MQ41 Printemps 2002

Examen final du 26 juin 2002

Durée : deux heures

Aucun document - Calculatrice autorisée.

On rédigera les deux exercices sur deux copies différentes.

On pourra admettre certains résultats et passer aux questions suivantes.

Exercice 1 (Étude matricielle de réseaux de barres circulaires et droites).
Toutes les figures sont regroupées pages 5 et 6.
On cherche la matrice de rigidité d'une barre circulaire (cf. figure 3). Pour cela, on montre que cette structure est équivalente à la structure isostatique de la figure 2. On appliquera ces calculs à l'étude d'une structure formée de barres circulaire et droites (cf. figure 4).

1°) On considère la structure à fibre moyenne circulaire (de rayon R) représentée sur la figure 1. Cette structure repose sur une rotule en A et soumise en B à une force de composantes f_{xB} et f_{yB} et à un couple $c_B = 0$ et on note f_{xA} et f_{yA} les réactions d'appuis en A.

a) Pourquoi la structure étudiée est elle un mécanisme ?

b) Montrer que cette structure est équivalente à la structure représentée sur la figure 2 ; elle repose sur une rotule en A et soumise en B à une force de composante F et on note Y_B, X_A et Y_A les composantes des réaction d'appuis définies par rapport au repère (X, Y).

2°)

a) Calculer, en tout point $P(\theta)$, l'effort normal $N(\theta)$ et le moment fléchissant $M(\theta)$ dans la poutre circulaire de la figure 2 (pour θ compris entre $\pi/4$ et $3\pi/4$).

b) On donne les intégrales suivantes :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2},$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}.$$

On rappelle l'expression de l'énergie de déformation (où l'on a négligé les termes dus à l'effort tranchant) :

$$W = \frac{R}{2ES}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} N^2 d\theta + \frac{R}{2EI}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} M^2 d\theta,$$

où les caractéristiques mécaniques de la poutre, E, I et S sont constantes.
Calculer la constante k, dépendant de R, I, E et S, telle que

$$W = \frac{1}{2k}F^2. \tag{1}$$

c) En déduire l'expression de u, le déplacement horizontal du point B :

$$F = ku. \tag{2}$$

3°) On considère maintenant la structure représentée sur la figure 3, appelée barre circulaire (puisque que l'on ne considère qu'aucun couple ne s'exerce en A et B).
Par rapport au repère (X, Y), on appelle X_A, Y_A, X_B et Y_B les composantes des forces exercées par les points A et B sur la barre et u_A, u_B, u_B et v_B les déplacements des points A et B.

a) Montrer qu'il existe une constante β telle que

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ u_B \\ v_B \end{pmatrix}. \tag{3}$$

On prendra garde au fait que cette matrice de rigidité est exprimée dans le repère (X, Y)

b) Déduire de la question 2, que

$$\beta = k.$$

c) Peut on dire que la barre circulaire est équivalente à une barre droite ?
Si oui, la distribution des contraintes est elle identique dans la barre circulaire et la barre droite ?

4°) On considère maintenant la structure formée de cet élément barre circulaire (noté b_1) et de deux autres barres droites (notées b_2 et b_3), comme indiqué sur la figure 4 et reliées entre elles par des rotules. Les quatre nœuds sont notés n_1, n_2, n_3 et n_4.
Les trois barres b_1, b_2 et b_3 sont orientées comme sur la figure. Elles ont pour caractéristiques mécaniques communes E, S et I. Les barres b_2 et b_3 ont pour longueur R et $\sqrt{2}R$.
La structure étudiée a $8 = 2 \times 4$ degrés de liberté et on note $(F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{x3}, F_{y3}, F_{x4}, F_{y4})$ les composantes des forces extérieurs exercées sur les nœuds n_1, n_2, n_3 et n_4 et $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4)$ leur déplacement, par rapport au repère (X, Y)
On rappelle que, pour une barre droite, si θ est l'angle entre X et l'axe x de la barre droite (orientée), la matrice de rigidité de cette barre dans le repère (X, Y) s'écrit :

$$K_e^g = \frac{ES}{L}\begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

où

$$c = \cos\theta \text{ et } s = \sin\theta.$$

a) Calculer les matrices de rigidités des trois barres **dans le repère** (X, Y) et, par assemblage, en déduire l'expression de la matrice de rigidité $\mathcal{K}$ de la structure de la figure 4.

b) Montrer que si les nœuds n_1, n_3 et n_4 correspondent à des rotules bloquées en translation et que le nœud n_2 est soumis à la force f (comme indiqué sur la figure 4), alors :

$$\begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} f \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} f \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{pmatrix} = \mathcal{K} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

où F_{x1}, F_{y1}, F_{x3}, F_{y3}, F_{x4}, F_{y4}, u_2 et v_2 sont inconnus.

c) On donne l'expression de la matrice 2×2 extraite de $\mathcal{K}$, correspondant aux coefficients d'indice $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,3)$ et $(4,4)$:

$$B = \frac{ES}{2R} \begin{pmatrix} \frac{2Rk}{ES} + 1 & 1 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Déduire de (5) que

$$B \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

d) Résoudre le système (6) et en déduire les expressions de u_2 et de v_2.

e) En déduire les déplacements horizontaux et verticaux $\widetilde{u}_2$ et $\widetilde{v}_2$ du nœud 2.

On suppose que $f > 0$. Sous les hypothèses de la RDM, l'allongement A de la poutre défini par

$$A = \sqrt{\frac{I}{R^2 S}},$$

vérifie

$$A \geq 10.$$

Montrer que $\widetilde{u}_2 > 0$ et $\widetilde{v}_2 < 0$.

Ensemble des figures de l'exercice 1

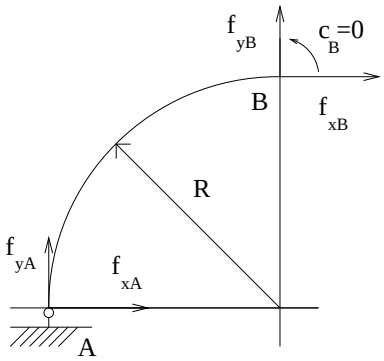

FIG. 1 – Étude d'une structure circulaire

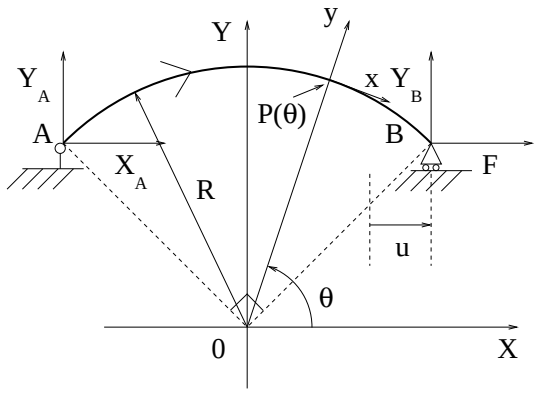

FIG. 2 – Étude d'une structure circulaire équivalente

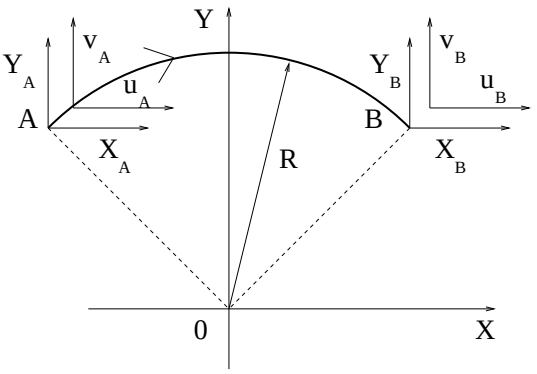

FIG. 3 – Barre circulaire

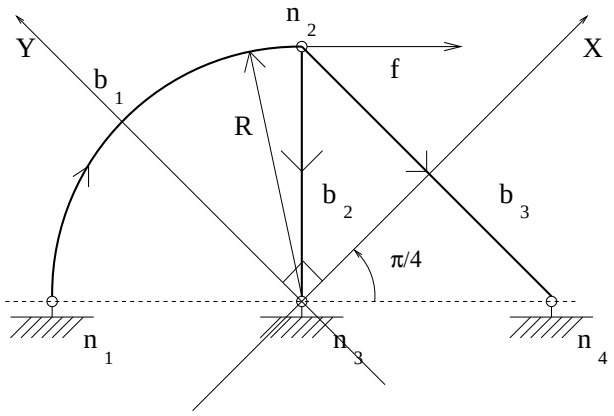

FIG. 4 – Étude d'une structure formée de trois barres

Exercice 2 (Flambement).