

Corrigé de l'examen final du 26 juin 2002

Correction de l'exercice 1.

1°)

a) La structure de la figure 1 (sur l'énoncé) a deux degrés de liberté bloqués (correspondant à la rotule en A) et nous avons trois équations d'équilibre. Ainsi, cette structure un mécanisme.

b) D'après la nullité de la somme des moments (en A) agissant sur cette structure, il vient

$$0 = c_b + R(f_{yB} - f_{xB}).$$

Puisque, $c_b = 0$, on a donc

$$f_{xB} = f_{yB}.$$

Ainsi, cette structure est soumise à une force en B dans la direction (AB) . D'après l'équilibre, la réaction en A est aussi portée par la droite (AB) . Le point A est immobile (rotule) et le déplacement du point B s'effectue uniquement dans la direction (AB) . En effet, si la composante du déplacement de B sur une direction perpendiculaire à (AB) était non nulle, la structure, hypostatique, aurait un mouvement d'ensemble autour du point A . Bref, la structure de la figure 1 est équivalente à la structure de la figure 5 (où la réaction en A est r_A , le point B est soumis à la force f_B et a un déplacement u_B , selon la direction (AB)).

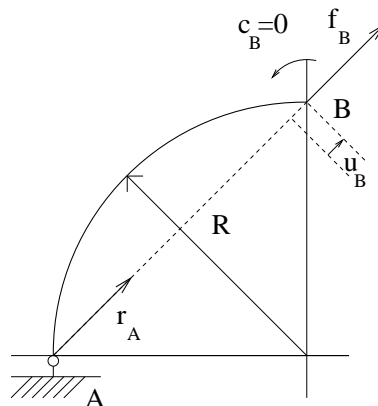


FIG. 5 – Une structure circulaire équivalente

D'après l'équilibre de la structure de la figure 2 on a

$$Y_A = 0, \quad (1)$$

$$Y_B = 0. \quad (2)$$

Pour cette structure, l'appui simple en B impose un déplacement de ce point porté par l'axe X . Ainsi, la structure de la figure 2 est équivalente à la figure 5, elle même équivalente à celle de la figure 1. Donc

Les structures des figures 1 et 2 sont équivalentes

Remarque 1. On remplacé la structure hypostatique de la figure 1 par la structure isostatique de la figure 2 à laquelle on pourra appliquer le théorème de Castigliano pour calculer des déplacements (ce qu'on ne pouvait faire pour une structure hypostatique).

2°)

a) Avec l'orientation choisie, la seule force à droite est la force F dont la projection sur x est égale à $F \sin \theta$. D'autre part, dans le repère (O, X, Y, Z) , on a

$$\begin{aligned} \vec{M}(\theta) &= \vec{PB} \wedge \vec{F}, \\ &= \begin{pmatrix} R \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \theta \right) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= FR \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

On a donc, pour θ compris entre $\pi/4$ et $3\pi/4$,

$$\begin{aligned} N(\theta) &= F \sin \theta, \\ M(\theta) &= FR \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

b) On a donc

$$\begin{aligned} W &= \frac{R}{2ES} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} N^2 d\theta + \frac{R}{2EI} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} M^2 d\theta, \\ &= \frac{R}{2E} \left(\frac{1}{S} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (F \sin \theta)^2 d\theta + \frac{1}{I} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(FR \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)^2 d\theta \right), \\ &= \frac{RF^2}{8E} \left(\frac{1}{S} (2 + \pi) + \frac{R^2}{I} (2\pi - 6) \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$W = \frac{1}{2k} F^2, \quad (3)$$

où

$$k = \frac{4E}{R} \left(\frac{1}{S} (2 + \pi) + \frac{R^2}{I} (2\pi - 6) \right)^{-1}. \quad (4)$$

c) D'après le théorème de Castigliano,

$$u = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{F}{k},$$

et donc

$$F = ku. \quad (5)$$

3°)

a) On sait que, d'après le comportement élastique linéaire de la structure de la figure 3 (pour lesquelles les forces sont X_A , Y_A , X_B et Y_B et les déplacements sont u_A , u_B , u_B et v_B), il existe une matrice symétrique K de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ u_B \\ v_B \end{pmatrix}.$$

D'après (1) et (2), pour tout (u_A, u_B, u_B, v_B) , on a $Y_A = Y_B = 0$. Ainsi, les deuxième et quatrième lignes de K sont nulles. D'après la symétrie de K , on a donc

$$K = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où a , b et c sont des réels. D'après l'équilibre de la structure, on a $X_A = -X_B$. Si on fixe $u_A = v_A = 0$, on a donc, pour tout (u_B, v_B) ,

$$bu_B = -cu_B,$$

et donc

$$b = -c. \quad (6)$$

De même, on a

$$a = -b. \quad (7)$$

Ainsi, d'après (6) et (7), on notant $\beta = a = c = -b$, on a donc

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ u_B \\ v_B \end{pmatrix}. \quad (8)$$

b) La structure de la figure 3, pour

$$u_A = v_A = 0, \text{ et } v_B = 0, \quad (9)$$

est équivalente à la structure de la figure 2 avec $F = X_B$ et $u_B = u$. D'après la question 2, on a donc

$$X_B = ku_B. \quad (10)$$

Or, d'après (8) et (9), on a

$$X_B = \beta u_B. \quad (11)$$

Ainsi, en comparant (10) et (11), on a donc

$$\boxed{\beta = k.}$$

D'après (8), on a donc l'expression de K , la matrice de rigidité :

$$K = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

où k est défini par (4).

Remarque 2. Nous avons donc calculé, dans le repère (X, Y) , la matrice de rigidité d'une barre courbe. Nous pouvions aussi raisonner par « condensation » : on calcule la matrice complète de rigidité d'une poutre circulaire (d'ordre 6) puis on en déduit la matrice d'ordre 4, correspondant à la barre. Pour calculer la matrice d'ordre 6, on peut par exemple, supposer A encastré, B soumis à une force de composantes X_B et Y_B et un couple C_B . On en déduit les déplacements du point B , x_B , y_B et ω_B . On peut montrer que

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ \omega_B \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ C_B \end{pmatrix}$$

avec A symétrique et donnée par

$$A = \frac{R}{2E} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2S} + \frac{2}{I} \left(\frac{3\pi R^2}{4} - 2R^2 \right) & \frac{1}{S} - \frac{R^2}{I} & \frac{(2-\pi)R}{I} \\ * & \frac{\pi}{2S} + \frac{R^2\pi}{2I} & \frac{2R}{I} \\ * & * & \frac{\pi}{I} \end{pmatrix}.$$

En calculant A^{-1} (ce qui est assez pénible), on en déduirait la matrice de rigidité K d'ordre 6 de la poutre circulaire. On écrit ensuite (avec $K = (k_{ij})$) par définition

$$F_{xA} = k_{11}u_A + k_{12}v_A + k_{13}\omega_A + k_{14}u_B + k_{15}v_B + k_{16}\omega_B, \quad (13)$$

$$F_{yA} = k_{21}u_A + k_{22}v_A + k_{23}\omega_A + k_{24}u_B + k_{25}v_B + k_{26}\omega_B, \quad (14)$$

$$C_A = k_{31}u_A + k_{32}v_A + k_{33}\omega_A + k_{34}u_B + k_{35}v_B + k_{36}\omega_B, \quad (15)$$

$$F_{xB} = k_{41}u_A + k_{42}v_A + k_{43}\omega_A + k_{44}u_B + k_{45}v_B + k_{46}\omega_B, \quad (16)$$

$$F_{yB} = k_{51}u_A + k_{52}v_A + k_{53}\omega_A + k_{54}u_B + k_{55}v_B + k_{56}\omega_B, \quad (17)$$

$$C_B = k_{61}u_A + k_{62}v_A + k_{63}\omega_A + k_{64}u_B + k_{65}v_B + k_{66}\omega_B. \quad (18)$$

En écrivant que C_A et C_B sont nuls, on déduit de (15) et (18) une expression de ω_A et ω_B en fonction de u_A , v_A , u_B et v_B . Ces équations nous permettent de connaître, de plus, les rotations ω_A et ω_B .

En réinjectant ces deux expressions dans (13), (14), (16) et (17), on en déduit les expressions de F_{xA} , F_{yA} , F_{xB} et F_{yB} , en fonction de u_A , v_A , u_B et v_B .

c) La matrice de rigidité de cette barre ressemble à la matrice de rigidité d'une barre droite (définie par \tilde{E} , \tilde{S} et \tilde{L} et étudié en TD) définie par

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{E}\tilde{S}}{\tilde{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $K = \tilde{K}$ si et seulement si

$$k = \frac{\tilde{E}\tilde{S}}{\tilde{L}}.$$

Ainsi, la barre circulaire est équivalente à une barre droite de longueur

$$\boxed{\tilde{L} = \sqrt{2}R,}$$

et avec une rigidité équivalente $\tilde{E}\tilde{S}$ définie par

$$\boxed{\tilde{E}\tilde{S} = 4\sqrt{2}E \left(\frac{1}{S} (2 + \pi) + \frac{R^2}{I} (2\pi - 6) \right)^{-1}.}$$

Cependant, la barre droite ne travaille qu'en traction-compression alors que la barre circulaire travaillera en traction-compression et en flexion. La distribution des contraintes y sera donc différente. Naturellement, les déformées sont aussi différentes.

Remarque 3. Cette propriété est importante et se généralise : toute structure élastique linéaire reposant sur deux rotules se comporte comme, une barre droite (avec une rigidité équivalente), comme par exemple la structure de la figure 6. En effet, le raisonnement de la question 3 a) ne dépend pas de la forme de la structure (il suffit qu'il n'y ait pas de couples exercés en A et B). Le calcul fait ensuite utilise la forme particulière circulaire de la structure étudiée. On pourrait, en théorie, calculer la rigidité de toute structure, en utilisant la même méthode.

Par exemple, on pourrait, par calcul d'assemblage de matrice, calculer la rigidité équivalente de la structure de la figure 6.

L'équivalence n'est valable que pour la relation de rigidité entre les forces en A et B et leurs déplacements. En revanche, au sein de la structure, les contraintes (par exemple pour la figure 6) n'ont pas, *a priori*, la même distribution.

4°)

a) D'après (12), on a donc l'expression de K , la matrice de rigidité de la barre circulaire b_1 dans le repère (X, Y) (le repère global de la structure 4 est le même que le repère d'étude de la structure de la figure 3).

$$\boxed{K_1^g = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{ES}{2R} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},} \quad (19)$$

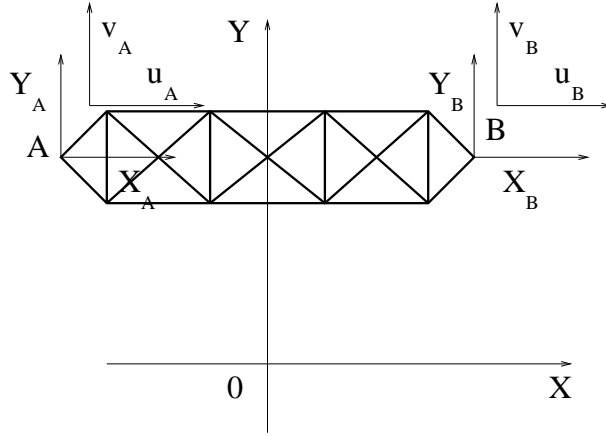


FIG. 6 – Une structure quelconque travaillant en traction compression

où

$$\boxed{\gamma = \frac{2Rk}{ES}}, \quad (20)$$

et k est défini par (4).

D'autre part, avec les orientations utilisées, on a les valeurs des deux angles θ_i , définissant la rotation qui envoie le repère global (X, Y) sur le repère local (x, y) des deux barres b_2 et b_3 :

$$\theta_2 = -\frac{3\pi}{4}, \quad (21)$$

$$\theta_3 = -\frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

On rappelle que E , S et I sont les mêmes que dans la barre circulaire et

$$L_2 = R, \quad (23)$$

$$L_3 = \sqrt{2}R. \quad (24)$$

D'après la formule (4) de l'énoncé, on a donc les expressions de matrice de rigidité élémentaires dans les axes globaux X et Y des deux barres b_2 et b_3 :

$$K_2^g = \frac{ES}{2R} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$K_3^g = \frac{ES}{2R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Attention à la disposition des différentes barres dans le repère (X, Y) .

On donne la matrice de connectivité de la structure dans la tableau 1 page 7.

numéro de la barre \longrightarrow	1	2	3
numéro local 1	1	2	2
numéro local 2	2	3	4

TAB. 1 – Matrice de connectivité de la structure

Ainsi, compte tenu de ce tableau et de (19), (25) et (26), on a l'expression des matrices de rigidité «dispatchées» :

$$\tilde{K}_1^g = \frac{ES}{2R} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\tilde{K}_2^g = \frac{ES}{2R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\tilde{K}_3^g = \frac{ES}{2R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Il ne reste plus qu'à écrire

$$\mathcal{K} = \tilde{K}_1^g + \tilde{K}_2^g + \tilde{K}_3^g,$$

ce qui donne (on n'indique que la partie supérieure de la matrice symétrique)

$$\mathcal{K} = \frac{ES}{2R} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \gamma + 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 1 + \sqrt{2} & -1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ * & * & * & * & 1 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

où γ est défini par (20).

Remarque 4. On n'est pas obligé d'expliciter les matrices \tilde{K}_i^g et on pouvait assembler directement en donnant (30). On peut aussi assembler par blocs 2×2 .

b) Les réactions d'appuis aux nœuds n_1 , n_3 et n_4 sont inconnues, les déplacements du nœud n_2 sont inconnues ; les déplacements imposés aux nœuds n_1 , n_3 et n_4 sont nuls et on a, par rapport au repère (X, Y) :

$$F_{x2} = \frac{\sqrt{2}}{2}f,$$

$$F_{y2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}f.$$

Attention à bien exprimer les forces et les déplacements dans le repère (X, Y) .

On a donc

$$\begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}f \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}f \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{pmatrix} = \mathcal{K} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

c) On calcule par blocs et on écrit

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$$

où les matrices A_{ij} sont de taille $(2, 2)$. De même, on pose

$$F_1 = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

on introduit de même, F_2, F_3, F_4 et on pose

$$U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Avec ces notations, (31) s'écrit

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix},$$

ce qui est équivalent à

$$A_{22}U = F_2,$$

soit

$$A_{22} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Or $A_{22} = B$ était rappelée dans l'énoncé et on a donc

$$\boxed{B \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

d) On a donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} f B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

et, après calculs,

$$\boxed{\begin{cases} u_2 = \frac{\sqrt{2}Rf}{ES\Delta} (2 + \sqrt{2}), \\ v_2 = -\frac{2\sqrt{2}Rf}{ES\Delta} \left(1 + \frac{Rk}{ES}\right), \end{cases}} \quad (34)$$

où

$$\boxed{\Delta = \frac{2Rk}{ES} (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} > 0.} \quad (35)$$

e) Pour calculer les déplacements horizontaux et verticaux \tilde{u}_2 et \tilde{v}_2 du nœud 2, il faut de nouveau changer de repère :

$$\begin{cases} \tilde{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (u_2 - v_2), \\ \tilde{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (u_2 + v_2), \end{cases}$$

c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_2 = \frac{Rf}{ES\Delta} \left(4 + \sqrt{2} + \frac{2Rk}{ES} \right), \\ \tilde{v}_2 = \frac{Rf}{ES\Delta} \left(\sqrt{2} - \frac{2Rk}{ES} \right). \end{array} \right. \quad (36)$$

Supposons $f > 0$.

La quantité \tilde{u}_2 est positive, ce qui est physiquement raisonnable. Pour le signe de \tilde{v}_2 , on écrit en explicitant k (défini par (4)) :

$$\tilde{v}_2 = \delta \left(\sqrt{2}(\pi + 2) - 8 + \frac{\sqrt{2}R^2S}{I}(2\pi - 6) \right),$$

où δ est une constante positive. Puisque $8 - \sqrt{2}(\pi + 2)$ et $2\pi - 6$ sont strictement positifs, \tilde{v}_2 est négatif si et seulement si :

$$\frac{R^2S}{I} < \frac{8 - \sqrt{2}(\pi + 2)}{\sqrt{2}(2\pi - 6)}. \quad (37)$$

On sait que

$$A = \sqrt{\frac{I}{R^2S}} \geq 10.$$

On a donc

$$\frac{R^2S}{I} = \frac{1}{A^2} \leq 0,01.$$

Puisque

$$\frac{8 - \sqrt{2}(\pi + 2)}{\sqrt{2}(2\pi - 6)} \approx 1,82$$

(37) est vérifié et \tilde{v}_2 est négatif. Bref, si $f > 0$,

$$\boxed{\tilde{u}_2 > 0 \text{ et } \tilde{v}_2 < 0.}$$

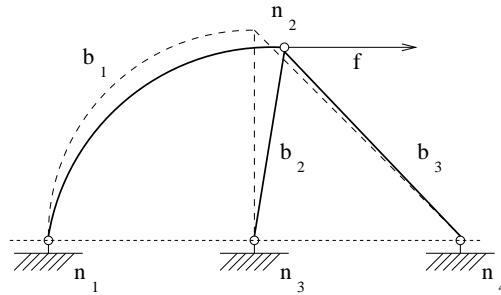


FIG. 7 – Déformée qualitative de la structure

Les deux barres b_2 et b_3 restent droites (et travaillent en compression) ; on a représenté qualitativement la déformée de la structure sur la figure 7.

Correction de l'exercice 2.

