MQ41 Automne 2001

Corrigé de l'examen final du 18 janvier 2002

Correction de l'exercice 1.

1°) Pour calculer chacune des matrices de rigidités, il suffit de calculer chacun des angles θ, défini du repère global au repère local de chacune des poutres. Ces repères locaux sont donnés par les nœuds associés à chacune d'elles, puisque qu'elles sont orientées du nœud intial vers le nœud final. Voir figure 1.

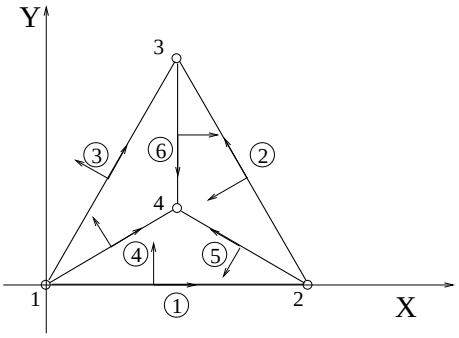

FIG. 1 – Les repères locaux des six poutres

On en déduit chacune des valeurs des angles θ et de leur lignes trigonométriques, comme indiqué dans le tableau 1.

Numéro de barre	θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
1	0	1	0
2	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
3	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
6	$-\frac{\pi}{2}$	0	1

TAB. 1 – Les angles et leurs lignes trigonométriques

Grâce à la formule de l'énoncé, on calcule chacune des matrices de rigidité dans les axes globaux :

$$K_1^g = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_2^g = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

$$K_3^g = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \quad K_4^g = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & -1 \\ -3 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_5^g = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & -1 \\ -3 & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad K_6^g = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

L'étape de dispatching de ces matrices peut se faire grâce à la donnée des numérotations des nœud, comme indiqué dans le tableau de l'énoncé. Par exemple, pour la barre 1, les indices globaux des nœud 1 et 2 sont 1 et 2 ; en raisonnant par matrices blocs de taille 2, on a donc, avec les notations du cours :

$$\widetilde{K}_1^g = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{K}_2^g = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{K}_3^g = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{K}_4^g = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{K}_5^g = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & -3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 3 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{K}_6^g = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

En faisant la somme de ces six matrices, on obtient

$$\boxed{K = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 8 & 2\sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 4 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -1 \\ -4 & 0 & 8 & -2\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & 4 & \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 10 & 0 & -4 \\ -3 & -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 6 & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & -1 & 0 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}}. \tag{1}$$

Cette matrice est symétrique. En considérant les trois matrices A, B et C de taille 4, A et C étant symétriques, on a

$$K = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \tag{2}$$

où

$$A = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 8 & 2\sqrt{3} & -4 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

$$C = \frac{ES}{4L}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

2°) Cette matrice K est singulière, puisque que l'on n'a pas encore considéré les conditions aux limites en déplacement. Les solutions de $KQ = 0$ correspondent aux déplacements de corps rigides. Puisqu'il faut bloquer trois degrés de liberté de la structure pour qu'elle soit en équilibre, la matrice est *a priori* de rang 8-3=5.

3°) On considère les vecteurs des forces généralisés et des déplacements :

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{pmatrix},$$

où X_i et Y_i désigne les composantes des forces extérieurs appliquées au nœud i.

D'après les conditions aux limites, les nœuds 1 et 2 sont bloqués tandis que les nœuds 3 et 4 sont soumis à des forces extérieures connues ; on a donc

$$X_3 = P\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad Y_3 = P\sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad X_4 = Y_4 = 0.$$

En notant les matrices par blocs, on note donc

$$Q = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} R \\ G \end{pmatrix}, \tag{6}$$

où

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0, \quad V = \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \frac{P}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Le vecteur V correspond aux déplacements des nœuds 3 et 4, inconnus et le vecteur R correspond aux forces exercées sur les nœuds 1 et 2, c'est à dire les réactions d'appuis, inconnues.

Compte tenu de (2), (6) et (7), le système $F = KQ$ s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ G \end{pmatrix},$$

système équivalent à

$$BV = R, \tag{8}$$

$$CV = G. \tag{9}$$

Pour le système (9), la matrice C est inversible puisque l'on a traité les conditions aux limites. On a donc

$$\boxed{V = C^{-1}G.}$$

La matrice C^{-1} était donnée dans l'énoncé et on a donc :

$$V = \frac{2L}{33ES} \times \frac{P}{2} \begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est à dire

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \frac{PL}{11ES} \begin{pmatrix} 11 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.} \tag{10}$$

4°) D'après (8), on peut calculer la matrice G des réactions d'appuis. De plus, la matrice B était donnée dans l'énoncé et on a donc d'après l'expression de V (10)

$$R = \frac{ES}{4L} \times \frac{PL}{11ES} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

soit encore

$$\boxed{\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \frac{P}{22} \begin{pmatrix} -13 \\ -11\sqrt{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.} \tag{11}$$

5°) Pour la barre 3, on a, d'après l'énoncé,

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{E}{L} \left(-\cos\theta, -\sin\theta, \cos\theta, \sin\theta\right)^t \left(u_1, v_1, u_3, v_3\right),$$

avec $\theta = \pi/3$. On sait que $u_1 = v_1 = 0$. D'après (10), on a

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{PL}{11ES} \begin{pmatrix} 11 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il vient immédiatement,

$$\sigma = \frac{PL}{11ES} \times \frac{E}{L} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t \left(11, 3\sqrt{3}\right) = \frac{10}{11}\frac{P}{S}.$$

On écrit que la force P maximale est telle que $\sigma = \sigma_{\text{rupture}}$, c'est à dire

$$\boxed{P_{\max} = \frac{11}{10} S \sigma_{\text{rupture}}.} \tag{12}$$

Numériquement,

$$\boxed{P_{\max} = 33000\text{N}.} \tag{13}$$

6°) La structure est soumise aux forces extérieures $X_1 + X_2 + P/2$ (selon X) et $Y_1 + Y_2 + P\sqrt{3}/2$. D'après (11), on a

$$X_1 + X_2 + \frac{P}{2} = \frac{P}{22}\left(-13 + 2 + 11\right) = 0.$$

De même,

$$Y_1 + Y_2 + \frac{\sqrt{3}P}{2} = \frac{P}{22}\left(-11\sqrt{3} + 11\sqrt{3}\right) = 0.$$

$$\boxed{\text{La structure est bien en équilibre.}} \tag{14}$$

7°) Seul l'effort normal est non nul dans chaque barre. Compte tenu de

$$v''(x) = -\frac{M}{EI} = 0,$$

et de l'aspect constant de N dans chaque barre, on peut donc dire que, après déformation,

$$\boxed{\text{chaque barre est rectiligne.}} \tag{15}$$

Numériquement, on a, pour $P = P_{\max}$,

$$\begin{aligned} u_3 &\approx 4,71 \text{ mm} \\ v_3 &\approx 2,22 \text{ mm} \\ u_4 &= 0 \text{ mm} \\ v_4 &\approx 1,48 \text{ mm} \end{aligned}$$

On fait un petit schéma on l'on représente ces quatre déplacements avec un facteur d'échelle constant (voir figure 2 page 6).

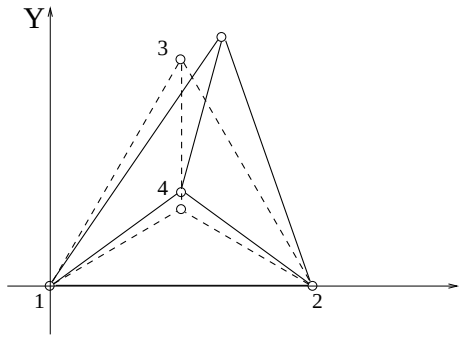

FIG. 2 – Déformée du treillis

8°) Les deux nœuds 1 et 2 sont immobiles et la barre 1 n'est donc soumise à aucun effort normal : elle ne joue aucun rôle dans l'équilibre de la structure.
On peut vérifier que la matrice de rigidité de la structure avec les barres 2 à 5 correspond à la somme des matrices $\widetilde{K}_i^g$ pour $i \in \{2, ..., 5\}$ et vaut aussi $K - \widetilde{K}_1^g$, c'est à dire

$$K' = \frac{ES}{4L} \begin{pmatrix} 4 & 2\sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 4 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} & 4 & \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 10 & 0 & -4 \\ -3 & -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 6 & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & -1 & 0 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

On pourrait vérifier que les nouveaux déplacements et forces sont les mêmes qu'avec la matrice K.