MQ41 Automne 2001

Examen final du 18 janvier 2002

Durée : deux heures

Aucun document - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

Exercice 1. On considère le treillis de barres de la figure 1.

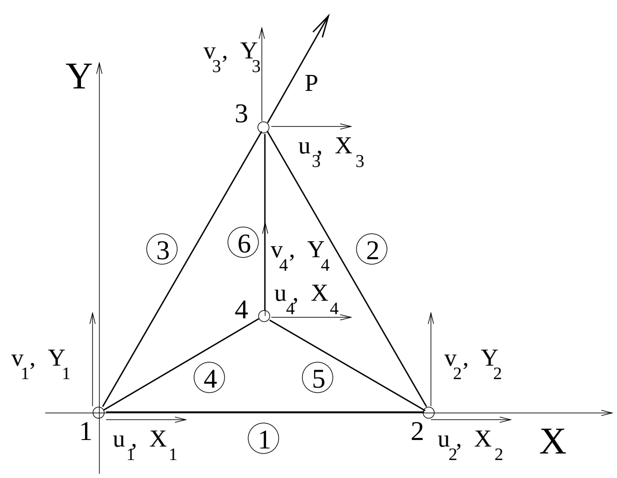


FIG. 1 – Étude d'un treillis par assemblage

Toutes les barres ont le même module de Young E ; leurs propriétés géométriques sont décrites dans le tableau ci-dessous :

Numéro de barre	Nœud	Longueur	Section
1	$1 \to 2$	L	S
2	$2 \to 3$	L	S
3	$1 \to 3$	L	S
4	$1 \to 4$	$L/\sqrt{3}$	$S/\sqrt{3}$
5	$2 \to 4$	$L/\sqrt{3}$	$S/\sqrt{3}$
6	$3 \to 4$	$L/\sqrt{3}$	$S/\sqrt{3}$

Les conditions d'appui sont données comme suit :

- Les nœuds 1 et 2 sont bloqués.
- Une force d'intensité P est appliquée suivant l'angle $\pi/3$ par rapport à la direction X au nœud 3.

On admet que la matrice élémentaire d'une barre dans le repère global (X, Y) s'écrit sous la forme suivante :

$$K_e^g = \frac{ES}{L}\begin{pmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{pmatrix}, \quad \text{où } C = \cos\theta \text{ et } S = \sin\theta,$$

et θ est l'angle entre le repère global et le repère local de la barre. On donne les déplacements dans le repère global comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}.$$

1°) Donner la matrice globale de rigidité K de la structure sans introduire les conditions aux limites (on prendra comme notation de référence l'ordre croissant des nœuds).

On pourra assembler la matrice directement sur la feuille à part de l'énoncé.

2°) Pourquoi la matrice assemblée K est elle singulière ?

Toutes les questions suivantes peuvent être traitées sans l'expression exacte de la matrice complète de rigidité.

3°) Dans cette question, on prendra en compte les conditions aux limites. On donne l'inverse de la sous matrice obtenue en ne conservant que les équations donnant les déplacements :

$$C^{-1} = \frac{2L}{33ES}\begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Calculer les déplacements inconnus.

4°) On donne l'expression exacte de la sous matrice d'ordre 4, extraite de K «en haut à droite » :

$$B = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les réactions au niveau des fixations de la structures.

5°) On admet que la barre 3 est celle qui travaille le plus. Quelle est la force maximale $P = P_{\max}$ que l'on peut appliquer à la structure ? On donne :

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{E}{L}\left(-\cos\theta, -\sin\theta, \cos\theta, \sin\theta\right)^t \left(u_1, v_1, u_3, v_3\right).$$

Évaluer l'intensité de cette force pour les valeurs suivantes

$$E = 7.10^{10}\ \mathrm{N/\ m^2}, \quad L = 1\ \mathrm{m}, \quad S = 10^{-4}\ \mathrm{m^2}, \quad \sigma_{\mathrm{rupture}} = 3.10^8\ \mathrm{N/m^2}. \tag{1}$$

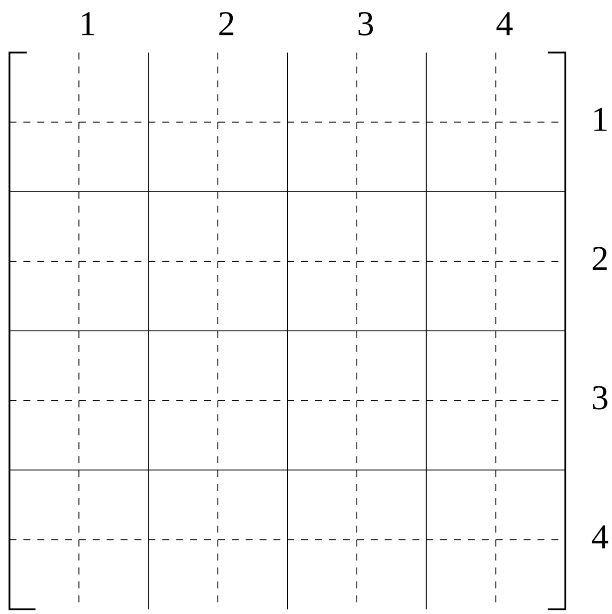
6°) Vérifier l'équilibre global de la structure.
7°) Quelle est la forme de chacune des barres déformées ? Avec les valeurs numériques (1) et $P = P_{\mathrm{max}}$, calculer tous les déplacements inconnus et représenter l'allure de la déformée de la structure.
8°) La barre numéro 1 joue-t-elle un rôle dans l'équilibre de la structure ? Pourquoi ?

Nom :

Prénom :

Examen final du 18 janvier 2002

ASSEMBLAGE DE LA MATRICE K



RÉSULTAT FINAL