

Examen final du 24 juin 2004

Durée : deux heure(s)

Calculatrice et document interdits

On rendra une copie (au moins et même blanche) pour les exercices 1 et 2 et une copie (au moins et même blanche) pour les exercices 3 et 4.

Exercice 1 (1,5 points). *Questions de TP*

1. Qu'est-ce qu'un maillage ?
2. Énumérer les différentes étapes nécessaires à la modélisation numérique avec le code de calcul ANSYS.
3. Comment peut-on améliorer la solution du problème numérique ?

Exercice 2 (6,5 points). *Méthode énergétique*

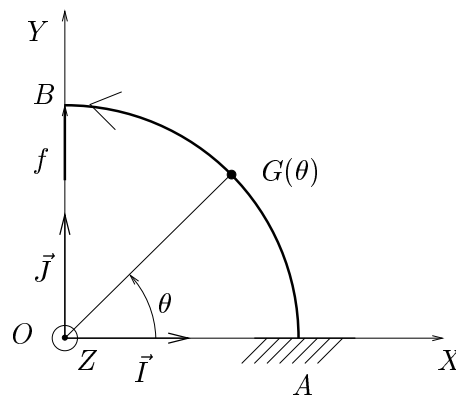


FIG. 1 – La structure circulaire étudiée

On étudie dans cet exercice la structure circulaire de la figure 1. Son rayon est noté R . Elle est encastree en A , orientée comme sur la figure et constituée d'un matériau homogène de module d'Young E et de moment quadratique I . Elle est soumise à son propre poids.

On cherche à déterminer les réactions d'appuis et le déplacement vertical de son extrémité B . Pour cela, on introduit une force virtuelle f comme indiqué sur la figure 1 page précédente.

1. On supposera que le poids linéaire $\lambda > 0$ de cette structure est tel qu'une portion élémentaire de poutre définie par l'angle élémentaire $d\theta$ est soumise à la force élémentaire suivante :

$$\vec{dp} = -Rd\theta\lambda\vec{J}. \quad (1)$$

Calculer le moment fléchissant $M(\theta)$ pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$ puis le couple d'appui en A .

2. En ne prenant en compte que les effets dus au moment fléchissant, calculer μ , le déplacement vertical de l'extrémité B . On pourra se contenter d'un résultat mis sous forme d'intégrale.
3. **Question subsidiaire**

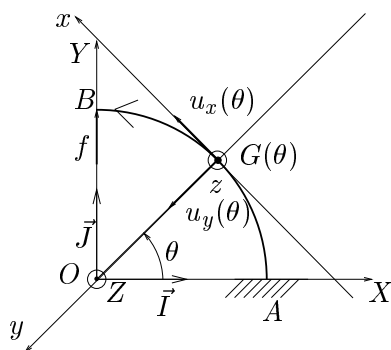


FIG. 2 – La structure circulaire étudiée et le repère local $(u_x(\theta), u_y(\theta), z)$

- (a) On rappelle les trois équations d'équilibre local (avec les conventions de la figure 2) :

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} + N(\theta) + R\lambda \sin \theta = 0, \quad (2a)$$

$$\frac{dN(\theta)}{d\theta} - T(\theta) - R\lambda \cos \theta = 0, \quad (2b)$$

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} + RT(\theta) = 0. \quad (2c)$$

Pourquoi ici, est-il préférable de calculer directement $M(\theta)$ plutôt que de vouloir résoudre (2) comme dans le cours ?

- (b) Rappeler la méthode de résolution de (2) et conclure.

Exercice 3 (6 points). *Flambement*

Le matériau est de module d'Young E et de moment quadratique I uniformes dans toute la poutre. La poutre droite AC est articulée en A et simplement appuyée en C (voir figure 3(a) page suivante). Un ressort linéaire de raideur k agit selon \vec{y} en B . Il a sa longueur à vide lorsque la ligne moyenne est non déformée.

On s'intéresse au flambement de cette poutre. On traitera donc le problème dans sa configuration déformée (voir figure 3(b) page ci-contre) en respectant le choix de l'origine en O , en notant $v(x)$ la flèche en un point d'abscisse $x \in [-l, l]$ et en supposant que

$$F_B = -kv_B, \quad (3)$$

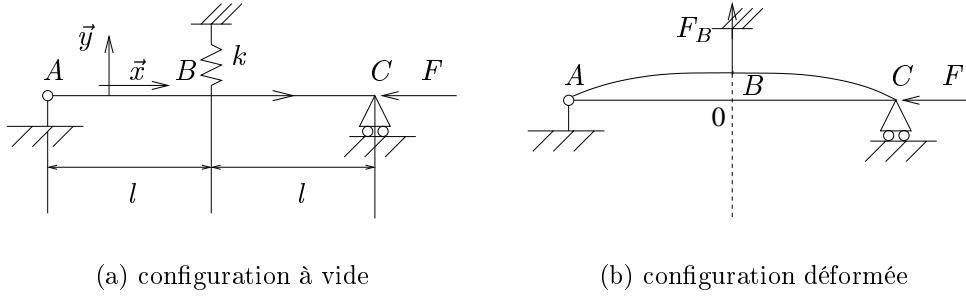


FIG. 3 – La structure étudiée.

où $\overrightarrow{OB} = v_B \vec{y}$.

1. Déterminer les réactions d'appui en fonction de v_B et de F . Le problème est-il iso- ou hyperstatique ?
2. Déterminer le moment fléchissant dans toute section droite, en fonction de v_B et de F .
3. Déterminer les équations différentielles qui régissent la flèche $v(x)$ pour les tronçons AB et BC et les intégrer.
4. Écrire le système de conditions aux limites, sans le résoudre. À quelle condition observera-t-on le flambement ?
5. Vérifier que si $k = 0$, on retrouve bien la charge critique d'Euler ($\pi^2 EI / (2l)^2$). Par référence aux TD, que doit-on trouver si $k \rightarrow +\infty$?

Exercice 4 (6 points). *Critère et cercle de Mohr*

Dans cet exercice, on étudie la section d'une poutre (en trois dimensions) soumise à la torsion libre, c'est-à-dire que parmi les efforts de la RDM, seul le moment de torsion M_t est non nul. On supposera que cette section est un cercle de rayon R .

La seule contrainte non nulle qui s'exerce sur une facette de section droite est une contrainte tangentielle t dirigée suivant la normale au rayon vecteur (voir figure 4(a) page suivante).

Elle ne dépend que de la distance au centre r et vaut :

$$t(r) = \frac{r M_t}{J_\rho}, \quad (4)$$

où J_ρ est l'inertie polaire de la section, définie par

$$J_\rho = \iint_S r^2 dS. \quad (5)$$

1. Montrer que

$$J_\rho = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (6)$$

On pourra passer en coordonnées polaires.

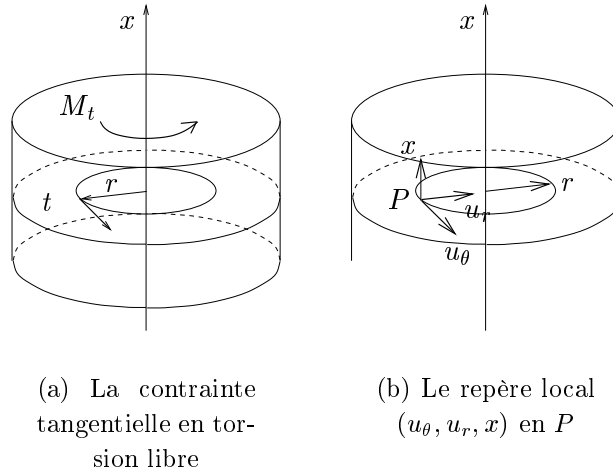


FIG. 4 –

2. On se place en un point P situé à une distance r du centre et, en ce point, on considère le repère local (u_θ, u_r, x) (voir figure 4(b)). **On admet** que, dans le repère (u_θ, u_r, x) , le tenseur des contraintes a la forme suivante

$$[\sigma(r)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t(r) \\ 0 & 0 & 0 \\ t(r) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Montrer que, à r fixé, le polynôme caractéristique $\chi(X) = \det(\sigma(r) - XI)$ de $[\sigma(r)]$ est égal à

$$\chi(X) = -X(X^2 - t^2(r)), \quad (8)$$

et en déduire que les trois contraintes principales sont égales à

$$\sigma_1(r) = -t(r), \quad \sigma_2(r) = 0, \quad \sigma_3(r) = t(r). \quad (9)$$

3. Applications numériques

On donne

$$R = 10 \text{ cm}, \quad M_t = 3,14 \times 10^4 \text{ Nm}, \quad \sigma_Y = 21 \text{ Mpa}, \quad \sqrt{3} \approx 1,7. \quad (10)$$

- (a) Calculer $\sigma_1(R)$, $\sigma_2(R)$ et $\sigma_3(R)$.
- (b) Tracer le cercle de Mohr correspondant à cet état de contrainte.
- (c) En utilisant les critères de Von Mises et de Tresca, prédire si le matériaux entre ou non en plasticité.