

Corrigé de l'examen final du 22 janvier 2004

Correction de l'exercice 1.

On pourrait, comme dans le cours, étudier les éventuelles symétries du problème, mais on traitera le problème dans son ensemble.

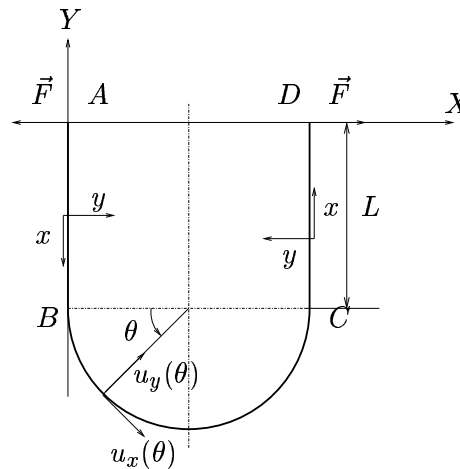


FIG. 1 – La structure étudiée et orientée.

1. On oriente la figure comme sur la figure 1, avec un repère local (x, y) sur chacune des trois parties et un repère global (X, Y) . La structure est orientée de A vers D . On choisit conventionnellement $F > 0$. L'origine $x = 0$ de la travée AB est choisie en A et l'origine $x = 0$ de la travée CD est choisie en C . L'origine $\theta = 0$ de la travée BC est choisie en B .
2. Avec les conventions d'orientations de la question 1, on détermine aisément les moments fléchissants M_1 et M_3 dans AB et CD :

$$M_1(x) = -Fx, \quad (1)$$

$$M_3(x) = F(x - L), \quad (2)$$

Pour déterminer le moment fléchissant $M_2(\theta)$ dans la travée BC , on procède comme dans le cours (chapitre 4). Comme au début de la section 4.3.1, on calcule d'abord l'effort normal

$$N(\theta) = \vec{F} \cdot \vec{u}_x(\theta) = {}^t(F \ 0) \cdot {}^t(\sin \theta \ -\cos \theta),$$

et donc

$$N(\theta) = F \sin \theta. \quad (3)$$

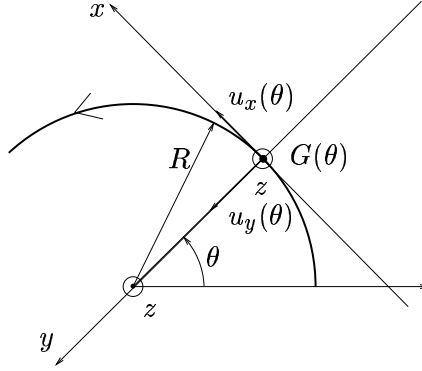


FIG. 2 – Les conventions d'orientation locales.

On utilise les équations d'équilibre vue en cours (valables avec les conventions d'orientation de la figure 2)

$$\frac{dN(\theta)}{d\theta} - T(\theta) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dM_2(\theta)}{d\theta} + RT(\theta) = 0. \quad (5)$$

Ainsi, on a

$$\frac{dM_2(\theta)}{d\theta} = -RT(\theta) = -R \frac{dN(\theta)}{d\theta},$$

et donc

$$\frac{d}{d\theta} (M_2(\theta) + RN(\theta)) = 0.$$

Il existe donc une constante c telle que, pour tout θ ,

$$M_2(\theta) + RN(\theta) = c.$$

D'après (3), on a donc :

$$M_2(\theta) = c - RF \sin \theta.$$

Puisque que le moment est continu en B , on a $M_2(0 - 0) = M_1(L + 0) = -FL$ et donc

$$\boxed{M_2(\theta) = -FL - RF \sin \theta.} \quad (6)$$

3. La structure est isostatique et d'après le théorème de Castigliano, le déplacement généralisé de A est égal à λ_A :

$$\lambda_A = \frac{\partial W}{\partial F}, \quad (7)$$

où

$$W = \frac{1}{2EI} \int_{\text{structure}} M^2(s) ds = \frac{1}{2EI} \left(\int_0^L M_1^2(x) dx + \int_0^L M_3^2(x) dx + R \int_0^\pi M_3^2(\theta) d\theta \right) \quad (8)$$

Grâce aux équations (1), (2), (6), (7) et (8), on peut donc calculer λ_A . On peut le faire à la main ou utiliser le script matlab fourni **droitecirculaire** qui fait tout cela :

```
syms F L x R theta ;
M1=-F*x;
M2=-F*L-R*x*sin(theta);
M3=F*(x-L);
W=int(M1^2,x,0,L)+int(M3^2,x,0,L)+R*int(M2^2,theta,0,pi);
lambda=simplify(diff(W,F));
pretty(lambda);
```

On trouve alors

$$\lambda_A = \frac{F}{2EI} \left(\frac{4}{3}L^3 + 2\pi RL^2 + 8R^2L + \pi R^3 \right),$$

et puisque F est opposé à X , on a le déplacement horizontal de A dans le repère X :

$$x_A = -\frac{F}{2EI} \left(\frac{4}{3}L^3 + 2\pi RL^2 + 8R^2L + \pi R^3 \right).$$

Par symétrie, la variation δ_{AD} de l'écartement de $A - D$ est égale à $-2x_A$:

$$\delta_{AD} = \frac{F}{EI} \left(\frac{4}{3}L^3 + 2\pi RL^2 + 8R^2L + \pi R^3 \right). \quad (9)$$

Correction de l'exercice 2.

1. D'après le cours, on a

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{L_0^2(T_0)}. \quad (10)$$

On calcule l'inertie égale à

$$I = \frac{a^4}{12}. \quad (11)$$

2. (a) On considère maintenant le système représenté sur la figure 3(a) page suivante, dont la longueur $L_0(T_0)$ est imposée. Notons $U(x)$ le déplacement longitudinal dans la poutre AB , orientée de A vers B . On écrit¹

$$\varepsilon(x) = \frac{dU}{dx} = \frac{N}{ES}. \quad (12)$$

On écrit $N = -F$ (où $F > 0$), on intègre et, puisque $U(0) = 0$, on a

$$U(x) = -\frac{Fx}{ES}$$

¹Cette équation correspond à l'équation de l'énoncé

$$\frac{dU}{dx} = \frac{N}{ES} + \alpha(T - T_0),$$

avec $\alpha = 0$.

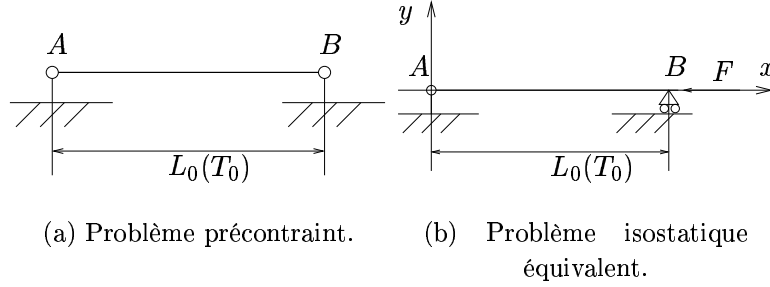


FIG. 3 –

Le problème de la figure 3(a) est équivalent à celui de la figure 3(b) pour lequel

$$F < F_c. \quad (13)$$

On imposera, pour la structure de la figure 3(b) :

$$U_B = U_{\text{précontrainte}}. \quad (14)$$

On en déduit donc

$$U_{\text{précontrainte}} = -\frac{FL_0(T_0)}{ES}$$

et donc

$$\boxed{F = -\frac{ESU_{\text{précontrainte}}}{L_0(T_0)}}. \quad (15)$$

Dans ce calcul, seule la déformation longitudinale U est à prendre en compte : selon l'hypothèse (13), le flambement d'Euler ne se manifeste pas.

(b) On modifie la loi de comportement pour tenir compte de la dilatation thermique :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{N}{ES} + \alpha(T - T_0), \quad (16)$$

Comme pour l'équation différentielle (12), l'intégration de (16) fournit (attention à la dépendance de U en x et T) :

$$U(x, T) = -\frac{Fx}{ES} + \alpha(T - T_0)x,$$

et donc en $x = L_0(T_0)$, on a selon la contrainte (14)

$$U_{\text{précontrainte}} = U(L_0(T_0), T) = -\frac{FL_0(T_0)}{ES} + \alpha(T - T_0)L_0(T_0) = L_0(T_0) \left(-\frac{F}{ES} + \alpha(T - T_0) \right).$$

Enfin, on écrit que cette contrainte impose une valeur de F , égale à la valeur critique du flambement d'Euler, soit

$$\boxed{U_{\text{précontrainte}} = L_0(T_0) \left(-\frac{F_c}{ES} + \alpha(T - T_0) \right)}, \quad (17)$$

où F_c est défini par (10) et (11).

Correction de l'exercice 3.

On pourra aussi consulter les pages 485 à 488 de [Dub98].

1. On renvoie à la figure 6.3 page 100 du polycopié de cours.
2. On considère $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $\phi \in]0, \pi/2[$, fixés pour toute la suite de l'exercice. L'ensemble des points du demi-plan de Mohr tels que

$$\tau < c - \sigma \tan \phi, \quad (18)$$

admet pour frontière la droite Δ d'équation

$$\boxed{\tau = c - \sigma \tan \phi.} \quad (19)$$

On choisissant la bonne partie (celle qui est sous la droite), on en déduit donc une représentation graphique de l'ensemble des points du demi-plan de Mohr vérifiant (18). Voir figure 4. La droite Δ admet pour pente $-\tan \phi < 0$ et pour ordonnée à l'origine c .

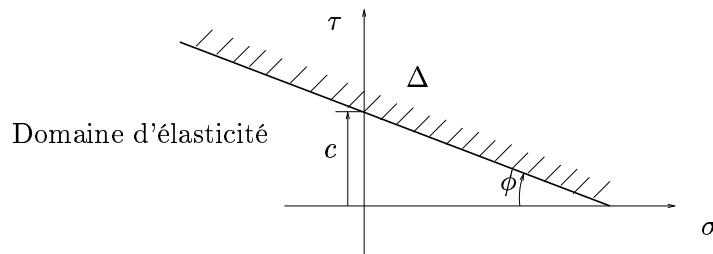


FIG. 4 – Le domaine d'élasticité du critère de Mohr-Coulomb.

3. On considère un état de traction défini en un point par

$$\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

où $\sigma_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

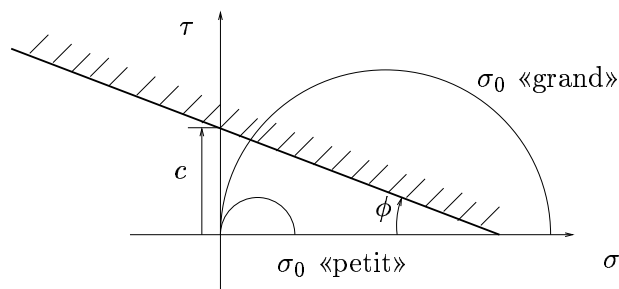


FIG. 5 – un cas de traction.

- (a) On constate sur la figure 5 que

- si σ_0 est «petit», on reste dans le domaine élastique de Mohr-Coulomb, puisque le tricercler de Mohr (réduit à un cercle) est tout entier inclus dans le domaine d'élasticité ;
- en revanche, si σ_0 est «grand», on quitte le domaine élastique de Mohr-Coulomb, puisque le tricercler de Mohr (réduit à un cercle) sort du domaine d'élasticité : il coupe la droite Δ en deux points distincts..

Naturellement, le cas limite, qu'on a va étudier maintenant correspond au cas où le cercle est tangent à Δ .

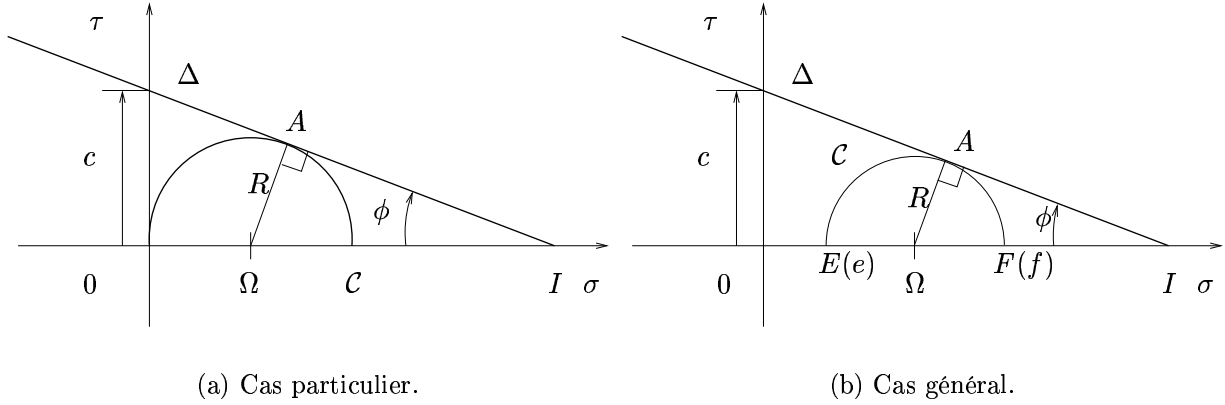


FIG. 6 – Le cercle \mathcal{C} et la droite Δ sont tangents.

- (b) Sur la figure 6(a), on constate que (ΩA) est perpendiculaire à Δ et donc

$$\sin \phi = \frac{\Omega A}{\Omega I} = \frac{\Omega A}{OI - O\Omega}.$$

Puisque

$$\tan \phi = \frac{c}{OI},$$

il vient

$$\sin \phi = \frac{R}{\frac{c}{\tan \phi} - R},$$

soit

$$\boxed{R = \frac{c \cos \phi}{1 + \sin \phi}.} \quad (21)$$

- (c) Il suffit d'écrire que le cercle \mathcal{C} correspondant à l'état de contrainte (20) passe par l'origine et que son rayon est égal à $R = \sigma_0/2$; ainsi (21) est équivalent à

$$\frac{\sigma_0}{2} = \frac{c \cos \phi}{1 + \sin \phi}.$$

On reste donc dans le domaine élastique tant que

$$\boxed{\sigma_0 < \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi}.} \quad (22)$$

4. On se donne maintenant un état de contrainte quelconque, dont les valeurs principales $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ vérifient

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3. \quad (23)$$

- (a) On se reporte à la figure 6(b) page précédente. Comme dans la question 3b, on écrit

$$\sin \phi = \frac{\Omega A}{\Omega I} = \frac{\Omega A}{OI - O\Omega} = \frac{\Omega A}{OI - (e + R)}.$$

Puisque

$$\tan \phi = \frac{c}{OI},$$

il vient

$$\sin \phi = \frac{R}{\frac{c}{\tan \phi} - e - R},$$

et donc

$$\boxed{c \cos \phi = R + (e + R) \sin \phi.} \quad (24)$$

- (b) Pour l'état de contrainte principal (23), le tricerclle de Mohr correspond à celui de la figure 2.2 de la page 34 du polycopié de cours. Sur cette figure, on constate que le plus grand cercle coupe l'axe de σ aux points d'abscisse σ_1 et σ_3 . Le tricerclle de Mohr est inclus dans le domaine d'élasticité si et seulement le plus grand des demi-cercles est inclus dans le domaine d'élasticité. En comparant les figures 2.2 de la page 34 du polycopié de cours et la figure 6(b) page précédente, on constate que le cas limite de tangence s'applique avec $e = \sigma_1$ et $R = (\sigma_3 - \sigma_1)/2$. En réinjectant ces valeurs dans (24), on obtient

$$\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \sin \phi - c \cos \phi = 0.$$

On reste donc dans le domaine élastique tant que

$$\boxed{\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \sin \phi < c \cos \phi.} \quad (25)$$

5. On peut réécrire

$$\frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin \phi < c \cos \phi,$$

sous la forme

$$\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_Y, \quad (26)$$

en posant conventionnellement :

$$\sigma_{\text{eq}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin \phi, \quad (27)$$

et

$$\sigma_Y = c \cos \phi \quad (28)$$

Références

[Dub98] Serge Dubigeon. *Mécanique des milieux continus*. Lavoisier, Tec & Doc, École Centrale de Nantes, 1998. Disponible à la bibliothèque de l'UTBM : cote QA 802.2 DUB.