

**TRAVAUX DIRIGÉS DE L'UV MQ41**

**RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX**  
**INTRODUCTION AUX CALCULS DES STRUCTURES**

**Printemps 2004**

**K.E. ATCHOLI & J. BASTIEN & N. LABED & M. MEYER**

Document compilé le 23 juin 2004



## Liste des Travaux Dirigés

Travaux Dirigés 1.	Révisions	3
Travaux Dirigés 2.	Cercle de Mohr	9
Travaux Dirigés 3.	Méthodes énergétiques	13
Travaux Dirigés 4.	Étude de poutres circulaires	17
Travaux Dirigés 5.	Flambement	23
Travaux Dirigés 6.	Critères de plasticité	27
Travaux Dirigés 7.	Analyse limite	31



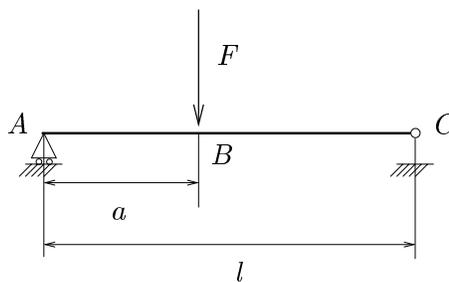
## TRAVAUX DIRIGÉS 1

### Révisions

Pour chacun des exercices, on vérifiera que la structure étudiée est bien isostatique.

Toutes les structures étudiées sont planes, excepté celle de l'exercice 1.5 qui sera étudiée dans l'espace à trois dimensions.

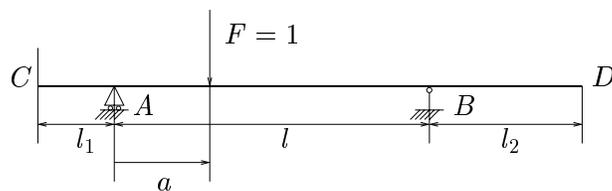
#### EXERCICE 1.1.



La poutre repose sur un appui simple en  $A$  et une rotule en  $C$  et est soumise à la force verticale de module  $F$ .

1. Calculer les réactions d'appuis.
2. Calculer les efforts de la RDM (ou le torseur de cohésion) de cette structure.

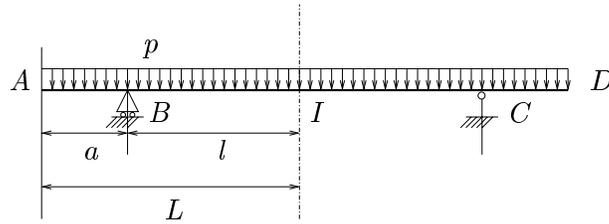
#### EXERCICE 1.2.



On considère la poutre console représentée ci-dessus : elle repose sur un appui simple et une rotule et est soumise à une force ponctuelle d'intensité égale à 1. On choisit le point  $A$  comme origine des abscisses.

Déterminer les efforts de la RDM,  $T(x)$  et  $M(x)$  en tout point de cette structure.

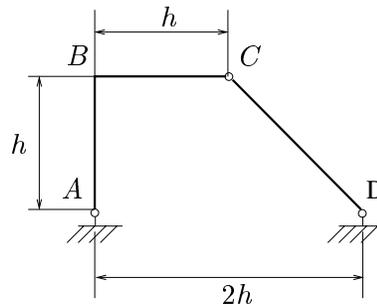
## EXERCICE 1.3.



La poutre repose sur un appui simple et une rotule et est soumise à son poids propre, de densité linéique  $p$ . Elle est symétrique par rapport à un axe vertical passant par son milieu.

1. Calculer les réactions d'appuis.
2. Calculer les efforts de la RDM de cette structure.

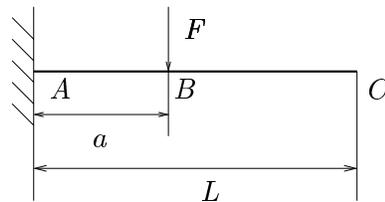
## EXERCICE 1.4.



La structure repose sur deux rotules aux points  $A$  et  $D$ . Elle possède de plus une rotule interne au point  $C$  (en ce point, le moment fléchissant est nul). Elle est soumise à son poids linéique  $p$ .

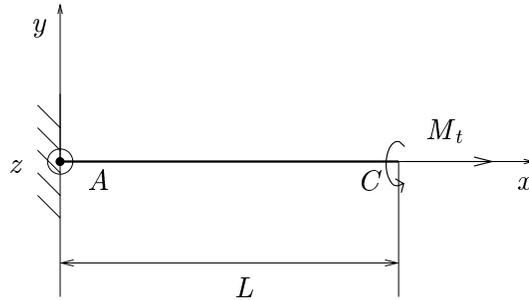
1. Calculer les réactions d'appuis.
2. Calculer les efforts de la RDM de cette structure.

## EXERCICE 1.5.



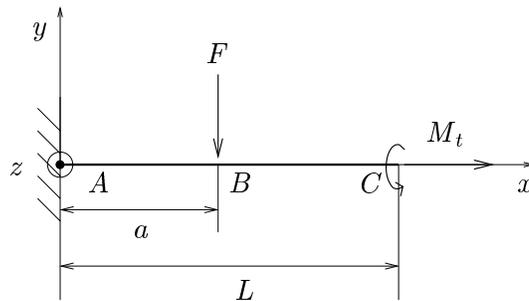
1. On étudie la poutre ci-dessus de façon plane. Cette poutre est encastree en  $A$ , libre en  $C$  et chargée ponctuellement au point  $B$  par une force de module  $F$ . La section  $S$  et le moment quadratique  $I$  de la poutre sont constantes. Calculer la flèche de la poutre en  $B$  et  $C$ .

On utilisera pour cette question, l'équation différentielle d'ordre deux de la déformée de la poutre.



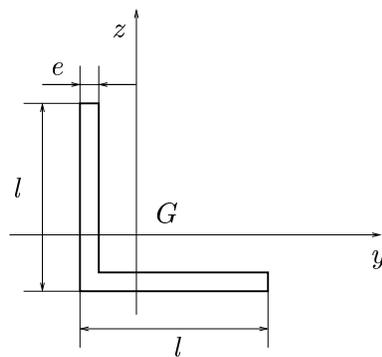
On se place maintenant dans l'espace et on suppose que la poutre est encastree en  $A$  et n'est soumise qu'à un moment de torsion  $M_t = M$  en  $C$ . Les coefficients  $G$  et  $J_\rho$  sont constants.

- Calculer la distribution des contraintes dans cette poutre, que l'on suppose de section circulaire pleine et constante de rayon  $R$ .
- Calculer l'angle de torsion unitaire de la poutre. On utilisera les formules de Bresse (voir polycopié de cours, formules (C.1) et (C.3) de l'annexe C).



- Sans faire les calculs, expliquer comment on trouverait la distribution des contraintes et la déformée de la poutre de la figure ci-dessus.

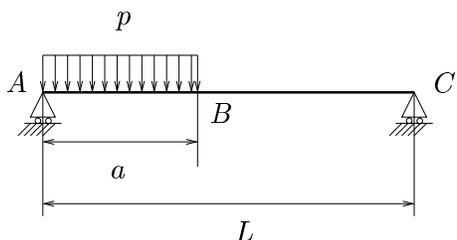
#### EXERCICE 1.6.



On donne une cornière, représentée sur la figure ci-dessus, pour laquelle  $l = 100$  mm. et  $e = 10$  mm.

- Déterminer la position (en hauteur uniquement) du centre de gravité  $G$ .
- Déterminer  $I_y$  le moment quadratique de cette section par rapport à l'axe  $y$ , passant par  $G$ .

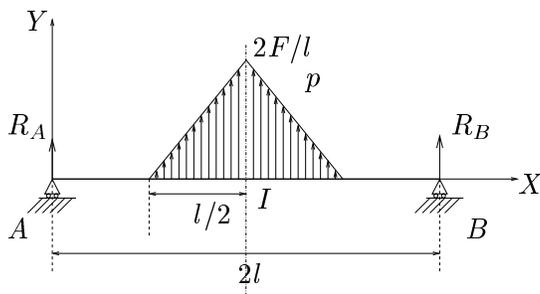
## EXERCICE 1.7.



La poutre repose sur deux appuis simples et est soumise à une densité linéaire de force verticale, constante et égale à  $p$  sur  $[AB]$  et nulle sur  $[BC]$ .

1. Pourquoi cette poutre n'est-elle pas, en toute rigueur, isostatique ? Pourquoi peut-on néanmoins la considérer comme isostatique ?
2. Calculer le moment fléchissant  $M$  sur  $[AB]$ .
3. Calculer le moment fléchissant  $M$  sur  $[BC]$ .
4. En intégrant l'équation  $v'' = M/EI$ , déterminer la flèche  $v$  sur chacun des deux intervalles  $[AB]$  et  $[BC]$ , sans déterminer pour l'instant les constantes d'intégration.
5. Quelles sont les conditions aux limites ? Quelles sont les conditions de continuité au point  $B$ .
6. En déduire<sup>1</sup> la flèche en tout point.

## EXERCICE FACULTATIF 1.8.



On étudie une poutre plane. Elle est orientée de  $A$  vers  $B$  et l'origine est choisie en  $A$ . Cette poutre repose sur deux appuis simples en  $A$  et  $B$  et est soumise à une densité linéique de charge (verticale)  $p$ , symétrique par rapport au point d'abscisse  $l$  définie par

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, l/2], \quad p(x) &= 0 ; \\ \forall x \in [l/2, l], \quad p(x) &= \frac{2F}{l^2} (2x - l), \end{aligned}$$

où  $F > 0$ .

<sup>1</sup>en notant la lourdeur des calculs et en se réjouissant à l'avance de la légèreté relative qui sera offerte par les méthodes énergétiques!

Par symétrie<sup>2</sup>, pour tout cet exercice, nous étudierons cette structure uniquement sur sa partie gauche, c'est-à-dire, pour  $x \in [0, l]$ .

1. Calculer les réactions d'appuis  $R_A$  et  $R_B$ .
2. Calculer la distribution  $M(x)$  du moment fléchissant dans la poutre sur l'intervalle  $[0, l/2]$ .
3. (a) Montrer que

$$\forall x \in [l/2, l], \quad M(x) = -\frac{Fx}{2} - \int_{z=0}^{z=x-l/2} \left(z + \frac{l}{2} - x\right) p \left(z + \frac{l}{2}\right) dz.$$

Attention, ici  $p(z + l/2)$  désigne la valeur de la fonction  $p$  en  $z + l/2$ .

- (b) En déduire la distribution  $M(x)$  du moment fléchissant dans la poutre sur l'intervalle  $[l/2, l]$ .
4. Calculer la distribution  $T(x)$  de l'effort tranchant dans la poutre sur l'intervalle  $[0, l]$ .
5. Comment pourrait-on calculer la flèche dans cette structure (on ne fera pas le calcul) ? Quelle est la difficulté de ce calcul ?

---

<sup>2</sup>En effet, on rappelle que, puisque la structure est symétrique, les efforts normaux, le moment fléchissant et la flèche sont symétriques par rapport au point d'abscisse  $l$  et l'effort tranchant est antisymétrique.



## TRAVAUX DIRIGÉS 2

### Cercle de Mohr

#### EXERCICE 2.1.

On étudie une barre qui ne travaille qu'en compression, soumise à un effort normal  $F$ .

En un point quelconque d'une section droite, donner le tenseur des contraintes et tracer le cercle de Mohr correspondant.

*La suite de cet exercice sera traitée au cours du TD 6, exercice 6.1.*

EXERCICE 2.2. Soit un point  $M$  d'un milieu continu soumis à un état de contraintes planes. On connaît les contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2$  (et  $\sigma_3$  qui est nulle) et un repère principal, noté  $(x, y)$ . On supposera, sans perte de généralité, que

$$\sigma_2 \leq \sigma_1. \quad (2.1)$$

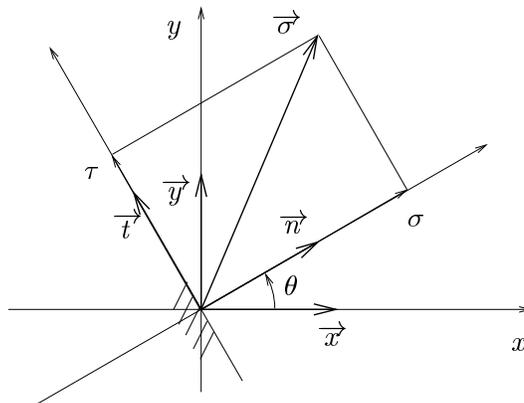


FIG. 2.1 – Une facette dans le plan

On rappelle que si  $\vec{F}$  est la contrainte subie par la facette dont la normale est dirigée par  $\vec{n}$ , on considère les contraintes normales et tangentielles  $\sigma$  et  $\tau$  définies par

$$\vec{F} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}.$$

On se rapportera à la figure 2.1.

1. Rappeler les formules du cours qui permettent de connaître  $\sigma$  et  $\tau$  en fonction de l'angle  $\theta = (\vec{x}, \vec{n})$  (cf. figure 2.1).
2. Tracer le cercle de Mohr et proposer un moyen graphique pour trouver les valeurs  $\sigma$  et  $\tau$ , pour une facette quelconque. On utilisera les propriétés relatives aux angles vues en cours et on s'efforcera de ne faire aucun calculs.

La connaissance des contraintes principales permet donc de déterminer, graphiquement ou par le calcul, l'état de contrainte d'une facette d'orientation quelconque. Dans les exercices 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6, on propose l'inverse : à partir d'un état de contrainte quelconque, déterminer les contraintes et les directions principales, et ce de façon analytique ou graphique. Les résultats de ces exercices seront appliqués en TP, où l'on utilisera les mesures effectuées par des jauges pour déterminer un état de contrainte plan. Peut-être en TP travaillerez-vous sur les déformations et non sur les contraintes (en effet, on peut mesurer des déformations par extensiométrie mais non des contraintes) mais le tenseur des déformations possède les mêmes propriétés que le tenseur des contraintes.

### EXERCICE 2.3.

*Cet exercice est extrait de l'examen final de MQ41 de Janvier 2003.*

Localement, on prévoit par calcul un état de contraintes planes, donné par le tenseur des contraintes (exprimé en Mpa) :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 100 & -50 \\ -50 & -20 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

1. Tracer le cercle de Mohr associé à cet état de contrainte.
2. En déduire les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  avec  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

*La suite de cet exercice sera traitée au cours du TD 6, exercice 6.2.*

EXERCICE 2.4. On se place dans un état de contraintes planes (comme dans l'exercice 2.2) et on supposera que l'on a (2.1).

On suppose que l'on connaît  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  trois contraintes normales dans trois directions formant des angles  $\pi/4$  (cf. figure 2.2).

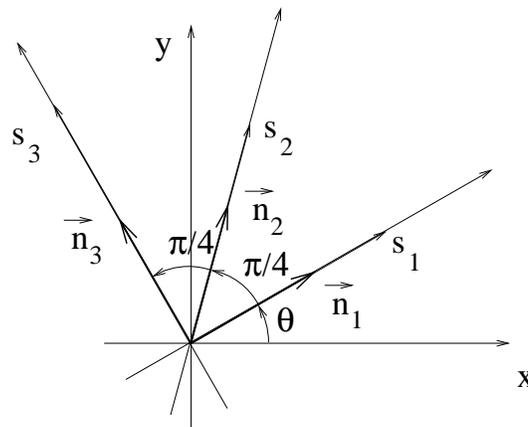


FIG. 2.2 – Trois mesures de contraintes normales

Ne connaissant pas l'angle  $\theta$ , on cherche les contraintes et les directions principales.

1. Montrer, en utilisant les résultats de l'exercice 2.2, que l'on a

$$s_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta, \quad (2.3a)$$

$$s_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta, \quad (2.3b)$$

$$s_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta. \quad (2.3c)$$

Montrer que le système (2.3) est équivalent à

$$a = \frac{1}{2}(s_1 + s_3), \quad (2.4a)$$

$$b \cos(-2\theta) = s_1 - a, \quad (2.4b)$$

$$b \sin(-2\theta) = s_2 - a, \quad (2.4c)$$

$$\sigma_1 = a + b, \quad (2.4d)$$

$$\sigma_2 = a - b, \quad (2.4e)$$

et en déduire les valeurs de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\theta$  (à  $\pi$  près) sous l'hypothèse (2.1).

2. Que se passe-t-il si  $s_1 = s_2 = s_3$  ?

3. Utiliser le cercle de Mohr pour déterminer les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et l'angle  $\theta$  graphiquement. On utilisera les propriétés relatives aux angles vues en cours et on s'efforcera de ne faire aucun calculs. On pourra, comme habituellement en géométrie, supposer le problème résolu et trouver des propriétés permettant de caractériser les points  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  (représentatifs des trois états étudiés, correspondant aux trois angles  $\theta$ ,  $\theta + \pi/4$  et  $\theta + \pi/2$ ) en fonction des points  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  (voir figure 2.3). On utilisera la rotation d'angle  $\Omega$ , centre du cercle de Mohr et d'angle  $\pi/2$ .

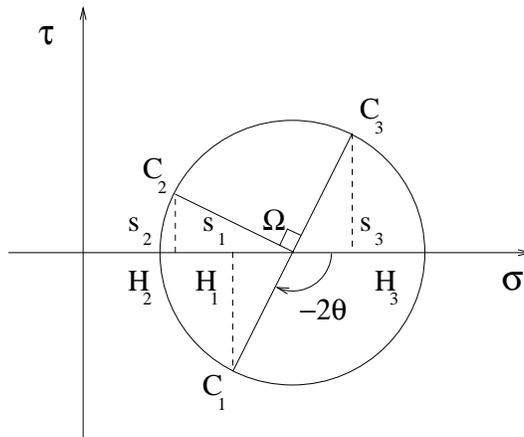


FIG. 2.3 – Les trois états correspondant aux trois angles  $\theta$ ,  $\theta + \pi/4$  et  $\theta + \pi/2$

4. Graphiquement, que se passe-t-il si  $s_1 = s_2 = s_3$  ?

EXERCICE FACULTATIF 2.5. On cherche à généraliser les résultats de l'exercice 2.4 : on se donne un angle  $\alpha$  tel que

$$\alpha \in ]0, 2\pi[ \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\},$$

On suppose que l'on connaît  $s_1, s_2$  et  $s_3$  trois contraintes normales dans trois directions formant trois angles  $\theta, \theta + \alpha$  et  $\theta + 2\alpha$ .

1. Reprendre les calculs de l'exercice 2.4 avec un angle  $\alpha$  quelconque et montrer que l'on peut exprimer les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ainsi que l'angle  $\theta$  (sous l'hypothèse (2.1)).
2. La construction géométrique est elle possible, aussi simplement que dans le cas de l'exercice 2.4 ?

EXERCICE FACULTATIF 2.6. On cherche à généraliser les résultats des exercices 2.4 et 2.5 de façon géométrique. On se donne un angle  $\alpha$  tel que

$$\alpha \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \left[ \setminus \left( \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \right\} \cup \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \right) \right).$$

On suppose que l'on connaît  $s_1, s_2$  et  $s_3$  trois contraintes normales dans trois directions formant trois angles  $\theta, \theta + \alpha$  et  $\theta + 2\alpha$ .

La méthode de l'exercice 2.4 n'est pas applicable, car le centre du cercle n'est pas déterminable dans le cas général.

On supposera, sans perte de généralité, que  $s_3 \in [s_1, s_2]$  ou  $s_3 \in [s_2, s_1]$ .

1. Dans cette méthode, on ne trace initialement que l'axe des  $y$ . L'axe des  $x$  est déterminé ensuite. On note  $(\vec{I}, \vec{J})$  le repère orthonormé considéré.
  - Tracer trois droites  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  parallèles à l'axe des  $y$  et passant par trois points d'abscisses respectives  $s_1, s_2$  et  $s_3$ .
  - Soit un point quelconque  $M'_3$  de  $\mathcal{D}_3$ . On choisit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\beta = 4\alpha + k\pi \in [-\pi, 0].$$

Tracer  $M_1 \in \mathcal{D}_1$  et  $M_2 \in \mathcal{D}_2$  tels que

$$\left( \vec{J}, \widehat{M'_3 M_1} \right) = \frac{\beta}{2}, \quad \left( \vec{J}, \widehat{M'_3 M_2} \right) = \alpha.$$

- Tracer  $\Omega$ , l'intersection des médiatrices de  $[M_1 M'_3]$  et de  $[M_2 M'_3]$ , puis l'axe des  $x$  passant par  $\Omega$ .
- Tracer  $M_3$ , le symétrique de  $M'_3$  par rapport à l'axe des  $x$ .
- Enfin, tracer le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$  et passant par  $M_1, M_2$  et  $M_3$ .

Montrer que cette construction fournit le cercle de Mohr recherché.

2. Application :

Utiliser cette méthode pour les valeurs suivantes de  $\alpha, s_1, s_2$  et  $s_3$  :

$$\alpha = \pi/3, \quad s_1 = 9,65, \quad s_2 = 4,35, \quad s_3 = 6.$$

## TRAVAUX DIRIGÉS 3

### Méthodes énergétiques

Vous trouverez d'abord les énoncés, puis les figures s'y rapportant. Pour chaque structure, on se donnera les caractéristiques complémentaires ( $E, I, S, \dots$ , supposées constantes sur l'ensemble de la structure, sauf indication contraire).

EXERCICE 3.1. Déterminer, par le théorème de Castigliano, le déplacement vertical du point  $B$  de la structure de la figure 3.1a.

EXERCICE 3.2. Déterminer les déplacements verticaux des points  $B$  et  $C$  pour la structure de la figure 3.1b (méthodes de Maxwell ou de la charge fictive).

EXERCICE 3.3. Pour la structure de la figure 3.1c, déterminer la réaction en  $B$  en fonction de  $a$  (Ménabréa).

EXERCICE 3.4. On considère la structure de la figure 3.2a. Les caractéristiques de  $AB$  seront notées  $E_1, I_1, S_1$  et celles de  $BC, E_2, I_2, S_2$ .

1. Déterminer, grâce au théorème de Castigliano, le déplacement vertical en  $C$ , en négligeant les effets des efforts normaux et tranchants.
2. Pour toute la suite, on suppose que

$$E_1 = E_2, \quad I_1 = I_2, \quad S_1 = S_2,$$

et que

$$\frac{l}{h} \ll 1. \tag{3.1}$$

Quelle est l'expression de  $y_C$ , le déplacement vertical en  $C$ , à l'ordre 0 en  $l/h$  ?

3. Calculer  $y_C$  en prenant maintenant en compte les effets des efforts normaux dans l'énergie de déformation.

Quelle est l'expression de  $y_C$ , si la section est carrée de côté  $a$  ?

4. En supposant  $h$  fixé et  $a \rightarrow 0$  avec (3.1) et

$$\frac{a}{l} \ll 1, \quad \frac{a}{h} \ll 1,$$

déterminer  $y_C$  à l'ordre 0 en  $l/h$ . Comparer avec la question 3 et conclure.

EXERCICE 3.5. Pour la situation de la figure 3.2b, on admet le déplacement en  $B$  dû au couple  $C$  :  $y(B) = CL^2/(2EI)$ .

Déterminer en une ligne la rotation de la section  $B$  pour la situation de la figure 3.2c.

EXERCICE 3.6. La structure en  $U$  de la figure 3.3a a une section carrée.

1. Déterminer les efforts de la RDM de cette structure ; on prendra en compte, dans l'énergie de déformation, les effets du moment fléchissant et de l'effort normal.
2. Quelle est la rigidité de ce  $U$  (c'est-à-dire le rapport  $F/y_A$ ) ?

EXERCICE 3.7. Pour la structure de la figure 3.3b, déterminer la réaction d'appui en  $C$ . On pourra utiliser le théorème de superposition ou de Ménabréa.

EXERCICE 3.8. Le portique de la figure 3.4a est constitué de trois barres  $AB$ ,  $BC$  et  $CD$ . On suppose que la poutre  $BC$  est infiniment rigide.

1. Quel est le déplacement horizontal du point  $B$  ?
2. Pouvez trouver une structure équivalente, plus simple, qui permette de retrouver ce résultat plus rapidement ?

EXERCICE 3.9. On étudie la structure de la figure 3.4b.

1. Déterminer les réactions aux appuis.
2. Déterminer les efforts de la RDM dans toutes les sections.
3. Déterminer les rotations en  $A$  et  $F$ .

EXERCICE 3.10. La structure de la figure 3.5a repose sur deux rotules en  $A$  et en  $B$  et sur un appui élastique en  $C$  (ressort de raideur  $k$ ).

1. Est elle isostatique ?
2. Donner l'expression de la dérivée de l'énergie potentielle de déformation par rapport à la composante verticale de la réaction en  $C$ .
3. Calculer le déplacement du point  $C$ .

EXERCICE 3.11. La structure de la figure 3.5b repose sur deux appuis élastiques en  $B$  et  $C$  (deux ressorts de raideur  $k$ ) et est encastrée en  $A$ .

Déterminer le déplacement vertical du point  $C$ .

EXERCICE FACULTATIF 3.12. En cours, on a donné le second théorème de Castigliano, qu'on utilise pour une méthode de force. On donne ici le premier théorème de Castigliano, qu'on utiliserait pour une méthode de déplacement :

THÉORÈME 3.1 (Premier théorème de Castigliano). *Soit une structure élastique linéaire, reposant sur des appuis (de telle sorte qu'elle soit isostatique ou hyperstatique), contrainte à partir de l'état au repos et soumise à un système de forces généralisées indépendantes  $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$  dont les déplacements généralisés associés sont  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Si  $W$  désigne l'énergie de déformation, alors*

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\partial W}{\lambda_i} = F_i.} \quad (3.2)$$

Montrer (3.2). On procédera comme dans le cours en utilisant de même la convention de sommation d'Einstein.

## Ensemble des figures

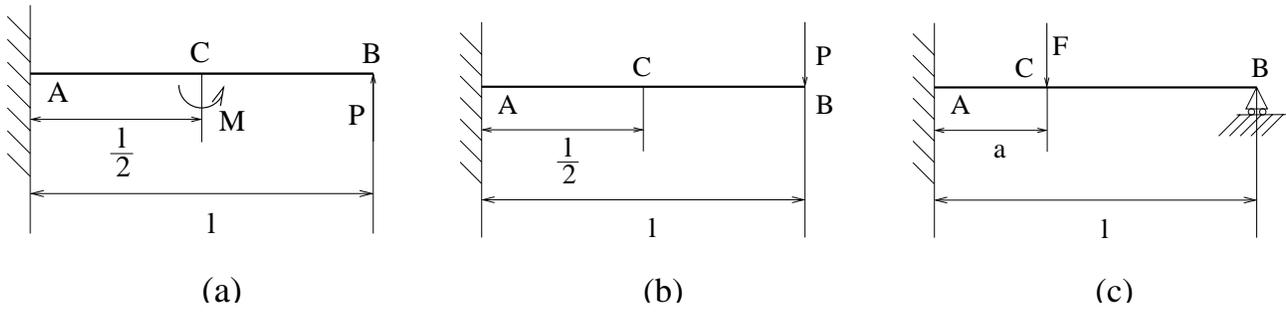


FIG. 3.1 -

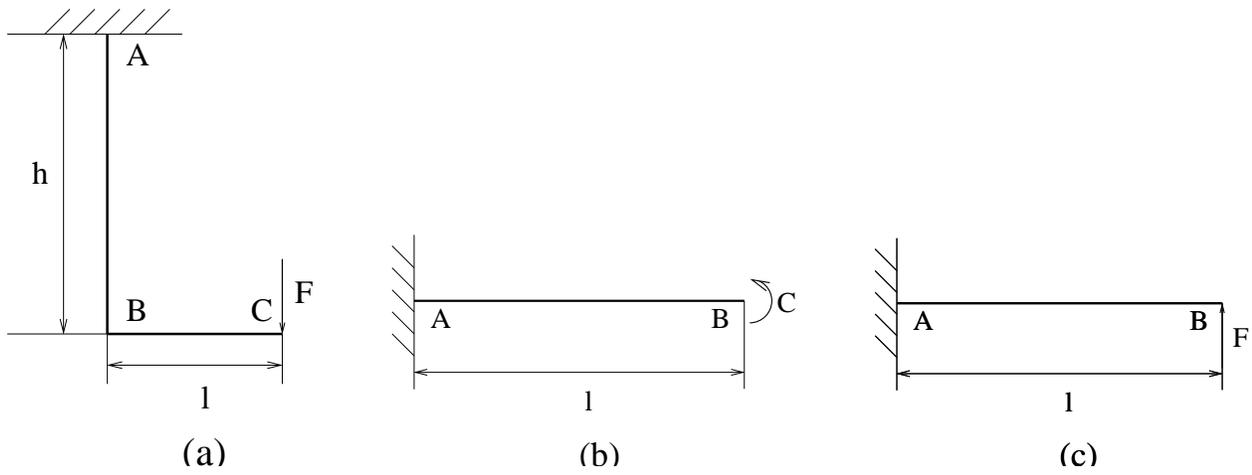


FIG. 3.2 -

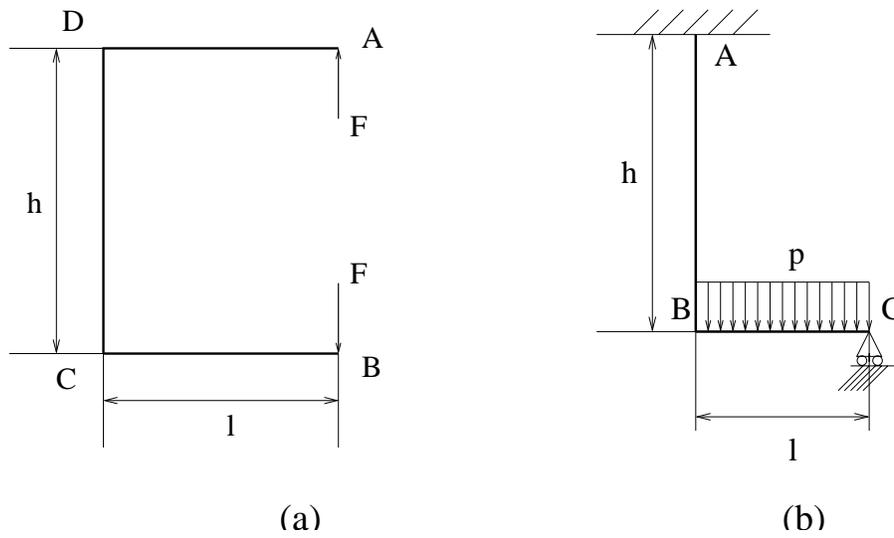


FIG. 3.3 -

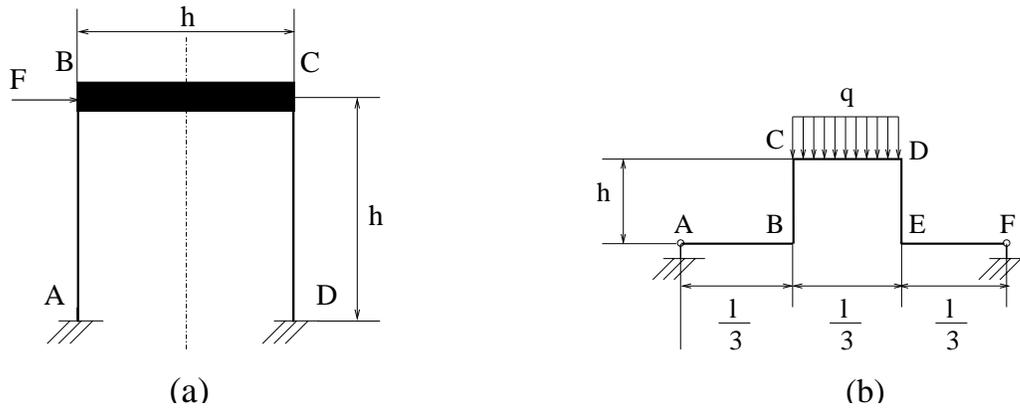


FIG. 3.4 -

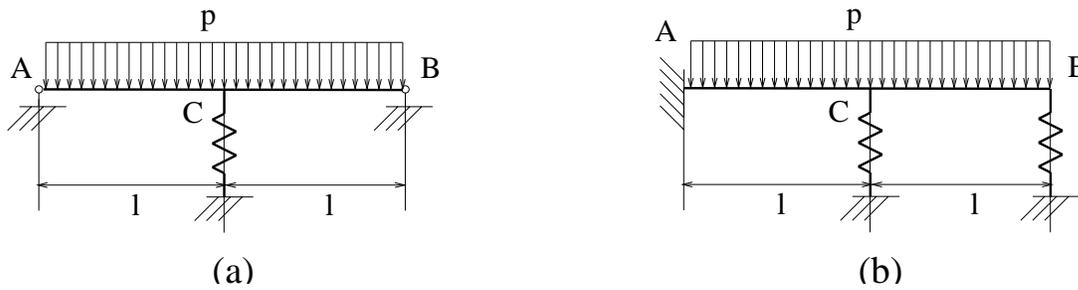


FIG. 3.5 -

## Étude de poutres circulaires

### EXERCICE 4.1.

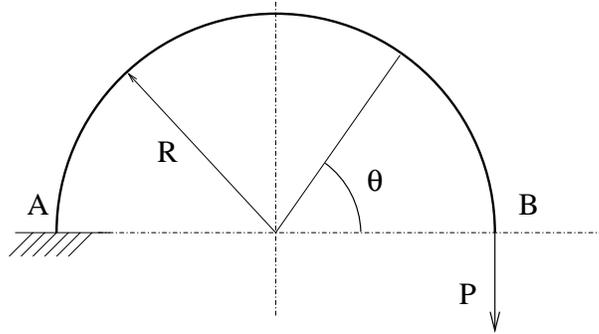


FIG. 4.1 –

On étudie la structure semi-circulaire de la figure 4.1.

1. Déterminer les efforts de la RDM,  $N(\theta)$ ,  $T(\theta)$  et  $M(\theta)$ .
2. Quel est le déplacement vertical de  $B$  ?

### EXERCICE FACULTATIF 4.2.

*Cet exercice est facultatif, mais permet d'utiliser le calcul symbolique de matlab pour calculer aisément des déplacements dans des structures circulaires. Les résultats de cet exercice pourront être utilisés pour les exercices 4.2 et 4.3. Cet exercice pourra aussi être traité en TP.*

On étudie la structure semi-circulaire de la figure 4.2. Elle est soumise aux réactions d'appuis notées  $X$ ,  $Y$  et  $-X$  (par symétrie), ainsi qu'à la force extérieure  $f$ , appliquée au point  $C$  et à la densité linéaire de charge radiale, constante et centripète notée  $p_0 \geq 0$ .

Les conventions adoptées sont identiques à celles du cours (voir figure 4.1 page 89 du chapitre 4).

1. (a) Montrer que l'on a, pour tout  $\theta \in [0, \pi/2[$

$$T(\theta) = X \cos \theta + (Y - Rp_0) \sin \theta, \quad (4.1a)$$

$$N(\theta) = X \sin \theta + (Rp_0 - Y) \cos \theta - Rp_0, \quad (4.1b)$$

$$M(\theta) = -RX \sin \theta + R(Y - Rp_0)(\cos \theta - 1). \quad (4.1c)$$

On pourra utiliser les équations d'équilibre local (comme dans l'exemple de la section 4.3.3 page 97 du cours).

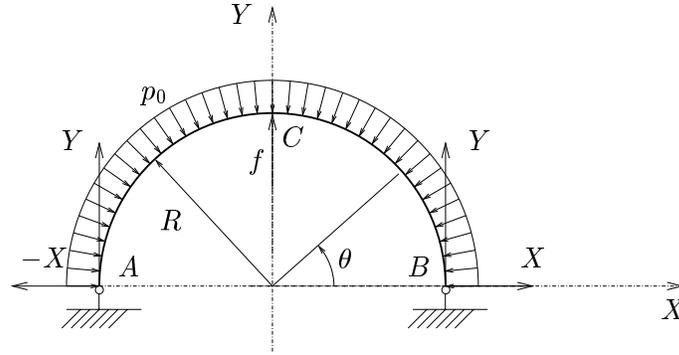


FIG. 4.2 -

- (b) La valeur de la réaction d'appui  $X$  ne peut être calculée : elle est hyperstatique. Montrer que

$$Y = Rp_0 - \frac{f}{2}. \quad (4.2)$$

On pourra admettre que  $T$  est antisymétrique par rapport à  $\pi/2$  et utiliser la discontinuité de  $T$  en  $\pi/2$ , due à  $f$ .

- (c) En déduire que, pour tout  $\theta \in [0, \pi/2[$

$$T(\theta) = X \cos \theta - \frac{f}{2} \sin \theta, \quad (4.3a)$$

$$N(\theta) = X \sin \theta + \frac{f}{2} \cos \theta - Rp_0, \quad (4.3b)$$

$$M(\theta) = -RX \sin \theta + \frac{Rf}{2}(1 - \cos \theta). \quad (4.3c)$$

2. À partir de maintenant, on va utiliser le calcul symbolique de matlab pour calculer l'énergie totale de déformation (due à  $X$ ,  $f$  et  $p_0$ ), en prenant en compte les termes dus à l'effort normal, à l'effort tranchant et au moment fléchissant<sup>1</sup>. Par symétrie, cette énergie vaut :

$$W(p_0, f, X) = R \left( \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} M^2(\theta) d\theta + \frac{1}{GS_1} \int_0^{\pi/2} T^2(\theta) d\theta + \frac{1}{ES} \int_0^{\pi/2} N^2(\theta) d\theta \right). \quad (4.4)$$

- (a) En déclarant tout ce qui faut en symbolique, calculer  $W(p_0, f, X)$ , grâce à (4.3) et (4.4). Par exemple, on saisira (dans un script ou commandes par commandes) :

```
syms X theta f p0 R E I G S S1;
```

```
T=X*cos(theta)-f/2*sin(theta);
N=X*sin(theta)+f/2*cos(theta)-R*p0;
M=-R*X*sin(theta)+f*R/2*(1-cos(theta));
```

```
W=R*(1/(E*I))*int(M^2,theta,0,pi/2)...
```

<sup>1</sup>Rien ne nous limite, alors autant prendre en compte tous les termes.

+1/(G\*S1)\*int (T^2, theta ,0, pi /2) ...  
 +1/(E\*S)\*int (N^2, theta ,0, pi /2));

On pourra consulter le fichier matlab `exercice4_2_new.m` disponible sur internet : voir <http://utbmjb.chez.tiscali.fr/>

- (b) Pour lever l'hyperstaticité en  $X$ , on pourra traduire sous matlab

$$\frac{\partial W}{\partial X}(p_0, f, X_0) = 0, \quad (4.5)$$

par

`X0=solve ( diff (W,X) , 'X' );`

- (c) Calculer le déplacement vertical  $y_C$  du point  $C$ . On pourra comparer les résultats donnés par

$$\lambda = \left. \frac{\partial W}{\partial f}(p_0, f, X) \right|_{X=X_0}, \quad (4.6)$$

et

$$\lambda = \frac{\partial W}{\partial f}(p_0, f, X_0), \quad (4.7)$$

où  $X_0$  est donné par (4.5).

### 3. Applications

- (a) Déterminer  $y_C$  pour  $p_0 = 0$  et  $f = -P$ . Pour négliger les effets des efforts tranchant et normaux devant ceux du moment fléchissant, il suffit de faire tendre  $S$  et  $S_1$  vers l'infini, à  $I$  fixé; cela se traduit, sous matlab par
- ```
lambdaA=subs ( lambda , { p0 , f } , { 0 , -P } );
lambdaA=limit ( limit ( lambdaA , S1 , inf ) , S , inf );
```
- Ce résultat fournit la réponse de l'exercice 4.3.
- (b) (i) Déterminer  $y_C$  pour  $p_0 = p$  et  $f \rightarrow 0$ .  
 (ii) Que se passe-t-il si on fait tendre  $S$  et  $S_1$  vers l'infini, à  $I$  fixé? Commenter!  
 (iii) Calculer  $y_C$  où seul  $S_1$  tend vers l'infini.  
 (iv) Dans ce cas, déterminer la valeur de  $y_C$  si  $S$  est «grand».  
 Ces résultats fournissent la réponse de l'exercice 4.4.

EXERCICE 4.3.

Déterminer la rigidité du portique semi-circulaire de la figure 4.3.

EXERCICE 4.4.

On reprend le portique semi-circulaire de la figure 4.3, qui est chargé comme indiqué sur la figure 4.4 : il est cette fois ci soumis à une densité linéaire de force d'intensité  $p$  et radiale.

Calculer le déplacement vertical du point  $C$ .

EXERCICE 4.5.

Pour la structure de la figure 4.5, déterminer les déplacements horizontaux et verticaux du point  $C$ .

EXERCICE 4.6.

Déterminer la rigidité de la structure de la figure 4.6.

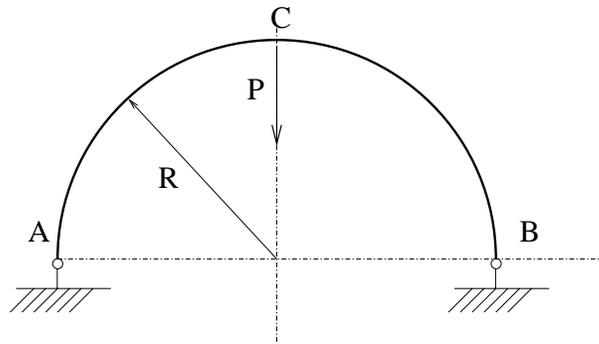


FIG. 4.3 -

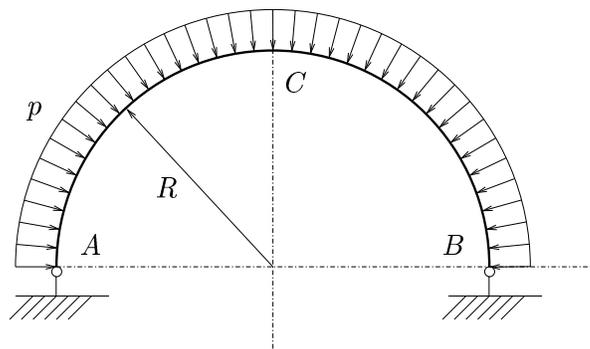


FIG. 4.4 -

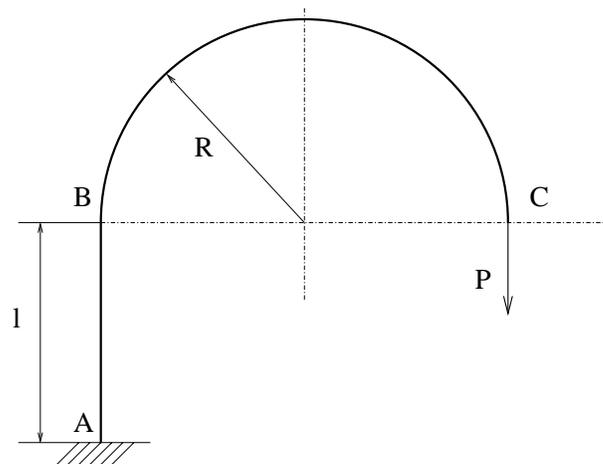


FIG. 4.5 -

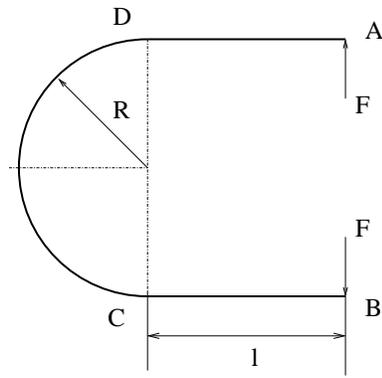


FIG. 4.6 -



## TRAVAUX DIRIGÉS 5

### Flambement

Vous trouverez d'abord les énoncés, puis les figures s'y rapportant, ainsi que les solutions d'équations non linéaires et trois graphes (pages 25 et 26), utiles pour certains exercices.

EXERCICE 5.1. On considère la poutre de la figure 5.1, reposant sur trois appuis (appuis simples en  $A$  et  $C$ , rotule en  $B$ ) et comprimée par deux forces opposées d'intensité  $F$ .

Définir la charge critique par la méthode d'Euler (modes 1 et 2).

EXERCICE 5.2. On considère la poutre de la figure 5.2a, articulée en  $A$ , reposant sur un appui simple en son milieu  $C$  et comprimée par une force d'intensité  $F$ .

Définir la charge critique par la méthode d'Euler (modes 1 et 2).

EXERCICE 5.3. On considère la poutre biarticulée en compression sur sa section médiane de la figure 5.2b (c'est-à-dire, qu'il y a une rotule en  $A$ , un appui simple en  $B$  et qu'on la comprime par une force horizontale d'intensité  $F$  en son milieu).

Calculer la charge critique fondamentale.

EXERCICE 5.4. On considère la poutre de la figure 5.3, encastrée en  $B$  et ayant une liaison en  $A$  telle que, en ce point, la déformée et la dérivée de la déformée de la poutre soit nulle. On appelle  $M$  et  $T$  le moment et la composante verticale de la réaction d'appui en  $A$ . La poutre est comprimée horizontalement en  $A$  par une force d'intensité  $F$ .

Calculer la charge critique fondamentale.

### Ensemble des figures

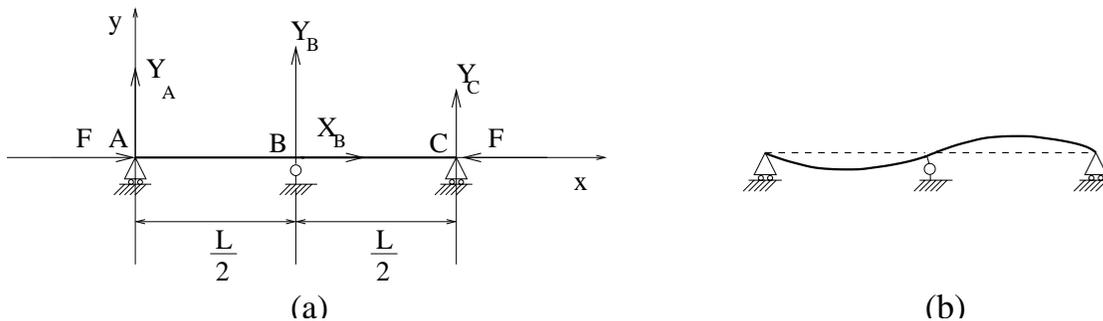


FIG. 5.1 – La structure étudiée au repos (a) et après déformation (b)

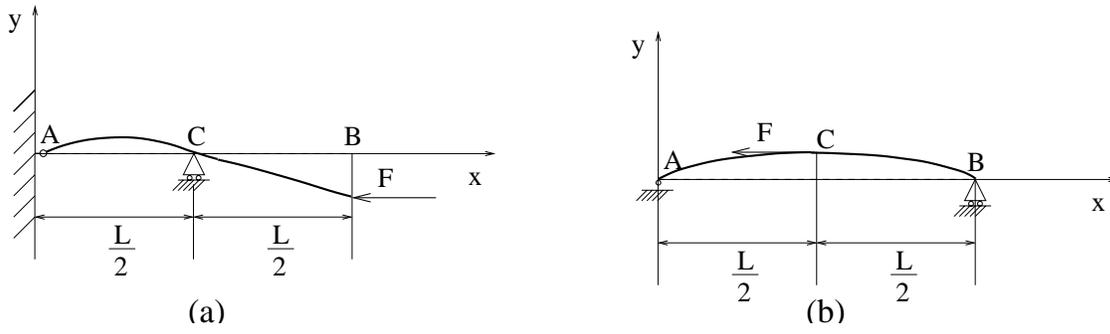


FIG. 5.2 – Poutre articulée et appuyée en son milieu (a) et poutre biarticulée en compression sur sa section médiane (b)

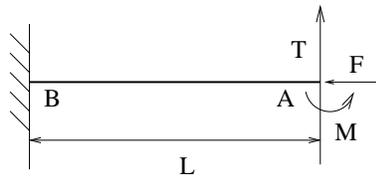


FIG. 5.3 – Poutre encastrée

## Quelques solutions d'équations non linéaires

On donne ici quelques courbes et les valeurs numériques des premières solutions strictement positives des équations non linéaires suivantes (calculées avec matlab) :

$$x = \tan(x), \quad (5.1)$$

$$x = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad (5.2)$$

$$\tan(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}. \quad (5.3)$$

Valeurs numériques :

deux premières solutions (dans  $\mathbb{R}_+^*$ ) de (5.1) :  $x_1 = 4.49340945790906$  et  $x_2 = 7.85398163397449$  ;

la première solution (dans  $\mathbb{R}_+^*$ ) de (5.2) :  $x_1 = 2.33112237041442$  ;

la première solution (dans  $\mathbb{R}_+^*$ ) de (5.3) :  $x_1 = 2.16020053890664$ .

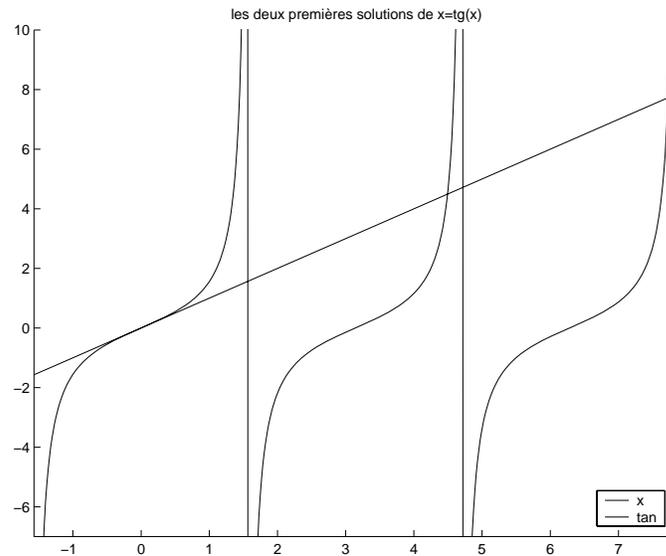


FIG. 5.4 – les deux premières solutions strictement positives de (5.1)

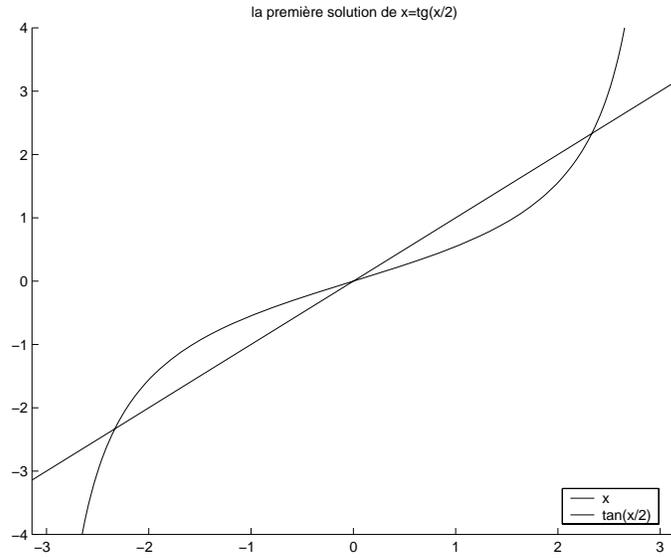


FIG. 5.5 – la première solution strictement positive de (5.2)

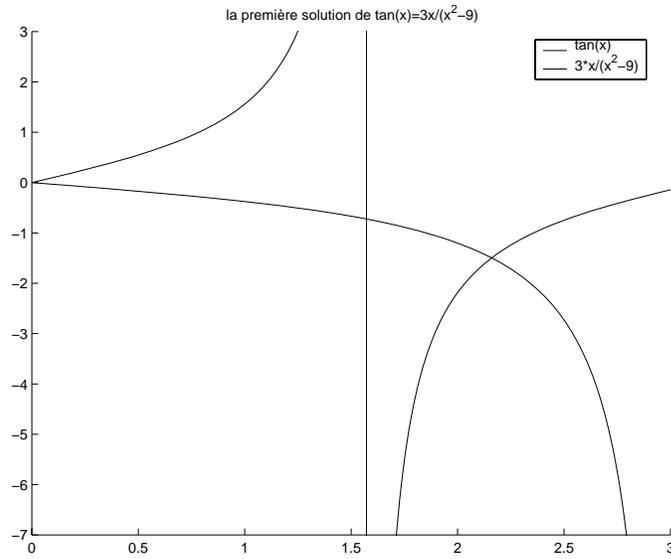


FIG. 5.6 – la première solution strictement positive de (5.3)

## TRAVAUX DIRIGÉS 6

### Critères de plasticité

EXERCICE 6.1. *Cet exercice constitue la fin de l'exercice 2.1, traité au cours du TD 2, auquel on renvoie.*

Pour la barre étudiée, donner la contrainte de Von Mises en un point quelconque d'une section droite.

EXERCICE 6.2.

*Cet exercice est extrait de l'examen final de MQ41 de Janvier 2003. Il constitue la fin de l'exercice 2.3, traité au cours du TD 2, auquel on renvoie.*

Le matériau étudié a une résistance élastique  $\sigma_Y = 150$  Mpa.

1. Avec les notations de l'exercice 2.3 (voir équation (2.2)), appliquer les critères de Tresca et de Von mises à l'état de contraintes planes étudié.
2. Le matériaux, selon ces critères, reste-il dans le domaine élastique ?

EXERCICE 6.3 (Expression générale de la contrainte équivalente de Von Mises).

1. On suppose dans cette question que l'état de contrainte est plan :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

- (a) Soit

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

une matrice (ou un tenseur). Pourquoi la trace et le déterminant de cette matrice constituent-ils des invariants<sup>1</sup> de  $S$  ?

- (b) On suppose que  $S$  est diagonalisable ; on appelle  $s_1$  et  $s_2$  ses valeurs propres. Déduire de la question précédente que

$$s_1 + s_2 = s_{11} + s_{22}, \quad (6.1)$$

$$s_1 s_2 = s_{11} s_{22} - s_{12} s_{21}. \quad (6.2)$$

- (c) Déduire de (6.1) et (6.2) que la contrainte équivalente de Von Misès peut être exprimée comme suit

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2}.$$

2. On suppose maintenant dans cette question que l'état de contrainte est quelconque :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup>C'est-à-dire qu'ils sont invariants par changement de base.

(a) Soit

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

une matrice (ou un tenseur). Montrer que les trois quantités suivantes constituent des invariants de  $S$  :

$$I_1 = \text{trace}(S),$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left( (\text{trace}(S))^2 - \text{trace}(S^2) \right),$$

$$I_3 = \det(S).$$

(b) On suppose que  $S$  est diagonalisable ; on appelle  $s_1, s_2$  et  $s_3$ , ses valeurs propres. Dédurre de la question précédente que

$$s_1 + s_2 + s_3 = s_{11} + s_{22} + s_{33}, \quad (6.3)$$

$$s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 = s_{11} s_{22} + s_{22} s_{33} + s_{33} s_{11} - s_{12} s_{21} - s_{23} s_{32} - s_{31} s_{13}, \quad (6.4)$$

$$s_1 s_2 s_3 = \det(S). \quad (6.5)$$

(c) Dédurre de (6.3), (6.4) et (6.5), que la contrainte équivalente de Von Misès peut être exprimée comme suit

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}.$$

EXERCICE FACULTATIF 6.4 (Étude du critère de Tresca dans un nouveau repère).

Dans cet exercice, on étudie le cylindre de Tresca dans le repère lié à son axe et on montre la propriété énoncée en cours (voir chapitre 6, page 111 et figure 6.7).

1. On pose

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Montrer que ces trois vecteurs forment une base orthogonale.

2. On considère la base orthonormée  $(u_1, u_2, u_3)$ , obtenue par normalisation des trois vecteurs  $(v_1, v_2, v_3)$ . Tracer sur une figure ces trois vecteurs.

3. On appelle  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées d'un point de  $\mathbb{R}^3$  dans la base canonique et  $(y_1, y_2, y_3)$  les coordonnées de ce même point dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$ . Montrer que les formules de changement de base donnent :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3. \end{cases} \quad (6.7)$$

4. On étudie maintenant la contrainte de Tresca :

$$\sigma_{\text{eq}}^T(x_1, x_2, x_3) = \max_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} |x_i - x_j|. \quad (6.8)$$

Montrer que, si on se place dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$ , on a

$$\sigma_{\text{eq}}^T(y_1, y_2, y_3) = \max \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \left| -\sqrt{3}y_1 + y_2 \right|, \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \sqrt{3}y_1 + y_2 \right|, \sqrt{2} |y_2| \right). \quad (6.9)$$

5. (a) En déduire que le cylindre de Tresca a pour axe la droite portée par  $u_3$  et que son intersection avec le plan porté par  $(u_1, u_2)$  est un hexagone, comme indiqué sur la figure 6.7 page 112 du polycopié de cours.
- (b) Montrer que cet hexagone est régulier.
- (c) Montrer que les sommets de cet hexagone appartiennent à l'intersection du cylindre de Von Mises avec le plan porté par  $(u_1, u_2)$ , comme l'indique la figure 6.12 page 118 du polycopié de cours.



## TRAVAUX DIRIGÉS 7

### Analyse limite

EXERCICE 7.1. Soit un cylindre en matériau élastique parfaitement plastique de rayon  $R$ , de longueur  $L$  et soumis à un couple de torsion  $T$ . On appelle  $\tau_Y$  la contrainte tangentielle de début d'écoulement plastique.

1. Calculer  $T_Y$  le moment de torsion pour lequel apparaît le premier écoulement plastique dans une section donnée.
2. Calculer  $T_L$  le moment de torsion pour lequel toutes les fibres d'une section sont entrées en plasticité.

EXERCICE 7.2. Soit une poutre rectangulaire en matériau élastique parfaitement plastique de section  $b \times h$ , de limite d'écoulement en traction et compression  $\sigma_Y$ , soumis à un moment de flexion  $M$ .

1. Calculer  $M_Y$  le moment de flexion pour lequel apparaît le premier écoulement plastique dans une section donnée.
2. Calculer  $M_L$  le moment de torsion, pour lequel toutes les fibres d'une section sont entrées en plasticité.