en  $y$ .

Ces vitesses ont été déterminées aux instants  $t_i + h/2$ . Sur la figure 4.28 page 78, on a représentés les vitesses approchées à chaque fois au milieu de  $[M_i, M_{i+1}]$ ; elles semblent être approximativement tangentes à la courbes.

REMARQUE 4.33. Attention, sur cette figure et les suivantes, les vitesses et les accélérations, d'une autre nature que la trajectoire, ont été représentées avec une échelle, par soucis de clarté. Vous obtiendrez donc peut-être des figures d'allures différentes!

(4)

indice	abscisses	ordonnées
1	0.00000000	-3.35521761
2	-0.00000000	-3.35521761
3	0.00000000	-3.35521761
4	-0.00000000	-3.35521761
5	0.00000000	-3.35521761
6	0.00000000	-3.35521761
7	0.00000000	-3.35521761
8	-0.00000000	-3.35521761
9	0.00000000	-3.35521761

TABLE 4.24. Quelques accélérations approchées calculées

Grâce à la section 4.2.2 et à partir du tableau 4.23 page précédente, on peut déterminer les accélérations approchées et obtenir les résultats donnés dans le tableau 4.24. Les accélérations en  $x$  semblent être nulles et en  $y$ , elles semblent être constantes.

Ces accélérations ont été déterminées aux instants  $t_i$ . Sur la figure 4.29 page 78, on a représentés les accélérations approchées à chaque fois au point  $M_i$ . Elles ont l'air d'être constantes, toujours tournées vers le bas.

(5) La méthode graphique est illustrée sur les figures 4.30 page 79 et 4.31 page 79.

(6) Il suffit pour déterminer  $x_{10}$  d'écrire

$$x_{10} = x_0 + \int_0^{t_f} x'(s) ds$$

expression approchée par

$$x_{10} = x_0 + h \sum_{i=0}^9 x'(t_i)$$

ou les valeurs  $x'(t_i)$  sont données dans le tableau 4.12 page 54 et  $h = 1/fe$ . On fait de même pour  $y_{10}$  :

$$x_{10} = y_0 + h \sum_{i=0}^9 y'(t_i)$$

On trouve numériquement

$$\begin{aligned}x_{10} &= 0.9987654433, \\y_{10} &= 0.16776088030124.\end{aligned}$$

Les valeurs exactes sont

$$\begin{aligned}x_{10} &= 0.9987654433, \\y_{10} &= 0,\end{aligned}$$

ce qui donne donc les erreurs suivantes :

$$\varepsilon_x = 1.11022302462516e - 016, \quad (4.61)$$

$$\varepsilon_y = 0.16776 \quad (4.62)$$

Nous verrons dans un autre exercice pourquoi l'erreur est nulle pour  $x$  et seulement «petite» pour  $y$ .

Pour la notation utilisée pour l'équation (4.61) voir l'annexe B.

#### ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.29

- (1) En étudiant les tableaux 4.13 page 55 à 4.16, il semblerait que les vitesses et accélérations approchées soient égales à leurs homologues exacts :
- (2) On rappelle que les formules (4.35) donnent

$$\begin{aligned}v_{x_i} &= \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \approx v_x(t_i + h/2), \\v_{y_i} &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx v_y(t_i + h/2).\end{aligned}$$

Tout cela provient du fait que les formules (4.46) provient de la formule (4.7). Montrons que cette formule est exacte pour un polynôme d'ordre deux en temps, c'est-à-dire que si

$$z(t) = at^2 + bt + c \quad (4.63)$$

alors

$$z'(t) = \frac{z(t + h/2) - z(t - h/2)}{h}.$$

On a

$$z'(t) = 2at + b \quad (4.64)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\frac{z(t + h/2) - z(t - h/2)}{h} &= \frac{1}{h} (a((t + h/2)^2 - (t - h/2)^2) + b((t + h/2) - (t - h/2))), \\&= \frac{1}{h} (a(t^2 + th + h^2/4 - t^2 + th - h^2/4) + b(t + h/2 - t + h/2)), \\&= \frac{1}{h} (2tha + bh), \\&= 2ta + b,\end{aligned}$$

ce qui est exactement la valeur donnée par (4.64)! Ainsi, la formule (4.7) est exacte pour  $y$ , et *a fortiori* pour  $x$ .

En fait, tout cela provient donc du fait que la formule (4.7) est une formule de dérivation numérique d'ordre deux, exacte pour des polynômes de degré 2.

- (3) Il suffit de reprendre les calculs précédents avec l'accélération. Si  $z$  est donné par (4.63), alors

$$z''(t) = 2a \quad (4.65)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{z'(t+h/2) - z'(t-h/2)}{h} &= \frac{1}{h} (2a(t+h/2) + b - 2a(t-h/2) - b), \\ &= \frac{1}{h} (2ah), \\ &= 2a, \end{aligned}$$

ce qui est exactement la valeur donnée par (4.65)!

- (4) Ainsi, la méthode d'approximation des vitesses et des accélérations est ici exacte. En particulier, la méthode du point 5 page 53 de l'exercice 4.28 page 52 est donc exacte! Naturellement, cela est vrai uniquement puisque l'on est dans la cadre de la chute libre. *Dans tout autre cas, les vitesses et accélérations approchées ne sont pas égales aux vitesses et accélérations exactes!*

#### ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.30

- (1) Le centre de gravité  $G(t)$  du palet est repéré par ses coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On a donc

$$\vec{OG}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}. \quad (4.66)$$

Ainsi par dérivation

$$\vec{a}_G(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j}. \quad (4.67)$$

Par ailleurs, les forces extérieures agissant sur le palet sont  $\vec{R}$  et le poids  $m\vec{g}$ . La force  $\vec{R}$  est perpendiculaire à  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et n'a donc pas de composante sur ces deux vecteurs. La composante de  $\vec{g}$  sur  $\vec{i}$  est nulle. Un peu de trigonométrie nous montre que la composante de  $m\vec{g}$  sur  $\vec{j}$  est  $-g \sin(\gamma)$ . On introduit donc  $g_0$  défini par (4.45). De tout cela, on déduit que la composante de la somme des forces sur  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  le plan vaut

$$\sum \vec{F}_{e(0, \vec{i}, \vec{j})} = -g \sin \gamma \vec{j} \quad (4.68)$$

Ainsi, d'après (4.47), (4.67) et (4.68), on a bien (4.46a) et (4.46b).

- (2)  
(3)

#### ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXERCICE 4.31

- (1) L'accélération est constante.  
(2) Simple réécriture.  
(3) On écrit la formule exacte (4.40) entre les instants  $t_0$  et  $t_0 + h/2$

$$\frac{\vec{v}(t_0 + h/2) - \vec{v}(t_0)}{h/2} = \vec{a},$$

ce qui donne bien (4.51).

On peut donc construire  $\vec{v}_0$ , puis  $\vec{v}_1$  à partir de  $\vec{v}_0$ , ... jusqu'à  $\vec{v}_{n-1}$  à partir de  $\vec{v}_{n-2}$ .

- (4) Simple réécriture.

On peut donc construire  $M_0$ , puis  $M_1$  à partir de  $M_0$ , ... jusqu'à  $M_n$  à partir de  $M_{n-1}$ .

Remarquons que l'on peut montrer que cette méthode peut aussi s'écrire

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad M_{i,x} = h \sum_{j=0}^{i-1} v_{j,x} + M_{0,x},$$
$$M_{i,y} = h \sum_{j=0}^{i-1} v_{j,y} + M_{0,y}$$

ce qui constitue un calcul approché d'intégrale par méthode des rectangles (ou du point milieu en toute rigueur). Cette formule approchée est, dans le cas parabolique de la chute libre, encore exacte !

- (5) Voir les figures 4.32 page 79 et 4.33.



#### 4.6. Ensemble des figures (des éléments de corrections)

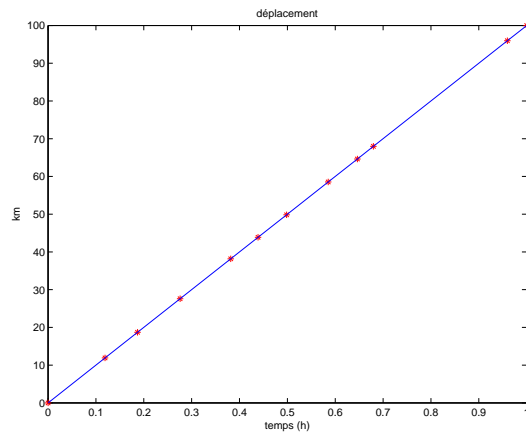


FIGURE 4.17. Le graphique (temps, déplacement) expérimental

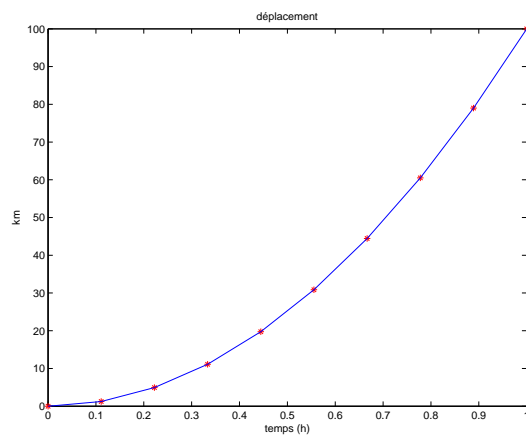


FIGURE 4.18. Le graphique (temps, déplacement) expérimental

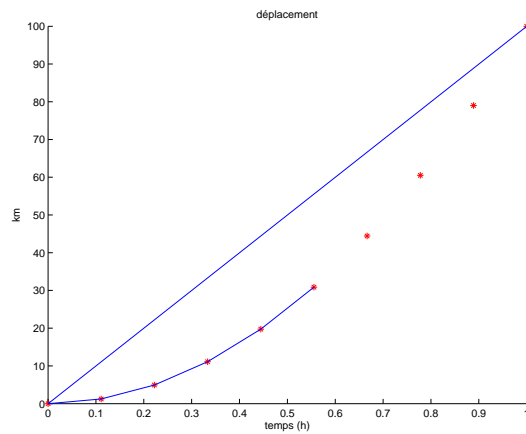


FIGURE 4.19. Les vitesses moyennes vues comme des pentes de droites

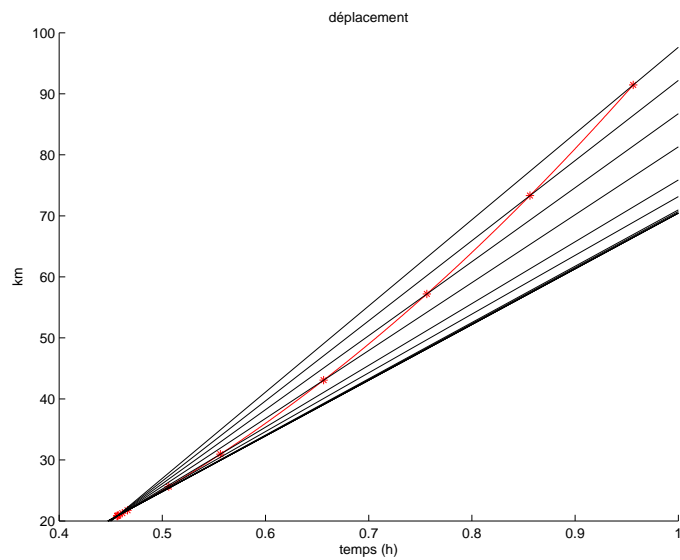


FIGURE 4.20. Les vitesses moyennes vues comme des pentes de droites, de plus en plus proche de la tangente en  $t_0$ .



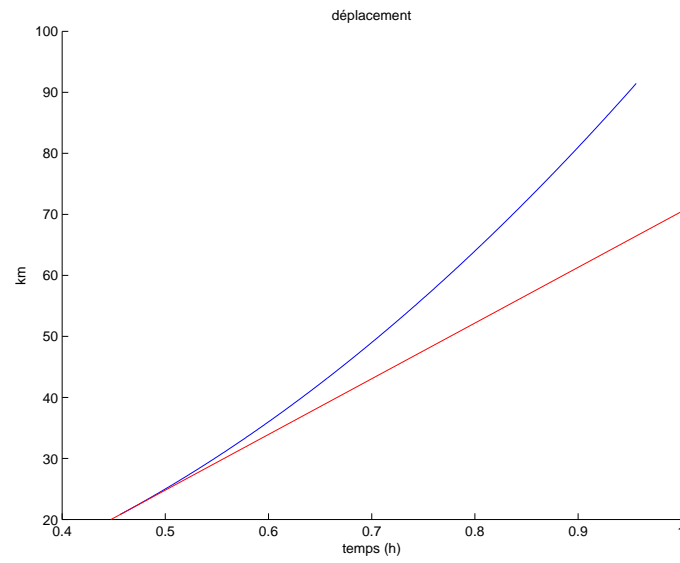
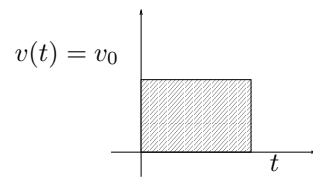
FIGURE 4.21. La tangente à la courbe en  $t_0$ 

FIGURE 4.22. L'aire sous la courbe de la vitesse

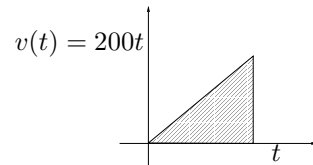


FIGURE 4.23. L'aire sous la courbe de la vitesse

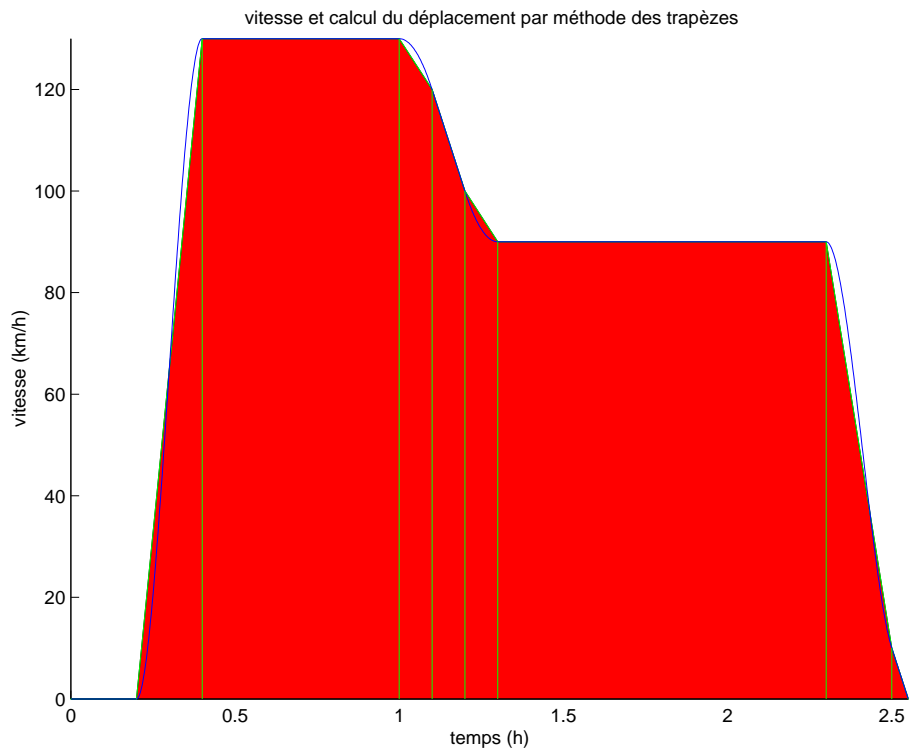


FIGURE 4.24. Un profil de vitesse et la méthode d'intégration approchée des trapèzes

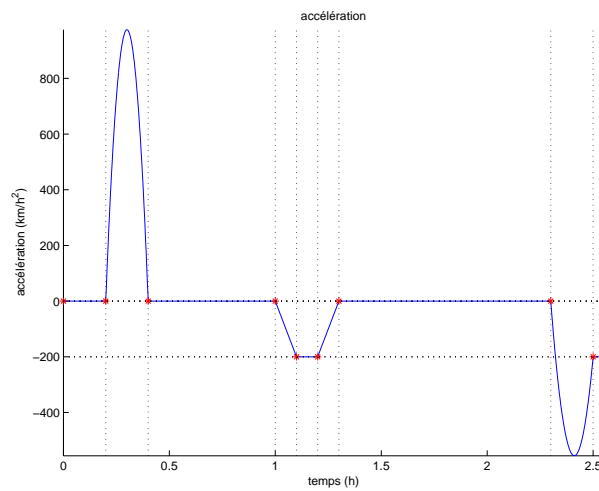


FIGURE 4.25. L'accélération au cour du temps

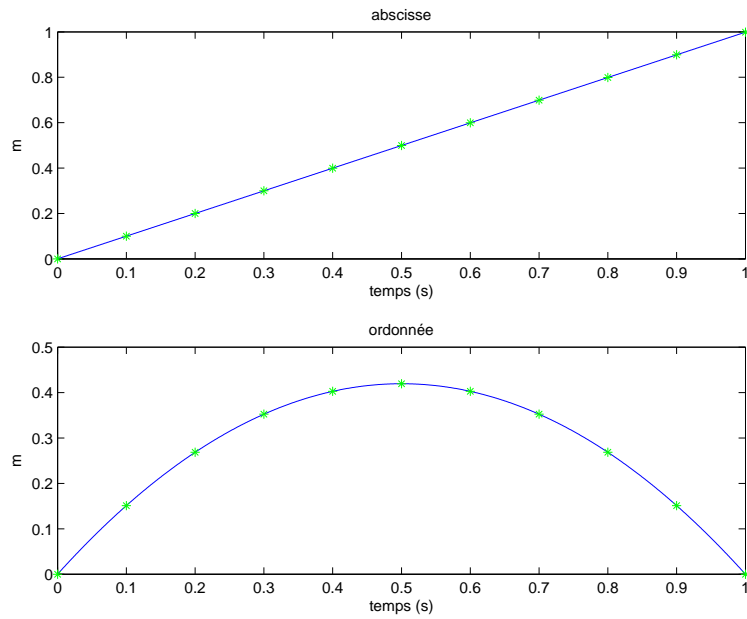


FIGURE 4.26. Les abscisses et les ordonnées au cours du temps

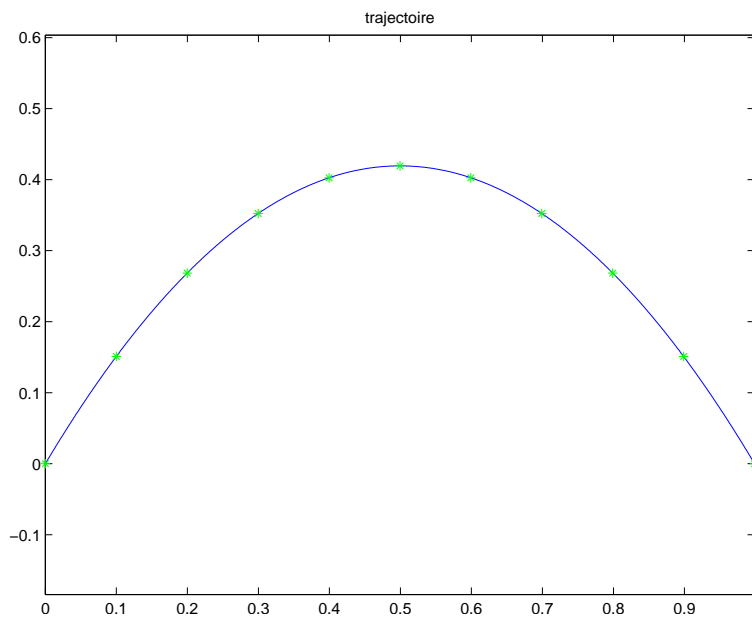


FIGURE 4.27. La trajectoire

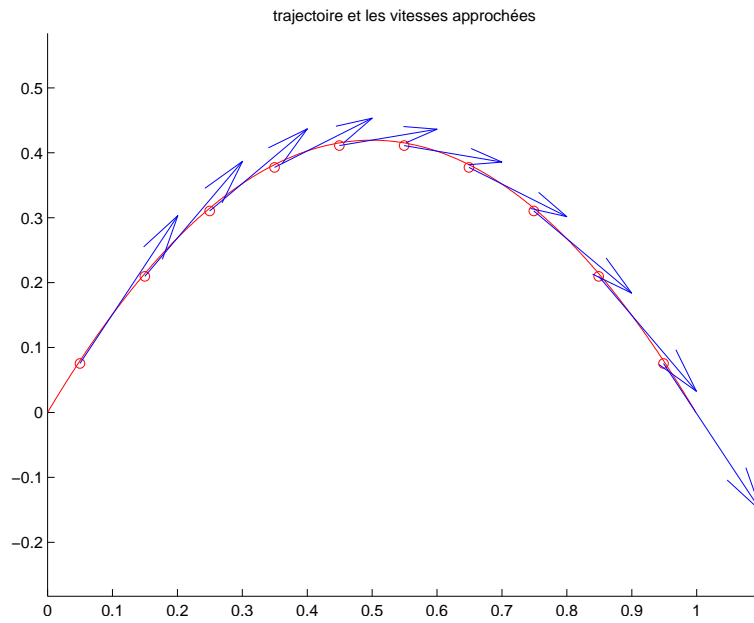


FIGURE 4.28. La trajectoire et les vitesses approchées

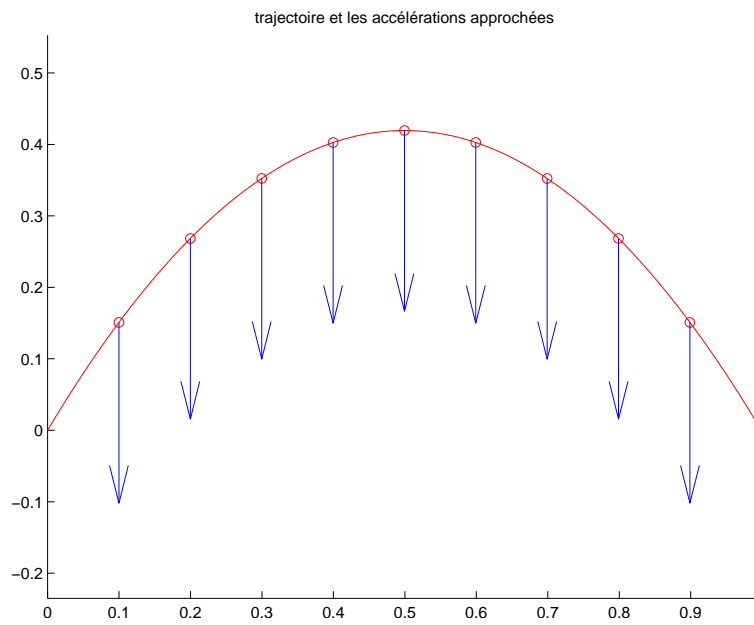


FIGURE 4.29. La trajectoire et les accélérations approchées

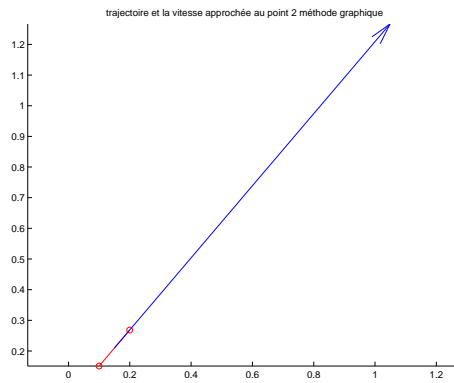


FIGURE 4.30. Méthode graphique de détermination de la vitesse approchée

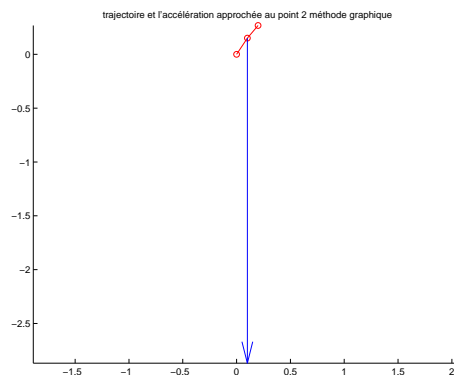


FIGURE 4.31. Méthode graphique de détermination de l'accélération approchée

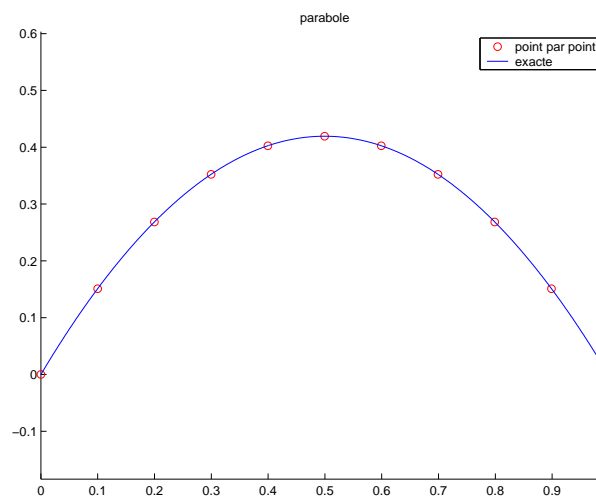


FIGURE 4.32. La parabole et les points construits

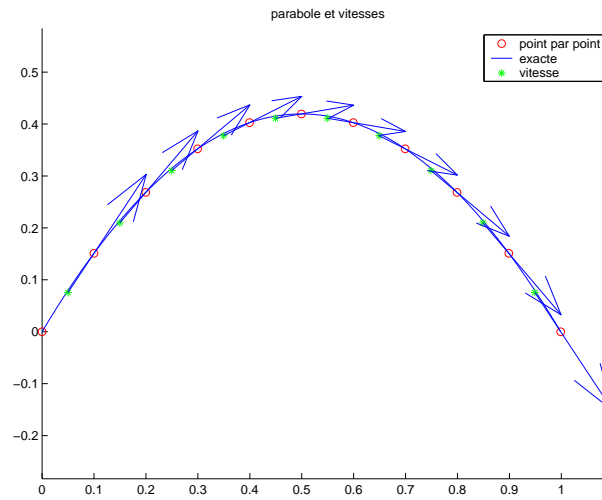


FIGURE 4.33. La parabole, les points construits et les vitesses construites

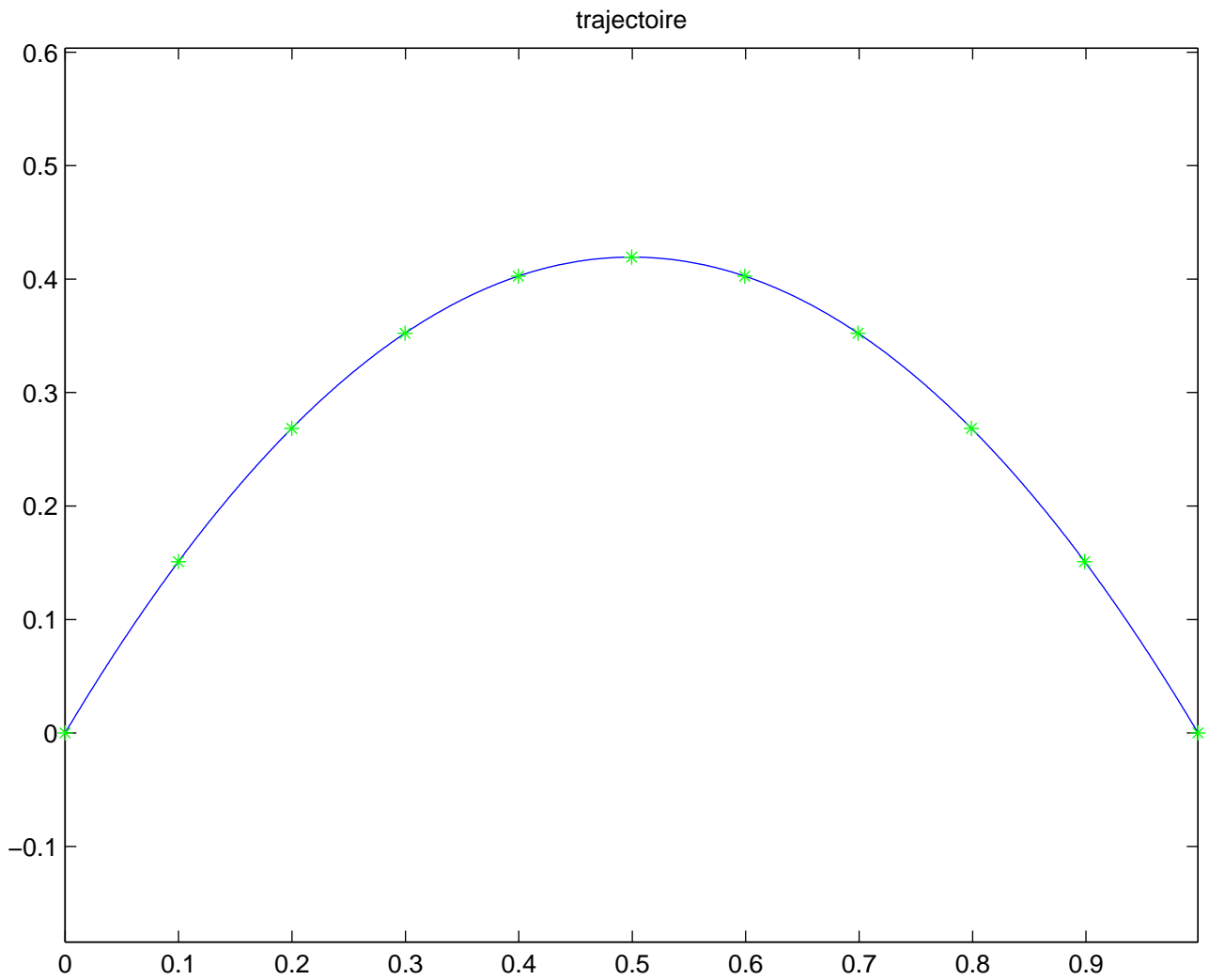


FIGURE 4.34. La trajectoire





## Annexe A

### Identités remarquables

Voir aussi [http://fr.wikipedia.org/wiki/Identité\\_remarquable](http://fr.wikipedia.org/wiki/Identité_remarquable).

On a

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$



## Notation Scientifique

Pour représenter à la fois des «grands nombres» et des «petits nombres», les ordinateurs et les machines à calculer utilisent la «notation scientifique» : c'est une représentation d'un nombre décimal. Elle consiste à exprimer le nombre sous la forme  $\pm a \times 10^n$ , où  $\pm$  est appelé signe,  $a$  est un nombre décimal de l'intervalle  $[1, 10[$  appelé mantisse (ou significande) et  $n$  est un entier relatif appelé exposant. Il n'y a donc qu'un seul chiffre (non nul) à gauche de la virgule, puis un nombre variable de décimales (nombres après la virgule), qui dépend de la précision.

Par exemple

123400000 s'écrit  $1,234 \times 10^8$  en notation scientifique ;

0,000123 s'écrit  $1,23 \times 10^{-4}$ .

Parfois les calculatrices notent cela sous la forme

$$\pm a \quad ^n,$$

tandis que les ordinateurs (voir matlab ou R) écrivent cela

$$\pm a \quad E n$$

Par exemple, dans le tableau 4.20 page 61  $9.9996345 \times 10^{-6}$  signifie 0,000099996345. L'équation (4.61) page 69 signifie

$$\varepsilon_x = 0,00000000000000011022302462516$$

Les plus curieux pourront aussi voir [http://fr.wikipedia.org/wiki/Notation\\_scientifique](http://fr.wikipedia.org/wiki/Notation_scientifique), ou la représentation à virgule flottante page 5 de [BM03].



## Bibliographie

- [Bas04] Jérôme Bastien. *Mathématiques : Applications.*, 2004. Notes de cours de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT31.
- [Bas07] Jérôme Bastien. *Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie.*, 2007. Notes de cours de l'UV MT25 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT25.
- [Bas10] Catherine et François Bastien. *Le petit livre du calcul pratique.* First Edition, Paris, 2010.
- [Bas14] Jérôme Bastien. *Biomécanique*, 2014. Notes de cours de l'UE approche biomécanique et physiologique de la performance (M2 (R) MPS) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique M2 (R) MPS.
- [Bas15] Jérôme Bastien. *Biomécanique du mouvement*, 2015. Notes de cours de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca.
- [BM03] Jérôme Bastien et Jean-Noël Martin. *Introduction à l'analyse numérique.* Dunod, Paris, 2003. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage).