Université Claude Bernard Lyon 1

M2IGAPAS (Semestre 1) statistique
Session 2 06 Janvier 2014

Corrigé de l'examen CT de statistiques

Correction de l'exercice 1.

(1) (a) $P(X \leq 2) = 0.894787$
(b) $P(X > 3) = 0.0213525$
(c) $P(4 \leq X \leq 5) = 0.02111$
(d) $P(X \leq 6) = 0.999988$

(2) (a) $P(X \leq 1) = 0.308538$
(b) $P(X > 2) = 0.5$
(c) $P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1)) = 0.5 - 0.841345 = 0.191462$

Correction de l'exercice 2.

(1) La moyenne de la taille est égale à 190.6296 et son écart-type est égal à 9.1616

(2) On en déduit l'intervalle de confiance de la moyenne au niveau 0.95 :
$$[187.0054, 194.2538],$$
et au niveau 0.99. :
$$[185.7303, 195.5289],$$

(3) On suppose que la taille suit une loi normale dont les paramètres ont été estimés précédemment, c'est-à-dire
$$\mu = 190.6296, \quad \sigma = 9.1616.$$
(a)
Voir la figure 1 page suivante.
(b) On calcule donc, pour cette loi normale, la probabilité :
$$P(X \geq 191) = 0.4839.$$

Correction de l'exercice 3. On étudie le fichier '`notes.txt`'.

(1) (a) La moyenne et l'écart-type des notes de l'ensemble des étudiants sont respectivement égaux à
$$m = 11.4, \quad \sigma = 5.5136, \tag{1}$$
pour l'examen A et
$$m = 0, \quad \sigma = 0, \tag{2}$$
pour l'examen B. Cela est conforme avec le fait que toutes les notes de cet examen sont nulles!

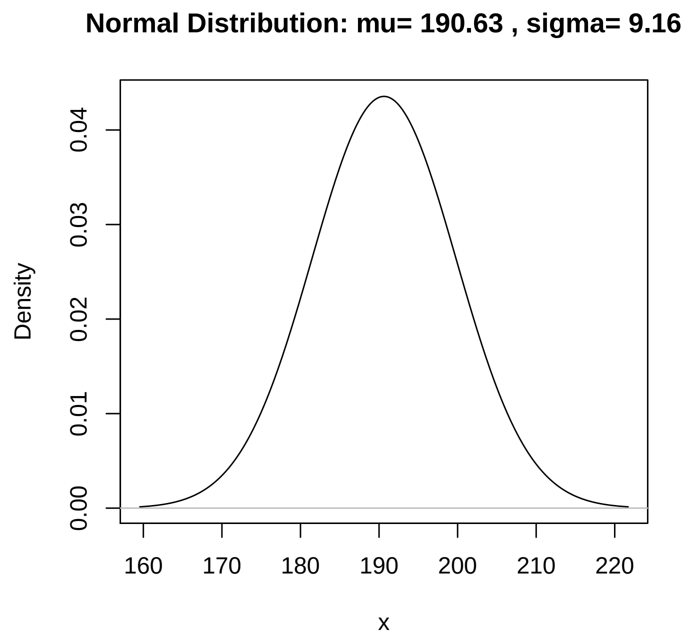

FIGURE 1. La loi normale.

(b) Pour le second examen, les notes par groupes ont les mêmes statistiques (moyennes et écart-type) que (2). Pour le premier examen, on obtient

$$m = 8.57142857142857, \quad \sigma = 6.7295, \tag{3}$$

pour le groupe 1

$$m = 13.875, \quad \sigma = 2.6424, \tag{4}$$

pour le groupe 2.

(2) On s'intéresse au premier examen.

(a) La meilleur note est égale à

$$n_{\max} = 19. \tag{5}$$

(b) Il faut donc choisir A tel que $An_{\max} = 20$ et donc donné par

$$A = \frac{20}{n_{\max}} \tag{6}$$

soit

$$A = \frac{20}{19} = 1.0526. \tag{7}$$

(c) On en déduit les nouvelles notes.

(d) On obtient donc la moyenne et l'écart-type des nouvelles notes de l'ensemble des étudiants respectivement égaux à

$$m = 12, \quad \sigma = 5.8038. \tag{8}$$

(e) Si on compare avec (1), on constate que la moyenne et l'écart-type sont multipliés par A. En effet, on a

$$
\begin{aligned}
A \times m &= 1.05263157894737 \times 11.4 = 12, \\
A \times \sigma &= 1.05263157894737 \times 5.51361950083609 = 5.80381000088009.
\end{aligned}
$$

(3) Si on reprend la question 2 pour le second examen, on constate que cette méthode n'est pas possible puisque

$$n_{\max} = 0 \tag{9}$$

et donc que A n'est pas défini.

(4) *Question facultative*

On s'intéresse de nouveau au premier examen.

(a) Le correcteur souhaite remplacer chaque note n_i par la note $An_i + B$ où A est un coefficient multiplicateur et B un nombre (positif ou négatif).

On rappelle que la moyenne et l'écart-type (au sens de R) de M nombres n_i sont définis par

$$m = \frac{1}{M}\left(n_1 + n_2 + \dots + n_M\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} n_i, \tag{10}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{M-1}\left((n_1 - m)^2 + \dots + (n_M - m)^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(n_i - m)^2}. \tag{11}$$

La moyenne des nouvelles notes est alors égale à

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} n_i &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(An_i + B\right), \\
&= \frac{A}{M}\sum_{i=1}^{M} n_i + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} B, \\
&= \frac{A}{M}\sum_{i=1}^{M} n_i + B,
\end{aligned}
$$

ce qui est bien égal à $Am + B$. Ainsi, le carré de l'écart-type (au sens de R) des nouvelles notes est alors égal à

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}\left(An_i + B - Am + B\right)^2, \\
&= \frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M} A^2 (n_i - m)^2, \\
&= \frac{A^2}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(n_i - m)^2, \\
&= A^2 \sigma^2.
\end{aligned}
$$

On a donc bien

$$\widetilde{m} = Am + B, \tag{12}$$

$$\widetilde{\sigma} = A\sigma, \tag{13}$$

où m et σ sont les moyenne et écart-type des (anciennes) notes n_i.

(b) De (13) avec $\widetilde{\sigma} = \sigma_0$, on déduit

$$A = \frac{\sigma_0}{\sigma}$$

et donc

$$A = \frac{\sigma_0}{\sigma}. \tag{14}$$

Ensuite, de (12), avec $m = m_0$ et A connu, on en déduit,

$$B = m_0 - Am. \tag{15}$$

(c) (i) L'avantage de des nouvelles notes, par rapport aux anciennes, est que les deux groupes ont même moyenne et écart-type et donc sont plus homogènes.

(ii) D'après la question 1a, on a

$$m_0 = 11.4, \quad \sigma_0 = 5.51361950083609, \tag{16}$$

D'après la question 1b, on obtient

$$m = 8.57142857142857, \quad \sigma = 6.7295, \tag{17}$$

pour le groupe 1. Ainsi, d'après (12) et (13), les coefficients A et B pour le groupe 1 sont donnés par

$$A = \frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{5.5136}{6.7295},$$

soit

$$A = 0.8193. \tag{18}$$

De même, d'après (13), on a

$$B = m_0 - Am$$

et donc

$$B = 4.3772. \tag{19}$$

On obtient de même pour le groupe 2 :

$$A = 2.0866, \tag{20}$$

$$B = -17.5518. \tag{21}$$

(iii) Calculons *a posteriori* la moyenne et l'écart-type des nouvelles notes pour le groupe 1

$$m = 11.4,$$
$$\sigma = 5.51361950083609,$$

ce qui est bien identique aux valeurs données par (16)-(17) ! De même, pour le groupe 2,

$$m = 11.4,$$
$$\sigma = 5.51361950083609,$$

(5) *Question facultative*

La question 4 pour le deuxième examen n'est pas intéressante, puisque les deux groupes ont même moyenne et écart-type, tous les deux nuls !

Si tous les étudiants du premier groupe avaient eu la même note et si tous les étudiants du second groupe avaient eu la même note, ces deux notes étant différentes, l'harmonisation eût été impossible puisque les écart-types auraient été nuls et A et B non définis !