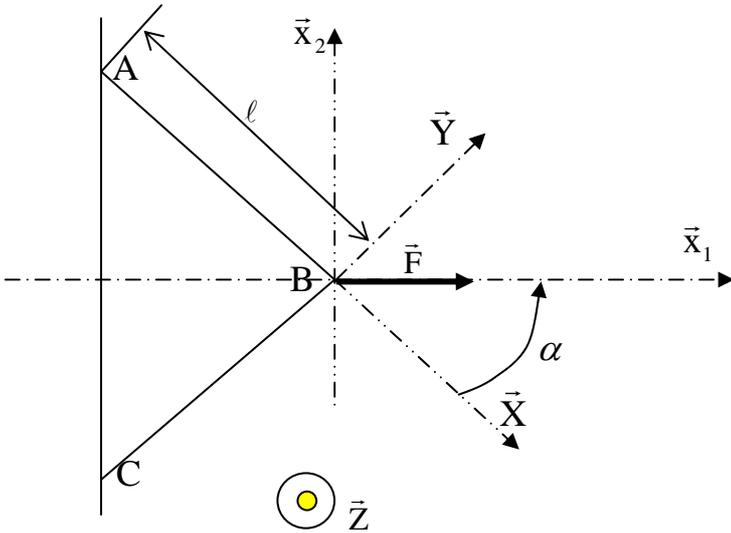
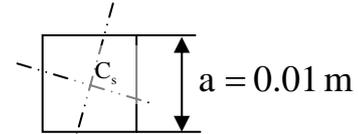


EXERCICE 2



Caractéristiques:

- matériau: $E = 2.10^{11}$ MPa
- Barre de longueur $\ell = 1\text{m}$, à section carrée de surface S:



Le moment d'inertie par rapport à tout axe passant par c_s et orthogonal à la ligne

moyenne vaut : $I = \frac{a^4}{12}$

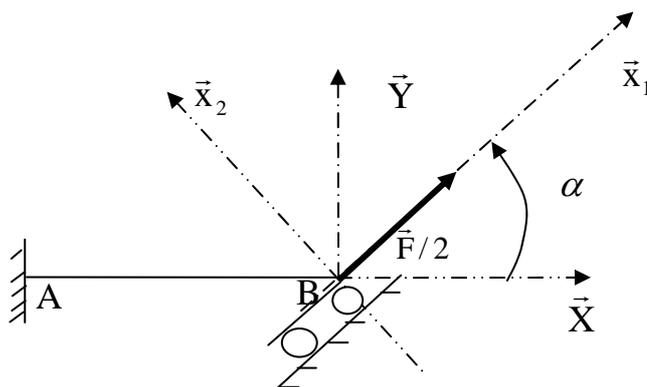
On considère la structure (Fig.1). Elle est composée de deux poutres identiques encastrées en A et C et reliées entre elles en B Par une cornière rigide. Le paramètre α peut varier et les barres sont symétriques par rapport à l'axe (B, \vec{X}_1) . Le chargement s'effectue par l'intermédiaire d'un effort $\vec{F} = F\vec{X}_1$

L'objectif poursuivi est de montrer que tant que l'angle α n'est pas trop grand (à préciser quantitativement), la déformée et le déplacement du point B peuvent être trouvés avec une bonne approximation (à préciser aussi quantitativement), en utilisant une modélisation de treillis. Il s'agit de remplacer les encastremets, par des liaisons (articulations) pivots. On obtient alors un système de barres ne travaillant qu'en traction – compression.

On utilisera le formalisme matriciel présenté en cours. La matrice de rigidité d'une poutre est rappelée en Annexe I.

1) Modélisation Complète, en utilisant une poutre

Cette structure est symétrique par rapport à l'axe (B, \vec{X}_1) , le chargement respecte cette symétrie. On travaillera donc sur la demie structure ci-dessous :



L'appui en B interdit la rotation autour de \vec{Z} et permet la libre translation selon \vec{X}_1 . On pose :

-Déplacement de B

$$\vec{u}(B) = u\vec{X}_1$$

1.a) La liaison en B est parfaite. Quelle est la forme du torseur (composante et moment), en B représentant l'action inconnue de l'appui sur la poutre A-B?

1.b) En travaillant dans le repère local $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ associé à la poutre, exprimer les vecteurs de \mathbb{R}^6 , des chargements nodaux en A et B, et des déplacements et rotation en A et B. Ecrire le système matriciel liant ces deux vecteurs.

Lister les inconnues et les données.

1.c) On ne s'intéresse qu'au déplacement u du point B. Isoler dans le système 6×6 précédent, les deux équations utiles.

1.d) Montrer que le déplacement u est régi par l'équation :

$$\frac{F}{2} = \left(\underbrace{\frac{ES}{\ell} \cos^2(\alpha)}_{H_1 \text{ (effet de traction)}} + \underbrace{\frac{12EI}{\ell^3} \sin^2(\alpha)}_{H_2 \text{ (effet de flexion)}} \right) u$$

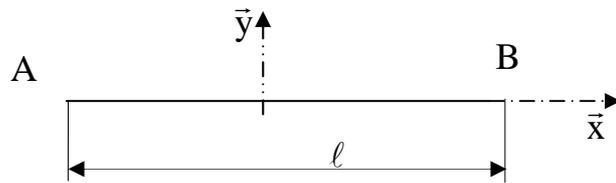
1.e) Passer en modélisation treillis, revient à négliger l'effet de flexion devant celui de la traction.

Pour la structure proposée, comparer numériquement, pour un angle de 45° , l'importance relative des deux termes H_1 et H_2 . Peut-on utiliser le modèle treillis ? Avec quelle précision sur le déplacement ?

1.f) Pour une poutre de section circulaire de rayon r et d'allongement $a = l/(2r)$, exprimer le rapport $1 + \varepsilon = \frac{H_1 + H_2}{H_1}$ en fonction de l'angle α et de l'allongement a .

Discuter de l'influence de α et a sur la qualité de l'approximation.

Annexe I



Matrice de rigidité d'une poutre en repère local, principal et central d'inertie:
On note les vecteurs nodaux de déplacements et d'efforts :

$$\begin{aligned}
 {}^t[\mathbf{F}_e] &= [F_{xa}, F_{ya}, C_a, F_{xb}, F_{yb}, C_b] \\
 {}^t[\mathbf{Q}_e] &= [U_{xa}, U_{ya}, \Omega_a, U_{xb}, U_{yb}, \Omega_b] \\
 [\mathbf{K}_e] &= \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{ES}{l} & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$