MG41, A2001

Corrigé de l'exercice n° 2.

1.a) $\left[ F_{\overline{AB} \to AB} \right] \otimes \left[ T_{C\,B/R} \right] = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}(B) \end{array} \right._B \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} = \vec{0} \\ \vec{V}(B) = U\,\vec{x_1} \end{array} \right. = 0 \implies \vec{R} \cdot \vec{x_1} = 0 \;, \quad \vec{M}(B) \text{ quelconque.}$$

Le problème étant plan, on pose $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = R\,\vec{x_2} = R\left[\cos\alpha\,\vec{Y} - \sin\alpha\,\vec{X}\right] \\ \vec{M}(B) = Cb\,\vec{z} \end{array} \right._B$

1.b) ${}^t[Fe] = \left[ Fxa, Fya, Ca, F/_2\cos\alpha - R\sin\alpha, F/_2\sin\alpha + R\cos\alpha, Cb \right]$

${}^t[Ge] = \left[ 0, 0, 0, U\cos\alpha, U\sin\alpha, 0 \right]$

$[Fe] = [Ke]\,[Ge]$

inconnues : $Fxa, Fya, Ca, R, Cb$ et $U$

1.c) On retient les équations :

$$\begin{bmatrix} F/_2\cos\alpha - R\sin\alpha \\ F/_2\sin\alpha + R\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ES/\ell & 0 \\ 0 & \dfrac{12EI_z}{\ell^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U\cos\alpha \\ U\sin\alpha \end{bmatrix}$$

1.d) On élimine R en combinant les deux équations précédentes :

$$F/_2 \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} = \left[ \frac{ES}{\ell}\cos^2\alpha + \frac{12\,EI}{\ell^3}\sin^2\alpha \right] U$$

1.e) $H_1 = ES/_\ell \cos^2\alpha = 10^7\ N/m \quad , \quad H_2 = \dfrac{12\,EI}{\ell^3}\sin^2\alpha = 10^3\ N/m$

$\varepsilon = \dfrac{H_2}{H_1} = 10^{-4} = 10^{-2}\ \% \quad , \quad F/_2 = H_1\left(1 + \dfrac{H_2}{H_1}\right)U$

$\varepsilon = 10^{-4} << 1$

La précision sur le déplacement est donnée par :

$$P = \frac{H_1^{-1} - [H_1+H_2]^{-1}}{[H_1+H_2]^{-1}} = \frac{H_2}{H_1} = 10^{-2}\ \%$$ , ce qui est très bon !

1.f) $S = \pi r^2 \;, \; I = \dfrac{\pi r^4}{4} \;, \; a = \dfrac{\ell}{2r}$

$\dfrac{H_2}{H_1} = \dfrac{3}{4a^2}\,tg^2\alpha \quad , \quad \varepsilon << 1$ , si a est grand et $\alpha$ petit

Remarquer que si $\alpha \to \dfrac{\pi}{2}$ , $tg\,\alpha \to +\infty$ ce qui interdit l'utilisation de l'approximation treillis.