



Corrigé de l'examen CCF2 de statistiques
--

Correction de l'exercice 1.

- (1) (a) $P(X \leq 2) = 1e - 06$
(b) $P(X > 4) = 0.999897$
(c) $P(5 \leq X \leq 9) = 0.104537$
(d) $P(X \leq -6) = 0$
- (2) (a) $P(X \leq -4) = 0.252493$
(b) $P(X > 0) = 0.252493$
(c) $P(0.9 \leq X \leq 3.5) = P(X \leq 3.5) - P(X \leq 0.9) = 0.966623 - 0.81594 = 0.133479$

Correction de l'exercice 2.

- (1) La fonction `int.conf.prop.R` fournit les trois intervalles de confiance suivants :

$$\begin{aligned} &[0.190102, 0.809898], \\ &[0.0927256, 0.907274], \\ &[-0.020278, 1.02028]. \end{aligned}$$

Non inclus dans $[-1, 1]$, le dernier intervalle ne présente pas beaucoup d'intérêt !

- (2) La fonction `int.conf.moy.R` fournit les trois intervalles de confiance suivants :

$$\begin{aligned} &[2.53199, 3.46801], \\ &[2.36028, 3.63972], \\ &[2.13164, 3.86836]. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.

À titre de corrigé, la (nouvelle) annexe F du polycopié de cours est donnée en fin de corrigé dans les annexes à partir de la page 4.

Correction de l'exercice 4.

Attention, la correction ne reprend pas tout à fait l'ordre de l'énoncé !

- (1) On choisit de façon aléatoire n personnes dans un groupe contenant P hommes et Q femmes, c'est-à-dire une proportion

$$p = \frac{P}{P + Q}$$

d'hommes. Ici,

$$n = 30, \quad P = 500, \quad Q = 100. \tag{1}$$

La probabilité d'obtenir x hommes pour $x \in \{0, \dots, n\}$ n'est pas en toute rigueur définie par la loi binomiale. En effet, la proportion d'hommes varie au fur et à mesure du tirage.

- (2) Néanmoins, pour P et Q , "grands", cette proportion varie peu et on peut, dans une première approximation, supposer que cette variation est négligeable et donc que la loi binomiale gère ce modèle. L'espérance est le nombre moyen d'homme choisi, égale d'après le cours à

$$\mathbb{E}(X) = np = \frac{Pn}{P+Q}. \quad (2)$$

Numériquement, on a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{Pn}{P+Q} = \frac{500 \times 30}{500 + 100}$$

soit donc

$$\mathbb{E}(X) = 25, \quad (3)$$

ce qui est bien le nombre attendu. Cependant, ce nombre n'est qu'un nombre moyen, autour duquel des fluctuations peuvent être observées.

- (3) La situation observée correspond à $x = 1$. La probabilité de cet événement correspond à

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad (4)$$

où $p = P/(P+Q)$. On peut calculer cette probabilité avec la fonction `dbinom` ou `echantillon.homme` de R, en tapant

```
dbinom(x, size = n, prob = P/(P + Q))
```

ou

```
echantillon.homme(x, P, Q, n)
```

On obtient

$$P(X = 1) = 6.7851e - 22, \quad (5)$$

ou

$$P(X = 1) = 6.7851e - 22.$$

ce qui revient au même.

- (4)

De façon plus générale, on peut tracer le graphique des probabilités approchées par la loi binomiale comme le montre la figure 1. On tape par exemple

```
echantillon.homme(0:n, P, Q, n, echo = F, fig = T)
```

On constate que cette courbe en cloche est centrée autour de la valeur moyenne donnée par (3). On obtient

$$P(X = 25) = 0.19211, \quad (6)$$

ce qui est plus élevé que (5).

- (5) On se place cette fois-ci dans un cadre rigoureux; la formule (4), n'est plus valable. On peut alors déterminer, en utilisant la fonction `echantillon.homme`, la valeur rigoureuse de $P(X = 1)$, en tapant

```
echantillon.homme(x, P, Q, n, appro = F)
```

On obtient

$$P(X = 1) = 1.5561e - 23, \quad (7)$$

ce qui est finalement guère éloigné de (5). De même, (6) est à remplacer par

$$P(X = 25) = 0.19709, \quad (8)$$

ce qui n'est pas très éloigné.

Enfin, le graphique des probabilités est obtenu (voir figure 2) dans ce cas-là en tapant :

```
echantillon.homme(0:n, P, Q, n, echo = F, fig = T, appro = F)
```

Le graphique obtenu n'est donc pas trop différent de celui de la figure 1.

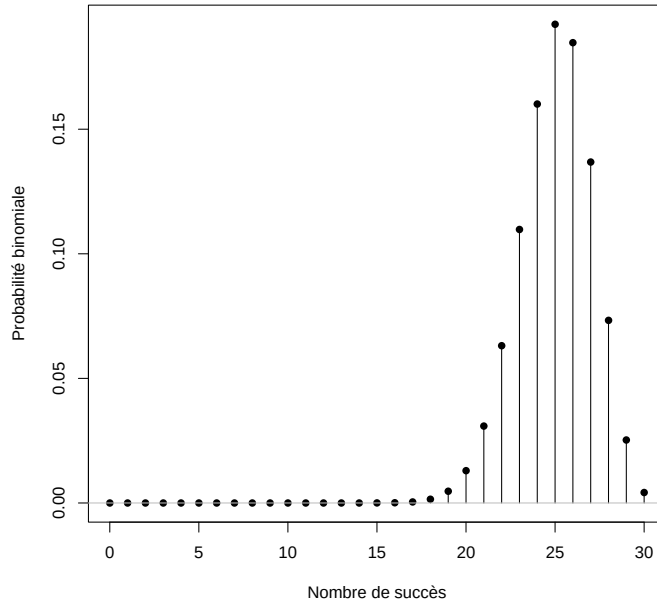


FIGURE 1. Le graphique des probabilités.

- (6) Donnons maintenant la formule rigoureuse : pour déterminer le nombre de cas favorables, on raisonne de la façon suivante : on choisit d'abord x hommes parmi P hommes, ce qui fait C_P^x possibilités, puis on choisit $n - x$ femmes parmi Q femmes, ce qui fait C_Q^{n-x} possibilités. Enfin, on divise le tout par C_{P+Q}^n , qui correspond au nombre de parties à n éléments parmi un ensemble à $P + Q$ éléments. Bref, on a la loi suivante :

$$P(X = x) = \frac{C_P^x C_Q^{n-x}}{C_{P+Q}^n}. \quad (9)$$

On admet que cette expression compliquée tend vers celle donnée par (4), quand P et Q sont "grands".

Sur le plan numérique, on peut comparer ces deux expressions, en calculant le maximum des écarts pour $x \in \{0, \dots, n\}$. Par exemple, pour n , P et Q donnés par (1), ce maximum vaut

$$M = 0.0049817.$$

On peut aussi faire varier P et Q (en gardant $P/(P + Q)$ constant)

$$M(P = 50, Q = 10) = 0.07725,$$

$$M(P = 5000, Q = 1000) = 0.000482,$$

$$M(P = 50000, Q = 10000) = 4.8044e - 05,$$

$$M(P = 5e + 05, Q = 1e + 05) = 4.8029e - 06.$$

On peut aussi calculer l'espérance de cette loi, dont on rappelle qu'elle est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^n xP(X = x). \quad (10)$$

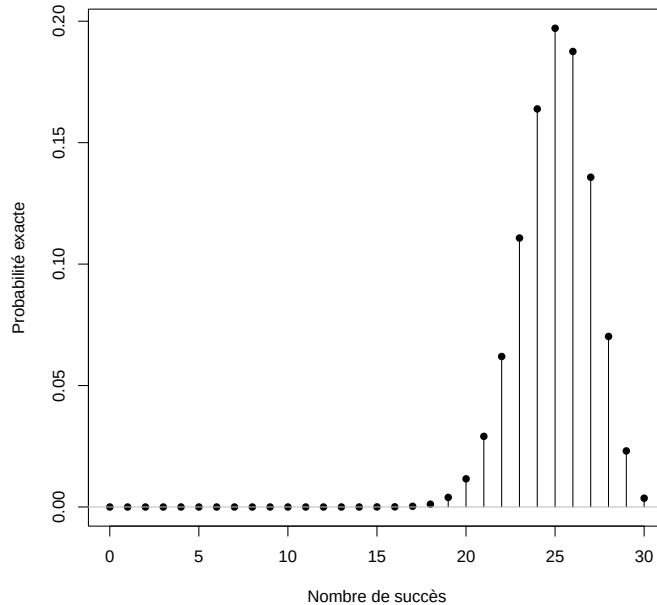


FIGURE 2. Le graphique des probabilités exactes.

Numériquement, on a

$$\mathbb{E}(X) = 25, \quad (11)$$

ce qui est le même résultat que (3).

Attention, la correction ne reprend pas tout à fait l'ordre de l'énoncé !

Annexe A. Introduction

On pourra consulter les trois url suivantes (dont certains passages ont été repris et adaptés ici) :

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre-feuille-ciseaux>

<http://en.wikipedia.org/wiki/Rock-paper-scissors>

http://de.wikipedia.org/wiki/Schere,_Stein,_Papier

Le très célèbre jeu "Pierre-feuille-ciseaux", noté PFC, est un jeu entre deux joueurs, selon les règles suivantes : La pierre bat les ciseaux (en les émoussant), les ciseaux battent la feuille (en la coupant), la feuille bat la pierre (en l'enveloppant). Ainsi chaque coup bat un autre coup, fait match nul lui-même et est battu par le troisième. En théorie, ce jeu est un jeu de hasard pur ; en fait, chacun obéit à une psychologie, inconsciente ou non et les tirages ne sont pas totalement aléatoires. À partir de cela, diverses théories de meilleure attaque se sont développées mais nous adopterons l'hypothèse d'aléat.

Annexe B. Le jeu à trois, quatre et cinq coups

Il existe de nombreuses variantes régionales ou nationales et appellations, souvent fondées sur trois coups possibles, chacun battant un autre et étant battu par le troisième. Dans certaines de ces variantes, de nouveaux symboles apparaissent : comme le puits battant la pierre ainsi que les ciseaux (en les faisant tomber au fond), et étant battu par la feuille (qui le recouvre). Afin de garder une probabilité de victoire égale

entre chaque objet, un cinquième objet a été créé. Il est donc nécessaire qu'il batte deux des quatre objets existants et soit battu par les deux autres. Par exemple, le linuxien Rémi Pannequin¹ propose la toile d'araignée, tout en donnant une manière de produire ce signe à la main (main plate, doigts écartés). Voir <http://linuxfr.org/users/gabygaby/journaux/pierre-feuille-ciseaux-puits-toile-daraignee>. Le mot toile d'araignée pourra être abrégé en " toile ". Les règles sont les suivantes : La toile vainc la feuille en l'étouffant et le puits en le bouchant. Elle est vaincue par la pierre qui la crève, et les ciseaux qui la coupent.

Notons que ces trois versions de jeux (à trois coups, PFC, quatre coups, noté PFCPu ou cinq coups, noté PFCPuT) peuvent être formalisées et généralisées de la façon suivante : il faut et il suffit de définir, pour toutes les paires possibles parmi les n coups choisis (ce qui fait donc un total de $p = C_n^2 = n(n-1)/2$), lequel des deux coups bat l'autre. On a donc un total de $p = n(n-1)/2$ règles pour n coups. On peut disposer ces règles dans la partie inférieure par exemple d'un tableau (ou d'une matrice) carrée. Pour chacun des coups numéro i , pour $1 \leq i \leq n$, on note le résultat contre le coup j , pour $1 \leq i \leq n$ et $j < i$, sous la forme $a_{ij} \in \{-1, 1\}$, la valeur 1, noté + correspond à une victoire et la valeur -1, notée - correspond à une défaite. De façon générale, le nombre de jeux différents, correspondant à toutes les règles possibles est donc égal à $q = 2^p = 2^{n(n-1)/2}$. Il est aussi possible de noter cela légèrement différemment sous la forme d'une matrice de gain (http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_du_minimax_de_von_Neumann). On considère un des joueurs, noté 1 et on définit le tableau (ou une matrice) carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de la façon suivante : les indices de lignes correspondent aux choix du premier joueur, tandis que les indices de colonnes correspondent aux choix du second joueur. a_{ij} est égal à 1, noté +, 0, si $i = j$ ou -1, noté -, selon que l'on ait une victoire, un match nul (si $i = j$) ou une défaite. Cette matrice est antisymétrique, puisque $a_{ij} = -a_{ji}$. Par exemple, dans le cas de PFC, le tableau est donné par :

	P	F	C
P	0	-	+
F	+	0	-
C	-	+	0

Ici les règles sont

La feuille bat la pierre ; (12a)

la pierre bat les ciseaux ; (12b)

les ciseaux battent la feuille. (12c)

Remarquons que chaque coup bat un des trois autres et est battu par le troisième ; cela peut aussi se traduire par le fait que

Chaque ligne du tableau contient autant de + que de - . (13)

Si l'on considère le jeu à quatre objets "Pierre, feuille, ciseaux, puits", noté PFCPu, pour lequel, aux règles précédentes, on adjoint les trois règles suivantes :

Le puits bat la pierre ; (14a)

la feuille bat le puits ; (14b)

le puits bat les ciseaux, (14c)

on aboutit au tableau suivant :

1. avec son fils de six ans, en 2008 !

	P	F	C	Pu
P	0	−	+	−
F	+	0	−	+
C	−	+	0	−
Pu	+	−	+	0

On constate que sur ce tableau que (13) n'est plus vrai. La deuxième et la quatrième ligne contiennent deux + et un seul − : la feuille et le puits sont donc plus forts que les deux autres objets. Pour avoir un jeu équilibré, la règle (13) traduit le fait que, si les choix sont aléatoires, chaque coup a autant de chance de perdre que de gagner contre n'importe lequel des autres coups (distincts). Si on rajoute un objet, noté par exemple T, on peut alors définir totalement le tableau à cinq objets : on commence par remplir la dernière colonne, qui ne peut être que (+, −, +, −, 0), de façon à ce que les quatre premières lignes aient deux signes − et deux signes +. On remplit alors la dernière ligne comme l'opposé de cette colonne, qui est donc nécessairement (−, +, −, +, 0). On aboutit au tableau suivant :

	P	F	C	Pu	T
P	0	−	+	−	+
F	+	0	−	+	−
C	−	+	0	−	+
Pu	+	−	+	0	−
T	−	+	−	+	0

Ainsi, pour ce jeu à cinq coups, les règles sont donc nécessairement données par (12) , (14) et les 4 règles suivantes (en appelant "toile (d'araigné)" le dernier objet, noté T, comme a choisi le linuxien Rémi Pannequin)

La pierre bat la toile ; (15a)

la toile bat la feuille ; (15b)

la toile bat le puits ; (15c)

les ciseaux battent la toile. (15d)

Pour $n = 5$, on a donc bien un total de $p = n(n - 1)/2 = 10$ règles.

Annexe C. Généralisation à un nombre de coups quelconque

Le site <http://www.umop.com/rps.htm> propose des règles à 7, 9, 11, 15, 25 et même à 101 coups ! En fait, une condition nécessaire pour que (13) ait lieu est bien sûr que

$$n \text{ soit impair.} \quad (16)$$

Sans avoir à apprendre par cœur les terrifiantes $p = C_1^{201} = 5050$ règles de <http://www.umop.com/rps101.htm>, on peut en fait systématiser un jeu à un nombre impair de coup n de la façon suivante. On remarque que les tableaux à 3 et 5 coups obéissent à la loi suivante : la diagonale est formée de 0, la sous-diagonale de +, la sur-diagonale de −, et ainsi de suite. On peut donc proposer la chose suivante : on remplace chacun des objets

par un numéro i dans $\{1, \dots, n\}$. La matrice A est donnée alors par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & - & + & - & + & \dots \\ + & 0 & - & + & - & \dots \\ - & + & 0 & - & + & \dots \\ + & - & + & 0 & - & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & - & + & - & + & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Ainsi, les éléments a_{ij} de la matrice sont définis par

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j, \\ +, & \text{si } ((i > j \text{ et } i - j \text{ est impair}) \text{ ou } (i < j \text{ et } i - j \text{ est pair})), \\ -, & \text{si } ((i > j \text{ et } i - j \text{ est pair}) \text{ ou } (i < j \text{ et } i - j \text{ est impair})). \end{cases} \quad (18)$$

Chacune des paires de coup (i, j) est donc définie par la règle suivante :

$$\text{si } i = j, \text{ match nul}, \quad (19a)$$

$$\text{si } i > j, i \text{ l'emporte sur } j \text{ ssi } i - j \text{ est impair}, \quad (19b)$$

$$\text{si } i < j, i \text{ l'emporte sur } j \text{ ssi } i - j \text{ est pair}. \quad (19c)$$

Dans le cas où $i > j$, on se rappellera de façon mnémotechnique que le plus grand nombre "perd" si la différence est "paire", autrement dit le plus grand nombre gagne si la différence est impaire. On peut aussi écrire cela de la façon équivalente suivante :

$$\text{si } i = j, \text{ match nul}, \quad (20a)$$

$$\text{si } i \text{ et } j \text{ sont distincts et n'ont pas la même parité, le plus grand l'emporte}; \quad (20b)$$

$$\text{si } i \text{ et } j \text{ sont distincts et ont la même parité, le plus petit l'emporte}. \quad (20c)$$

C'est exactement, ce qui est proposé sur <http://en.wikipedia.org/wiki/Rock-paper-scissors> : "Alternatively, the rankings in rock-paper-scissors-Spock-lizard may be modeled by a comparison of the parity of the two choices. If it is the same (two odd-numbered moves or two even-numbered ones) then the lower number wins, while if they are different (one odd and one even) the higher wins." soit "Sinon, le classement peut être exprimé par une comparaison de la parité des deux choix. Si ce sont les mêmes (deux entiers impairs ou deux impairs), le nombre le plus faible l'emporte, tandis que si elles sont différentes (un impair et un pair), le plus élevé l'emporte."

Par exemple, pour $N = 11$, on a le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
2	+	0	-	+	-	+	-	+	-	+	-
3	-	+	0	-	+	-	+	-	+	-	+
4	+	-	+	0	-	+	-	+	-	+	-
5	-	+	-	+	0	-	+	-	+	-	+
6	+	-	+	-	+	0	-	+	-	+	-
7	-	+	-	+	-	+	0	-	+	-	+
8	+	-	+	-	+	-	+	0	-	+	-
9	-	+	-	+	-	+	-	+	0	-	+
10	+	-	+	-	+	-	+	-	+	0	-
11	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	0

On peut montrer qu'avec ce choix, le jeu est bien équilibré, c'est-à-dire que (13) a lieu. En effet, la première ligne contient les symboles 0, -, +, Puisque n est impair, la première ligne contient donc autant de + que de -. Il en est de même pour les autres lignes.

Annexe D. Probabilités

En terme de probabilité, si on fait l'hypothèse de tirages aléatoire, chaque coup $i \in \{1, \dots, n\}$ est équiprobable et la probabilité que la variable aléatoire X égale à la valeur de i est donc donnée par

$$P(X = i) = \frac{1}{n}. \quad (21)$$

Si, pour une partie donnée, on s'intéresse cette fois-ci à la variable aléatoire Y égale à 1 (resp. -1) si le joueur 1 gagne (resp. perd) ou 0 s'il y a match nul. Y est donc le gain algébrique du joueur 1, au sens de http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_du_minimax_de_von_Neumann. Si on fait l'hypothèse que chacun des joueurs joue indépendamment de l'autre, les deux valeurs de i et j sont indépendantes. La variable aléatoire (i, j) prend donc ses valeurs de façon équiprobable dans $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ et la probabilité $P((i, j) = (i_0, j_0))$ où (i_0, j_0) est donné, est donc égale à $1/n^2$:

$$P((i, j) = (i_0, j_0)) = \frac{1}{n^2}. \quad (22)$$

Le match nul a lieu si $i = j$, de probabilité égale à $\sum_{i=1}^n P((i, j) = (i, i))$, soit d'après (22), $n/n^2 = 1/n$. De même, la victoire a lieu si et seulement si $Y = 1$. D'après la construction de la matrice de gain, cette probabilité est égale au nombre de signe + dans la matrice A multiplié par $1/n^2$. La matrice A contient n symboles égaux à 0 et d'après (13) autant de symbole + que de - ; si r est le nombre de ces symboles, on a donc $2r + n = n^2$ et donc $r = (n^2 - n)/2 = n(n-1)/2$. Ainsi, $P(Y = 1) = n(n-1)/2/n^2 = (n-1)/(2n)$. Il est en de même pour $P(Y = -1)$. Ainsi

$$P(Y = 0) = \frac{1}{n}, \quad (23a)$$

$$P(Y = 1) = \frac{n-1}{2n}, \quad (23b)$$

$$P(Y = -1) = \frac{n-1}{2n}. \quad (23c)$$

Notons que, d'après (23a), la probabilité de match nul diminue quand n augmente. De prendre n plus grand rend les règles plus nombreuses mais permet donc de diminuer le nombre de matchs nuls ! Cette probabilité est égale $1/3$ pour le jeu PFC et devient égale à $1/5$ pour le jeu PFCPuT. Enfin, notons que

$$\mathbb{E}(Y) = 0, \quad (24)$$

ce qui traduit que ce jeu est un jeu à somme nulle. Cette égalité provient de (23) ; en effet, par définition,

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times P(Y = 0) + (1) \times P(Y = 1) + (-1) \times P(Y = -1) = \frac{n-1}{2n}(1-1) = 0.$$

Annexe E. Simulations aléatoires

On pourra consulter la fonction `pfc.R` disponible sur

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/M2APA/fonctionsR/pfc.R>

Grâce à la fonction `pfc.R` on simule un tirage aléatoire correspondant à N parties, avec ici

$$N = 5e + 05. \quad (25)$$

Si on simule le jeu PFC, on a donc

$$n = 3, \quad (26)$$

et pour le jeu PFCPuT, on a

$$n = 5. \quad (27)$$

On pourra consulter les deux fichiers suivants, contenant les résultats de ces longues parties sur

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/M2APA/donneesexamen/pfc3.txt>

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/M2APA/donneesexamen/pfc5.txt>

Chacun de ces deux fichiers contiennent les données suivantes : `un`, `deux`, `res.un` et `res.deux`, qui contiennent respectivement, les coups du joueur 1 (qui peuvent être "C", "F" et "P" pour 3 ou "C", "F", "P", "Pu" et "T" pour 5) puis, de même, les coups du joueur 2, puis, pour le joueur 1, les résultats de la partie (qui peuvent être "d", "n" et "v", pour défaite, nul, victoire) et enfin, de même le résultat de la partie pour le joueur 2.

On peut dénombrer les matchs nuls, victoires et défaites pour le joueur 1 et en déduire les proportions suivantes, correspondant respectivement aux matchs nuls, victoires et défaites : pour $n = 3$, on a

$$pr_n = 0.334124, \quad (28a)$$

$$pr_v = 0.332388, \quad (28b)$$

$$pr_d = 0.333488, \quad (28c)$$

et pour $n = 5$, on a

$$pr_n = 0.200916, \quad (29a)$$

$$pr_v = 0.398942, \quad (29b)$$

$$pr_d = 0.400142, \quad (29c)$$

Les résultats donnés par (28) sont donc tout à fait conformes aux probabilités données par (23) qui valent ici

$$P(Y = 0) = 0.33333333,$$

$$P(Y = 1) = 0.33333333,$$

$$P(Y = -1) = 0.33333333,$$

et les résultats donnés par (29) sont donc tout à fait conformes aux probabilités données par (23) qui valent ici

$$P(Y = 0) = 0.2,$$

$$P(Y = 1) = 0.4,$$

$$P(Y = -1) = 0.4.$$

Notons aussi que l'on peut dénombrer les différents coups joués par chacun des joueurs et en déduire les proportions. Par exemple, pour $n = 5$ pour le joueur 1, l'écart maximum entre les probabilités données par (22) et les proportions vaut :

$$\varepsilon = 0.000488,$$

ce qui est très faible.

On peut aussi comparer les probabilités données par (22) et les proportions d'apparition de chacun des couples, dont l'écart maximum vaut

$$\varepsilon = 0.00065488889,$$

pour $n = 3$ et

$$\varepsilon = 0.00041,$$

pour $n = 5$.

Notons aussi que l'on peut étudier la corrélation entre les coups des deux joueurs, grâce aux fichiers

`http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/M2APA/donneesexamen/pfc3bis.txt`

`http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/M2APA/donneesexamen/pfc5bis.txt`

et la fonction `determin.qualiquali.R` qui nous donne ici une taille d'effet égale à

$$w = 0.0012214027,$$

pour $n = 3$ et

$$w = 0.0018461237,$$

pour $n = 5$, ce qui est très faible, donc la liaison est très faible. Attention, cependant aux probabilités critiques égales à

$$p_c = 0.47430142,$$

pour $n = 3$ et

$$p_c = 0.49197754,$$

pour $n = 5$.

Enfin, notons, que, pour $n = 3$, les nombres de match nuls, de victoires et de défaites du joueur 1 sont respectivement égaux à

$$N_n = 167062,$$

$$N_v = 166194,$$

$$N_d = 166744.$$

Ainsi, si on élimine les match nuls, la proportion de victoire est égale à

$$p = \frac{N_v}{N - N_n} = \frac{166194}{5e + 05 - 167062} = 0.49917402.$$

La fonction `int.conf.prop.R` fournit donc l'intervalle de confiance suivant, au seuil usuel de 95% :

$$[0.49778812, 0.50055992]$$

qui contient bien 1/2. Si on choisit finalement $n = 5$, l'intervalle de confiance au seuil usuel de 95% est :

$$[0.49786324, 0.50063504]$$

qui contient bien 1/2. En fin de partie, le gain du joueur 1 est égal à (pour $n = 5$)

$$g = -600,$$

très faible par rapport à $5e+05$.

Reprenons tous les calculs précédents si on choisit maintenant N toujours défini par (25) mais, par exemple,

$$n = 11. \quad (30)$$

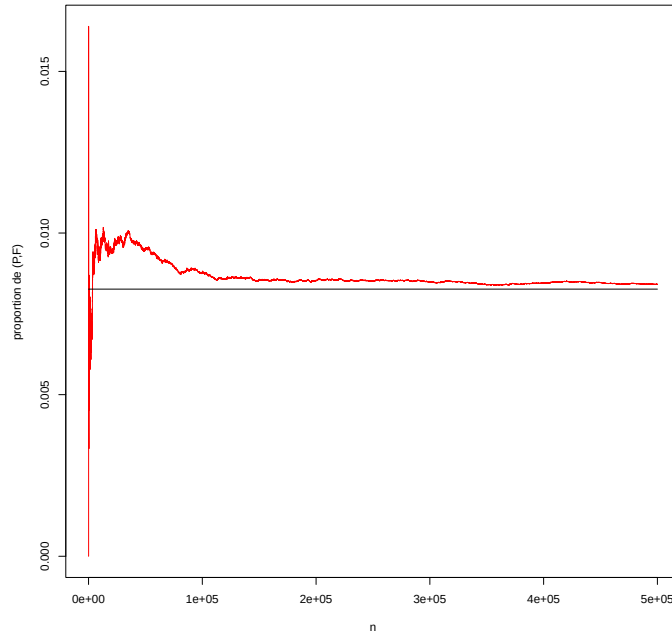


FIGURE 3. Proportions d'apparition d'un couple donné en fonction du nombre de parties.

On peut dénombrer les matchs nuls, victoires et défaites pour le joueur 1 et en déduire les proportions suivantes, correspondant respectivement aux matchs nuls, victoires et défaites : pour $n = 11$, on a

$$pr_n = 0.091038,$$

$$pr_v = 0.45511,$$

$$pr_d = 0.453852,$$

ce qui est tout à fait conforme aux probabilités données par (23) qui valent ici

$$P(Y = 0) = 0.090909091,$$

$$P(Y = 1) = 0.45454545,$$

$$P(Y = -1) = 0.45454545.$$

On peut aussi comparer les probabilités données par (22) et les proportions d'apparition de chacun des couples, dont l'écart maximum vaut

$$\varepsilon = 0.00035153719.$$

On pourra aussi consulter le graphique 3 .