MQ41 Automne 2003

Examen final du 22 janvier 2004

Durée : deux heure(s)

Aucun document.

On rédigera chacun des exercices sur une copie différente.

Toutes les figures sont regroupées à partir de la page 5.

Exercice 1 (6 points). *Méthode énergétique*
La structure $ABCD$ (voir figure 1 page 5) est constituée de poutres AB et CD de longueur L et de la poutre BC formant un demi cercle de rayon R. Ces poutres ont le même module d'Young E et le même moment quadratique I. Une force horizontale $\vec{F}$ est appliquée en A et en D et cette structure est auto-équlibrée.

1. Définir votre repère.
2. Calculer les différents moments de flexion le long de AD.
3. Calculer la variation de l'écartement $A - D$. On suppose que l'énergie de déformation est seulement due au moment fléchissant. On rappelle les formules de linéarisation :

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)),$$
$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)).$$

Exercice 2 (7 points). *Flambement*
On souhaite modéliser le contacteur thermique représenté sur la figure 2(a) page 5. Lorsque la température augmente, la lame de longueur L_0 à T_0 se dilate. Une contrainte normale apparaît. Si cette dernière dépasse la contrainte normale critique, la lame flambe et le contact s'établit.

1. *Flambement d'Euler*

   Retrouver la charge critique F_c pour le système de la figure 2(b) page 5. La section de la poutre est un carré de coté $a = 1$ mm et son module d'Young est égal à $E = 2,5\,10^5$ MPa.
2. *Détermination de l'effort de compression induit*

(a) On considère maintenant le système représenté sur la figure 3(a) page 5, dont la longueur $L_0(T_0)$ est imposée. On considère le problème (en traction-compression) isostatique équivalent de la figure 3(b) page 5. Déterminer F avec l'hypothèse

$$F < F_c. \tag{1}$$

On imposera, pour la structure de la figure 3(b) page 5 :

$$U_B = U_{\text{précontrainte}}, \text{ avec } \overrightarrow{U_B} = U_B \vec{x}, \tag{2}$$

pour tenir compte de la précontrainte $U_{\text{précontrainte}}$ négative fixée.

(b) On modifie la loi de comportement pour tenir compte de la dilatation thermique :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{N}{ES} + \alpha(T - T_0), \tag{3}$$

où α est le coefficient de dilatation. En déduire la valeur de la précontrainte $U_{\text{précontrainte}}$ pour obtenir la charge critique à 50^{o}. On donne

$$\alpha = 12\,10^{-6}\ {}^{\text{o}}\text{C}^{-1}, \quad L_0(T_0) = 1 \text{ m}.$$

Exercice 3 (7 points). *Critères*

1. Soit $\sigma_Y \in \mathbb{R}_+^*$. Dans le demi plan de Mohr (σ, τ) (avec $\tau \geq 0$), représenter le domaine d'élasticité de Tresca, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées (σ, τ) tels que

$$\sigma_{\text{eq}}^T < \sigma_Y. \tag{4}$$

2. On considère $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $\phi \in]0, \pi/2[$, fixés pour toute la suite de l'exercice. Représenter l'ensemble des points (σ, τ) du demi-plan de Mohr tels que

$$\tau < c - \sigma \tan \phi. \tag{5}$$

Pour toute la suite, on considère le critère de Mohr-Coloumb défini par (5).

3. On considère un état de traction défini en un point par

$$\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

où $\sigma_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) En s'aidant de la figure 4 page 6, montrer que
- si σ_0 est «petit», on reste dans le domaine élastique de Mohr-Coulomb ;
- si σ_0 est «grand», on quitte le domaine élastique de Mohr-Coulomb.

On rappelle que l'on reste dans le domaine élastique tant que l'ensemble du tricercle de Mohr est compris dans le domaine élastique.

(b) On se reporte à la figure 5(a) page 6. On suppose que le cercle $\mathcal{C}$ de rayon R et de centre $\Omega(R, 0)$ est tangent à la droite Δ, d'équation $\tau = c - \sigma \tan \phi$. Montrer que :

$$R = \frac{c \cos \phi}{1 + \sin \phi}.$$

(c) En déduire que, pour l'état de contrainte (6), on reste dans le domaine élastique tant que

$$\sigma_0 < \frac{2c\cos\phi}{1+\sin\phi}. \tag{7}$$

4. On se donne maintenant un état de contrainte quelconque, dont les valeurs principales $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ vérifient

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3. \tag{8}$$

(a) On se reporte à la figure 5(b) page 6. Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ et la droite Δ sont tangents si et seulement si :

$$c\cos\phi = R + (e+R)\sin\phi.$$

(b) En déduire que pour l'état de contrainte principal vérifiant (8), on reste dans le domaine élastique tant que

$$\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)\sin\phi < c\cos\phi. \tag{9}$$

5. On admet que si les contraintes principales ne sont pas ordonnées selon (8), (9) se réécrit :

$$\frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})\sin\phi < c\cos\phi. \tag{10}$$

Peut-on écrire le critère de Mohr-Coulomb (10) sous la forme :

$$\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_Y \ ? \tag{11}$$

Corrigé

Le corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez.tiscali.fr/`

Ensemble des figures

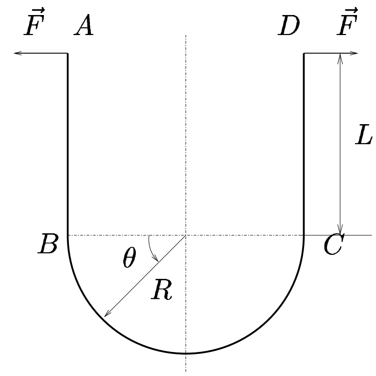
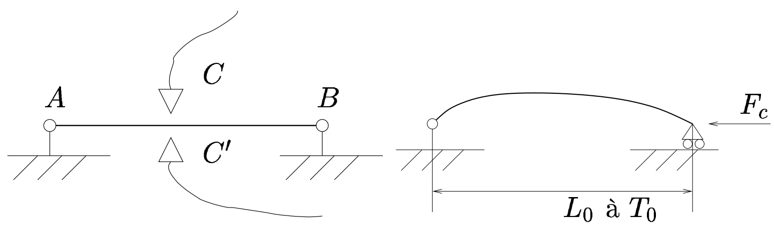


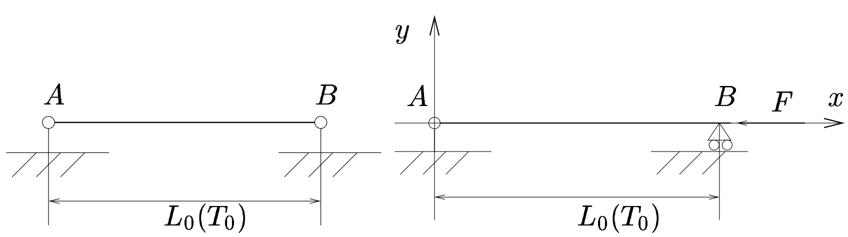
FIG. 1 – La structure étudiée.



(a) Un contacteur thermique.

(b) Flambement d'Euler.

FIG. 2 –



(a) Problème précontraint.

(b) Problème isostatique équivalent.

FIG. 3 –

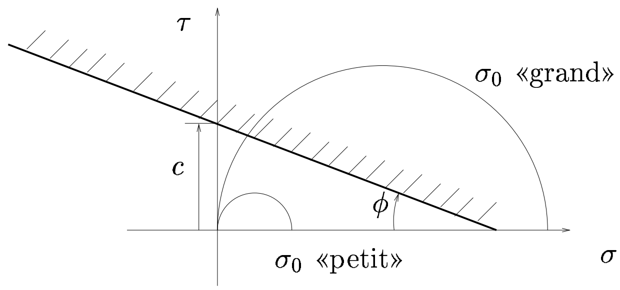
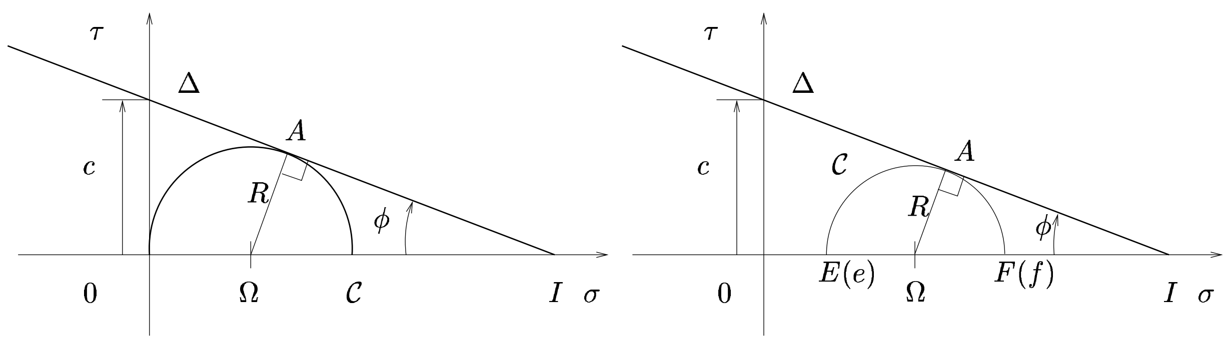


FIG. 4 – un cas de traction.



(a) Cas particulier.

(b) Cas général.

FIG. 5 – Le cercle $\mathcal{C}$ et la droite Δ sont tangents.