

Corrigé de l'examen final du 24 juin 2004

Correction de l'exercice 1. Non traitée.

Correction de l'exercice 2.

1. En un point $G(\theta)$, on calcule le moment dû aux forces exercées par la partie aval (définie pour ϕ compris entre θ et $\pi/2$) sur la partie amont ; on décompose ce moment comme la somme du moment $M_1(\theta)$ de la force f et du moment $M_2(\theta)$ dû au poids propre. Il est clair que

$$M_1(\theta) = -fR \cos \theta. \quad (1)$$

Pour calculer $M_2(\theta)$, on considère le moment élémentaire $dM(\phi)$ dû à la portion de poutre infinitésimale comprise entre ϕ et $\phi + d\phi$; cette portion infinitésimale exerce une force d'intensité $Rd\phi\lambda$ et de bras de levier égal à $R(\cos \theta - \cos \phi)$. On a donc

$$dM(\phi) = \lambda R^2 (\cos \theta - \cos \phi) d\phi,$$

et donc

$$M_2(\theta) = \int_{\phi=\theta}^{\pi/2} dM(\phi) = \int_{\phi=\theta}^{\pi/2} \lambda R^2 (\cos \theta - \cos \phi) d\phi = \lambda R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos \theta - \lambda R^2 (1 - \sin \theta). \quad (2)$$

Selon (1) et (2), il vient

$$M(\theta) = -fR \cos \theta + \lambda R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos \theta - \lambda R^2 (1 - \sin \theta). \quad (3)$$

Remarque 1. Une autre façon de procéder aurait été d'utiliser l'équation d'équilibre :

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} + RT(\theta) = 0. \quad (4)$$

Dans tout cette remarque, on utilise les notations des chapitres 1 (section 1.3.3) et 4 du polycopié de cours.

On a par hypothèse l'expression du poids propre d'une partie de poutre définie par $d\theta$:

$$d\vec{p} = -Rd\theta\lambda\vec{J}. \quad (5)$$

Le poids propre de la partie de la poutre comprise entre θ et $\pi/2$ est donc égal à

$$\vec{P}(\theta) = -R\lambda \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \vec{J}. \quad (6)$$

Pour tout θ , les forces de la droite sur la gauche correspondent au poids propre de la partie de la poutre comprise entre θ et $\pi/2$ et la force f ; compte tenu de (6), cette force est égale à

$$\boxed{\overrightarrow{R_{G(\theta)}} = \left(f + R\lambda \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \vec{J}.} \quad (7)$$

On peut aussi utiliser l'équation (B.18) page 153 de l'annexe B du polycopié de cours :

$$\frac{d\overrightarrow{R_{G(s)}}}{ds} + \overrightarrow{F(s)} = 0.$$

où $ds = R d\theta$. Les équations (B.10) et (B.11) page 153 de cette même annexe donnent :

$$\overrightarrow{F(\theta)} = -\lambda \cos \theta u_x(\theta) + \lambda \sin \theta u_y(\theta).$$

et

$$d\vec{f} = R \overrightarrow{F(\theta)} d\theta.$$

D'après (5), on a donc

$$\frac{d\overrightarrow{R_{G(\theta)}}}{d\theta} - R\lambda \vec{J} = 0.$$

Par intégration entre θ et $\pi/2$, on a donc

$$\overrightarrow{R_{G(\frac{\pi}{2})}} - \overrightarrow{R_{G(\theta)}} = R\lambda \vec{J} \int_{\theta}^{\pi/2} du.$$

et donc

$$\overrightarrow{R_{G(\frac{\pi}{2})}} - \overrightarrow{R_{G(\theta)}} = R\lambda \vec{J} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

Les conditions aux limites

$$T \left(\frac{\pi}{2} \right) = -f, \quad (8a)$$

$$N \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad (8b)$$

peuvent se réécrire :

$$\overrightarrow{R_{G(\frac{\pi}{2})}} = f \vec{J},$$

et on retrouve donc (7). Par définition, les efforts de la RDM, $N(\theta)$ et $T(\theta)$ sont les projections de $\overrightarrow{R_{G(\theta)}}$ sur u_x et u_y . On a donc :

$$N(\theta) = \overrightarrow{R_{G(\theta)}} \cdot u_x(\theta),$$

$$T(\theta) = \overrightarrow{R_{G(\theta)}} \cdot u_y(\theta).$$

En utilisant

$$\vec{J} = \cos \theta u_x(\theta) - \sin \theta u_y(\theta) \quad (9)$$

on a donc, puisque $u_x(\theta) \cdot u_y(\theta) = 0$

$$\boxed{N(\theta) = \left(f + R\lambda \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \cos \theta,} \quad (10)$$

et

$$\boxed{T(\theta) = -\left(f + R\lambda\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) \sin \theta.} \quad (11)$$

En intégrant (4) entre $u = \theta$ et $u = \pi/2$, on a grâce à (11),

$$\begin{aligned} M\left(\frac{\pi}{2}\right) - M(\theta) &= -R \int_{\theta}^{\pi/2} T(u) du, \\ &= \left(-\frac{R^2\lambda\pi}{2} + Rf\right) \cos \theta + R^2\lambda \int_{\theta}^{\pi/2} u \sin u du. \end{aligned}$$

Par intégration par partie, on a

$$\int_{\theta}^{\pi/2} u \sin u du = 1 - \sin \theta + \theta \cos \theta,$$

et, puisque $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est nul, on a donc

$$\boxed{M(\theta) = R\left(\left(\frac{R\lambda\pi}{2} - f\right) \cos \theta + R\lambda(-1 + \sin \theta - \theta \cos \theta)\right),} \quad (12)$$

quantité égale à celle définie par (3).

Cette méthode est donc ici assez pénible.

Le couple d'appuis s'obtient en prenant l'opposé du moment fléchissant en $\theta = 0$ et en prenant¹ $f = 0$ et vaut donc

$$\boxed{\Gamma = \lambda R^2 \left(1 - \frac{\pi}{2}\right).} \quad (13)$$

2. En ne prenant en compte que les effets dus au moment fléchissant et d'après le théorème de la force virtuelle, le déplacement vertical de l'extrémité B est égal à

$$\mu = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/2} M(\theta) \frac{\partial M(\theta)}{\partial f} d\theta.$$

Selon (3), on a donc

$$\boxed{\mu = \frac{R^4\lambda}{EI} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\pi}{2} \cos \theta + 1 - \sin \theta + \theta \cos \theta\right) \cos \theta d\theta.} \quad (14)$$

Grâce au calcul symbolique de matlab, on trouve

$$\boxed{\mu = \frac{R^4\lambda}{EI} \left(\frac{1}{4} - \frac{\pi^2}{16}\right).} \quad (15)$$

3. (a) On aurait pu être tenté de reprendre la méthode de l'exemple donné en section 4.3.3 (page 97) du chapitre 4 du polycopié de cours. Cependant, ici le poids propre s'exprime simplement dans le repère global et il est plus facile de rester dans ce repère.

¹cette force est virtuelle et ne sert qu'au calcul de déplacements.

- (b) Donnons les calculs si l'on avait appliqué cette méthode. On aurait utilisé les trois équations d'équilibre local :

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} + N(\theta) + R\lambda \sin \theta = 0, \quad (16a)$$

$$\frac{dN(\theta)}{d\theta} - T(\theta) - R\lambda \cos \theta = 0, \quad (16b)$$

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} + RT(\theta) = 0. \quad (16c)$$

Ces équations sont valables hors de tout intervalle où l'on applique des forces et des couples ponctuels, c'est-à-dire sur tout l'intervalle $]0, \pi/2[$. On procède exactement comme dans la section 4.3.3 (page 97) du chapitre 4 du polycopié de cours : en dérivant (16a), il vient

$$\frac{dN(\theta)}{d\theta} = -\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2} - R\lambda \cos \theta,$$

et, en réinjectant dans (16b), on obtient

$$\boxed{\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad \frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2} + T(\theta) = -2R\lambda \cos \theta.} \quad (17a)$$

On connaît les conditions aux limites en B , donc on connaît

$$\boxed{T\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ donné.}} \quad (17b)$$

Enfin, selon (16a), on a

$$\boxed{\frac{dT}{d\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -N\left(\frac{\pi}{2}\right) - R\lambda.} \quad (17c)$$

On admet qu'une solution particulière de (17a) est :

$$T(\theta) = -R\lambda\theta \sin \theta.$$

Puisque la solution générale de l'équation différentielle (17a) sans second membre est :

$$T(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta,$$

on en déduit que la solution générale de (17a) est

$$T(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta - R\lambda\theta \sin \theta, \quad (18)$$

où a et b sont des réels. On les détermine grâce aux conditions aux limites² (8) en $\theta = \pi/2$. Selon (18), on a

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = b - \frac{R\lambda\pi}{2}, \quad (19)$$

et

$$\frac{dT}{d\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a - R\lambda. \quad (20)$$

En comparant (17c), (8) et (20), on donc retrouve donc (11).

²Celles en $\theta = 0$ ne sont pas connues, car on n'a pas encore calculé les réactions d'appuis.

En vertu de (16a), on a

$$N(\theta) = -\frac{dT(\theta)}{d\theta} - R\lambda \sin \theta,$$

et on retrouve donc (10).

Enfin, en intégrant (16c), on retrouverait (3).

Cette méthode est donc beaucoup plus lourde que celle de la question 1!

Remarque 2. Une autre méthode³ peut aussi être utilisée pour résoudre le système différentiel (16) : on le considère comme une seule équation différentielle d'ordre un dans \mathbb{R}^3 avec les conditions aux limites :

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f, \quad (21a)$$

$$N\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (21b)$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (21c)$$

On peut faire ce calcul sous matlab formel en tapant :

```
S=dsolve('DT+N+R*lambda*sin(theta)=0',...
         'DN-T-R*lambda*cos(theta)=0',...
         'DM+R*T=0',...
         'T(pi/2)=-f','N(pi/2)=0','M(pi/2)=0','theta');
disp('T');
pretty(simplify(S.T));
disp('N');
pretty(simplify(S.N));
disp('M');
pretty(simplify(S.M));
```

On trouve

$$T(\theta) = \frac{-R^2\lambda \sin(\theta)\theta + \sin(\theta)(1/2 R^2\lambda\pi - fR)}{R},$$

$$N(\theta) = -\frac{-R^2\lambda \cos(\theta)\theta + \cos(\theta)(1/2 R^2\lambda\pi - fR)}{R},$$

$$M(\theta) = R^2\lambda \sin(\theta) - R^2\lambda \cos(\theta)\theta - R^2\lambda + \cos(\theta)(1/2 R^2\lambda\pi - fR),$$

ce qui est bien identique à (11), (12) et (10).

On peut aussi faire le calcul à la main, avec un peu d'huile de coude. Si on pose

$$X(\theta) = \begin{pmatrix} T(\theta) \\ N(\theta) \\ M(\theta) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

le système (16) est équivalent à

$$\dot{X}(\theta) + AX(\theta) = g(\theta), \quad (23)$$

³encore bien plus lourde ...

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ R & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

et

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} -R\lambda \sin \theta \\ R\lambda \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Les conditions aux limites sont équivalentes à

$$X\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Pour résoudre (23) et (26), on procède de la façon suivante :

- On diagonalise la matrice A . Son polynôme caractéristique est égal à

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -1 & -X & 0 \\ R & 0 & -X \end{vmatrix} = -X(X^2 + 1).$$

Ses racines sont (dans \mathbb{C}), 0 , i et $-i$. Ainsi, A est diagonalisable. Après calculs, on obtient la matrice de changement de base

$$P = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & R & -R \end{pmatrix}. \quad (27)$$

On a

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (28)$$

et on calcule

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2R & 2 \\ -i & -1 & 0 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Le système (23) est donc équivalent à

$$\dot{X}(\theta) + PDP^{-1}X(\theta) = g(\theta),$$

soit encore

$$P^{-1}\dot{X}(\theta) + DP^{-1}X(\theta) = P^{-1}g(\theta),$$

ou encore

$$\dot{Y}(\theta) + DY(\theta) = P^{-1}g(\theta), \quad (30)$$

où l'on a posé :

$$Y(\theta) = P^{-1}X(\theta). \quad (31)$$

Grâce à (29), on a

$$P^{-1}g(\theta) = \frac{R\lambda}{2} \begin{pmatrix} 2R \cos \theta \\ -\cos \theta + i \sin \theta \\ \cos \theta + i \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{R\lambda}{2} \begin{pmatrix} 2R \cos \theta \\ -e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Les conditions initiales (26) s'écrivent

$$Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = P^{-1} \begin{pmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

soit encore, grâce à (29)

$$Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{if}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

- Puisque D a une forme plus simple, on peut résoudre plus facilement le système (30) et (33); on pose

$$Y(\theta) = \begin{pmatrix} y_1(\theta) \\ y_2(\theta) \\ y_3(\theta) \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Le système différentiel linéaire (30) est donc équivalent aux trois équations différentielles découplées⁴

$$\dot{y}_1 = R^2 \lambda \cos \theta, \quad (35a)$$

$$\dot{y}_2 + iy_2 = -\frac{R\lambda e^{-i\theta}}{2}, \quad (35b)$$

$$\dot{y}_3 - iy_3 = \frac{R\lambda e^{i\theta}}{2}. \quad (35c)$$

On résout chacune d'elle : on considère d'abord l'équation homogène associée (c'est-à-dire sans second membre), puis on cherche une solution particulière⁵. Pour (35a), l'équation homogène associée est

$$\dot{y}_1 = 0,$$

dont la solution est

$$y_1(\theta) = y_1^0, \quad (36)$$

où y_1^0 est un complexe. On cherche une solution particulière de (35a) sous la forme

$$y_1(\theta) = \mu \sin \theta,$$

où μ est un complexe; on trouve

$$y_1(\theta) = R^2 \lambda \sin \theta. \quad (37)$$

⁴chacune d'elles ne fait intervenir que l'une des trois fonction y_1 , y_2 et y_3 .

⁵ou on utilise la méthode de la variation de la constante, ce qui est plus long.

En sommant (36) et (37) :

$$y_1(\theta) = y_1^0 + R^2 \lambda \sin \theta. \quad (38)$$

De même, pour (35b), l'équation homogène associée est

$$\dot{y}_2 + iy_2 = 0,$$

dont la solution est

$$y_2(\theta) = y_2^0 e^{-i\theta}, \quad (39)$$

où y_2^0 est un complexe. On cherche une solution particulière de (35b) sous la forme

$$y_2(\theta) = \mu \theta e^{-i\theta},$$

où μ est un complexe ; on trouve

$$y_2(\theta) = -\frac{R\lambda}{2} \theta e^{-i\theta}. \quad (40)$$

En sommant (39) et (40) :

$$y_2(\theta) = y_2^0 e^{-i\theta} - \frac{R\lambda}{2} \theta e^{-i\theta}. \quad (41)$$

De même, pour (35c), on obtient

$$y_3(\theta) = y_3^0 e^{i\theta} + \frac{R\lambda}{2} \theta e^{i\theta}. \quad (42)$$

- Grâce aux conditions (33), on détermine chacun des trois complexes y_1^0 , y_2^0 et y_3^0 . Après calculs, on a

$$\begin{aligned} y_1(\theta) &= R^2 \lambda (\sin \theta - 1), \\ y_2(\theta) &= \left(\frac{R\lambda\pi}{4} - \frac{f}{2} \right) e^{-i\theta} - \frac{R\lambda}{2} \theta e^{-i\theta}, \\ y_3(\theta) &= -\left(\frac{R\lambda\pi}{4} - \frac{f}{2} \right) e^{i\theta} + \frac{R\lambda}{2} \theta e^{i\theta}. \end{aligned}$$

- Le vecteur Y est alors connu et on revient à X en utilisant de nouveau (31) sous la forme

$$X(\theta) = PY(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & R & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\theta) \\ y_2(\theta) \\ y_3(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(y_2(\theta) + y_3(\theta)) \\ y_3(\theta) - y_2(\theta) \\ y_1(\theta) + R(y_2(\theta) - y_3(\theta)) \end{pmatrix}.$$

On remplace $e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ par $2i \sin \theta$ et $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ par $2 \cos \theta$ et on obtient

$$y_2(\theta) + y_3(\theta) = \left(f - \frac{R\lambda\pi}{2} \right) i \sin \theta + R\lambda i \theta \sin \theta,$$

et

$$y_2(\theta) - y_3(\theta) = -\left(f - \frac{R\lambda\pi}{2} \right) \cos \theta - R\lambda \theta \cos \theta.$$

Bref⁶, on a, compte tenu de (22)

$$T(\theta) = -R\lambda\theta \sin \theta + \left(\frac{R\lambda\pi}{2} - f \right) \sin \theta,$$

$$N(\theta) = \left(f - \frac{R\lambda\pi}{2} \right) \cos \theta + R\lambda\theta \cos \theta,$$

$$M(\theta) = R^2\lambda(\sin \theta - 1) + R \left(\left(\frac{R\lambda\pi}{2} - f \right) \cos \theta - R\lambda\theta \cos \theta \right),$$

dont on vérifie que c'est bien équivalent à (11), (12) et (10).

Correction de l'exercice 3.

Une façon de résoudre l'exercice est présentée dans ce corrigé. Naturellement, cette façon de faire n'est pas unique (notamment pour le calcul du déterminant) et d'autres présentations peuvent être envisagées.

- (a) En notant X_A , Y_A et Y_C les trois réactions d'appui, on obtient les trois équations suivantes, qui proviennent de l'équilibre de la structure :

$$\begin{aligned} X_A - F &= 0, \\ Y_A + Y_C - kv_B &= 0, \\ -2lY_A - lF_B &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne, grâce à

$$F_B = -kv_B, \tag{43}$$

les trois réactions d'appui :

$$X_A = F, \tag{44}$$

$$Y_A = \frac{kv_B}{2}, \tag{45}$$

$$Y_C = \frac{kv_B}{2}. \tag{46}$$

- (b) La force $F_B = -kv_B$ due au ressort est aussi une réaction d'appui. Par conséquent, il existe quatre réactions d'appui et

Le problème est hyperstatique (de degré 1).

Remarque 3. En fait, les notions d'hypo-, d'iso- et d'hyperstaticité n'ont plus lieu d'être en flambement. En effet, en théorie du flambement, la flèche n'est pas déterminable puisque l'équilibre est indifférent et l'équilibre seul ne permet donc pas de déterminer les réactions d'appuis.

⁶On se retrouve tout naturellement dans \mathbb{R} .

2. Le moment fléchissant est défini par

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, l], \quad M(x) &= -Fv(x) + Y_C(l - x), \\ \forall x \in [-l, 0], \quad M(x) &= -Fv(x) + kv_Bx + Y_C(l - x).\end{aligned}$$

Grâce à (43) et (46), on en déduit

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad M(x) = -Fv(x) + \frac{kv_B}{2}(l - x),} \quad (47a)$$

$$\boxed{\forall x \in [-l, 0], \quad M(x) = -Fv(x) + \frac{kv_B}{2}(l + x).} \quad (47b)$$

3. (a) Dans toute la poutre, nous avons $v''(x) = M/EI$. Grâce à (47), on obtient donc

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad v''(x) + \omega^2v(x) = \frac{kv_B}{2EI}(l - x),} \quad (48a)$$

$$\boxed{\forall x \in [-l, 0], \quad v''(x) + \omega^2v(x) = \frac{kv_B}{2EI}(l + x),} \quad (48b)$$

où

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{F}{EI}}.} \quad (49)$$

(b) Comme dans le cours, on intègre ces équations différentielles et on obtient

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad v(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) + \frac{kv_B}{2F}(l - x),} \quad (50a)$$

$$\boxed{\forall x \in [-l, 0], \quad v(x) = C \cos(\omega x) + D \sin(\omega x) + \frac{kv_B}{2F}(l + x),} \quad (50b)$$

où A , B , C et D sont des constantes d'intégrations.

4. (a) Le système de conditions aux limites est

$$\begin{aligned}v(l) &= 0, \\ v(-l) &= 0, \\ v(0^-) &= v(0^+), \\ v'(0^-) &= v'(0^+).\end{aligned}$$

On n'oubliera pas la condition qui lie v_B aux autres inconnues :

$$v_B = v(0).$$

On obtient cinq équations relatives aux cinq inconnues A , B , C et D et v_B qui permettraient de déterminer la flèche v , grâce à (50).

En utilisant (50), on aboutit au système

$$\boxed{cA + sB = 0,} \quad (51a)$$

$$\boxed{cC - sD = 0,} \quad (51b)$$

$$\boxed{A - C = 0,} \quad (51c)$$

$$\boxed{B - D - \frac{k}{F\omega}v_B = 0,} \quad (51d)$$

$$\boxed{A - v_B = 0,} \quad (51e)$$

où l'on a posé

$$c = \cos(\omega l), \quad s = \sin(\omega l).$$

- (b) Le flambement aura lieu si ce système admet une solution non nulle ; en effet, dans ce cas, une solution non nulle maintient le système à l'équilibre, qui est donc indifférent, soit encore : le flambement a lieu si la matrice associée au système linéaire (51) en (A, B, C, D, v_b) est non inversible.

Remarque 4. On peut préciser la condition qui porte sur le flambement : en effet, on peut calculer le déterminant de la matrice de taille 5 associée au système linéaire ; mais, ici, on a plutôt intérêt à d'abord éliminer quelques variables afin de réduire la taille du système. D'après les équations (51c) et (51e), on peut éliminer les inconnues C et v_B afin de ne conserver que (A, B, D) . On écrit donc les trois nouvelles équations :

$$\boxed{cA + sB = 0,} \quad (52a)$$

$$\boxed{cA - sD = 0,} \quad (52b)$$

$$\boxed{-\frac{k}{F\omega}A + B - D = 0.} \quad (52c)$$

Le flambement aura donc lieu si et seulement si :

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ c & 0 & -s \\ -\frac{k}{F\omega} & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0.} \quad (53)$$

5. (a) Pour $k = 0$, (53) fournit

$$\det \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ c & 0 & -s \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0,$$

soit encore

$$2 \sin(\omega l) \cos(\omega l) = 0, \quad (54)$$

soit encore

$$\sin(2\omega l) = 0. \quad (55)$$

La charge critique fondamentale correspond à $2\omega l = \pi$, ce qui correspond à

$$\boxed{F_c = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}}, \quad (56)$$

ce qui est bien la charge critique (fondamentale) du flambement d'Euler.

Remarque 5. Il n'était pas indispensable de faire la simplification (54)-(55). En effet, à partir de (54), on exprime que le flambement a lieu si et seulement si $\sin(\omega l) = 0$ ou $\cos(\omega l) = 0$, c'est-à-dire $\omega l = n\pi$ où n appartient à \mathbb{N}^* ou $\omega l = (2p + 1)\pi/2$ où p appartient à \mathbb{N}^* , soit encore, en réunissant les deux types de solutions, $\omega l = q\pi/2$ où q appartient à \mathbb{N}^* . La plus petite solution correspond bien à (56).

- (b) Quand k tend vers l'infini, le point B n'a aucun déplacement vertical possible et se comporte comme une rotule. On devrait donc retrouver la structure étudiée dans l'exercice 5.1 du TD 5.

En effet, on a, pour k fini,

$$\det \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ c & 0 & -s \\ -\frac{k}{F\omega} & 1 & -1 \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ c & 0 & -s \\ -\frac{1}{F\omega} & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \end{pmatrix}.$$

On a donc, pour tout k ,

$$\det \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ c & 0 & -s \\ -\frac{1}{F\omega} & \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui donne, pour k tendant vers l'infini :

$$\det \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ c & 0 & -s \\ -\frac{1}{F\omega} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

soit encore

$$\sin(\omega l) = 0.$$

La charge critique fondamentale vaut donc :

$$\boxed{F_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}},$$

ce qui est bien le résultat de l'exercice l'exercice 5.1 du TD 5 (à condition de remplacer l par $l/2$ dans la formule de la première charge critique de l'exercice de TD).

Correction de l'exercice 4.

L'état de contrainte dû à la torsion libre est étudié dans le chapitre 1 du cours (voir section 1.4.4 page 29).

1. En coordonnées polaires, S est décrit par $r \in [O, R]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ et $dS = r ds d\theta$; on a donc

$$J_\rho = \iint_S r^2 dS = \iint_{r \in [O, R], \theta \in [0, 2\pi]} r^3 dr d\theta = \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta,$$

et donc

$$\boxed{J_\rho = \frac{\pi R^4}{2}}. \quad (57)$$

Remarque 6. Compte tenu de

$$t(r) = \frac{rM_t}{J_\rho},$$

et de (57), on a

$$\boxed{t(R) = \frac{2M_t}{\pi R^3}}. \quad (58)$$

2. Vu la forme du tenseur des contraintes

$$\boxed{[\sigma(r)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t(r) \\ 0 & 0 & 0 \\ t(r) & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad (59)$$

la suite est très proche de la section 6.6.3 page 122 du chapitre 6 du cours. Par blocs, on a de façon immédiate :

$$\boxed{\chi(X) = -X(X^2 - t^2(r))}. \quad (60)$$

Les racines de ce polynôme sont 0 et $\pm t(r)$ et donc les trois contraintes principales⁷ sont égales à

$$\boxed{\sigma_1(r) = -t(r), \quad \sigma_2(r) = 0, \quad \sigma_3(r) = t(r)}. \quad (61)$$

On retrouve l'équation (6.58) page 123 du polycopié de cours.

3. (a) Grâce à (58) et (61), on a numériquement en prenant la plus grande valeur (atteinte pour $r = R$)

$$\boxed{\sigma_1(R) \approx -20 \text{ Mpa}, \quad \sigma_2(R) = 0 \text{ Mpa}, \quad \sigma_3(R) \approx 20 \text{ Mpa}}. \quad (62)$$

(b) Les trois cercle de Mohr passent par les points d'abscisses $\pm t(R)$ et 0. On obtient donc la figure 1.

(c) Comme dans la section 6.6.3 page 122 du chapitre 6 du cours, en utilisant (6.13) page 108, la contrainte équivalente de Tresca est égale à :

$$\sigma_{\text{eq}}^T(\sigma_1(R), \sigma_2(R), \sigma_3(R)) = \max_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} |\sigma_i(R) - \sigma_j(R)| = \max(|2t(R)|, |t(R)|),$$

soit, grâce à (58),

$$\boxed{\sigma_{\text{eq}}^T(\sigma_1(R), \sigma_2(R), \sigma_3(R)) = \frac{4M_t}{\pi R^3}}, \quad (63)$$

et numériquement

$$\boxed{\sigma_{\text{eq}}^T(\sigma_1(R), \sigma_2(R), \sigma_3(R)) \approx 40 \text{ Mpa} > 21 \text{ Mpa}}. \quad (64)$$

⁷qui sont les valeurs principales de $[\sigma]$ c'est-à-dire les racines de son polynôme caractéristique.

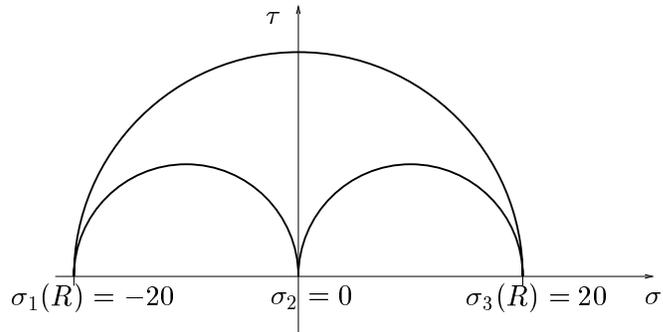


FIG. 1 – Le tricercele de Mohr

Selon le critère de Tresca, il y a donc entrée en plasticité.

Comme dans la section 6.6.3 page 122 du chapitre 6 du cours, en utilisant (6.28) page 113, la contrainte équivalente de Von Mises est égale à :

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{3} |t(R)|,$$

soit, grâce à (58),

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM}(\sigma_1(R), \sigma_2(R), \sigma_3(R)) = \frac{2\sqrt{3}M_t}{\pi R^3}, \quad (65)$$

et numériquement

$$\sigma_{\text{eq}}^{VM}(\sigma_1(R), \sigma_2(R), \sigma_3(R)) \approx 34 \text{ Mpa} > 21 \text{ Mpa}. \quad (66)$$

Selon le critère de Von Mises, il y a donc entrée en plasticité.