MQ41 Printemps 2002

# Examen médian du 16 Mai 2002

Durée : deux heure(s)

Aucun document - Calculatrice interdite.

**On rédigera les exercices 1 et 2 sur une copie (ou plus) et l'exercice 3 sur une autre.**

**Exercice 1** (1.5 points)**.** *Questions de cours*
Répondre à chaque question en une phrase.
1°) À quoi sert le théorème de la force virtuelle ?
2°) Citer le théorème de Clapeyron.
3°) Quelle est une conséquence immédiate du théorème de Maxwell-Betti sur la matrice d'influence, définie pour un solide élastique linéaire ?

**Exercice 2** (3.5 points)**.** *Étude d'une poutre circulaire*
Soit la structure autoéquilibrée représentée sur la figure 1

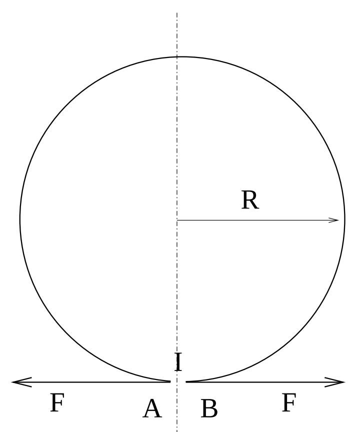


FIG. 1 – Une poutre circulaire

On suppose que cet anneau est ouvert en $I$ et chargé par deux forces d'intensité $F$ et opposées. Cet anneau forme un cercle (par clarté, sur la figure, on a supposé $A$ et $B$ distincts, alors qu'ils sont confondus). On supposera $E$ et $I$ constants dans la structure. On ne considérera que les effets du moment fléchissant ; on rappelle l'expression de l'énergie de déformation :

$$W = \frac{1}{2}\int_{\text{structure}} \frac{M^2}{EI}\,ds.$$

Calculer l'ouverture $AB$, par une méthode énergétique.

**Exercice 3** (15 points). ***Étude d'une structure par méthode énergétique***
On considère la structure de la figure 2.

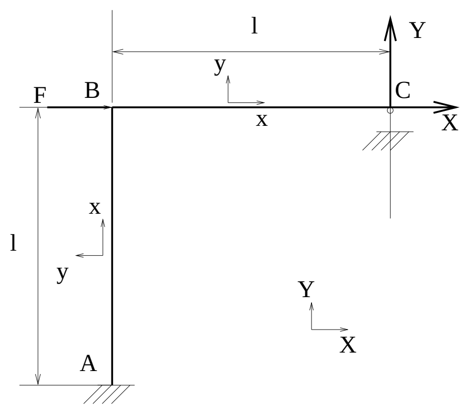


FIG. 2 – La structure étudiée

Cette structure est soumise au point $B$ à la force $F$ (choisie positive), est encastrée en $A$ et est articulée en $C$. Les repères locaux $(x,y)$ et globaux $(X,Y)$ sont choisis comme sur la figure 2. Dans tout cet exercice, on supposera que les données géométriques et mécaniques ($E$, $I$, $S$, $G$ ...) sont constantes dans toute la structure.
Dans cet exercice, on étudie cette structure en négligeant ou non certains efforts et on étudie la légitimité de ces approximations.
1°)

a) Quel est le degré d'hyperstaticité de cette structure ?

b) Pourquoi peut on choisir $X$ et $Y$, les réactions d'appui en $C$, comme inconnues hyperstatiques ?

2°) Calculer les efforts de la RDM dans cette structure.
3°) On rappelle l'expression de l'énergie de déformation emmagasinée par la structure (avec les notations usuelles) :

$$W = \frac{1}{2}\int_{\text{structure}} \frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS_1}\,ds. \tag{1}$$

**Dans toute cette question, on suppose que l'on néglige les effets des efforts normaux et tranchants par rapport aux effets du moment fléchissant.**

a) Montrer que l'énergie de déformation emmagasinée par la structure est égale à

$$W = \frac{l^3}{6EI}\left(4Y^2 - 3(F+X)Y + (F+X)^2\right). \tag{2}$$

b) En déduire $X$ et $Y$, puis les réactions d'appui en $A$, notées $X_A$, $Y_A$ et $\Gamma_A$.

c) Calculer le déplacement horizontal de $B$, noté $x_B$.

d) Calculer le déplacement vertical et la rotation de $B$, notés $y_B$ et $\omega_B$.

e) En déduire la déformée de la structure. Cela vous paraît il correct ? Que pensez vous des valeurs des réactions d'appuis $X_A$, $Y_A$ et $\Gamma_A$ ? Justifiez qualitativement ces résultats en fonction de l'approximation faite.

4°) Il faudrait, pour être complet, aussi considérer l'effet des efforts tranchants et normaux. **Pour simplifier, et pour toute la suite de cet exercice, on prend en compte désormais les effets des efforts normaux et du moment fléchissant, mais pas de l'effort tranchant.**

a) Montrer que l'énergie de déformation emmagasinée par la structure est égale à

$$W = \frac{l^3}{6EI}\left(4Y^2 - 3(F+X)Y + (F+X)^2\right) + \frac{lX^2}{2ES} + \frac{lY^2}{2ES}. \tag{3}$$

b) En déduire le système matriciel donnant les inconnues $X$ et $Y$ en fonction de $F$. On pourra utiliser les paramètre adimensionnels $\alpha$ et $\Delta_\alpha$ définis par

$$\alpha = \frac{3I}{4l^2S}, \tag{4}$$

$$\Delta_\alpha = 64\alpha^2 + 80\alpha + 7. \tag{5}$$

c) On remarque que $\Delta_\alpha > 0$ et on donne l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2(1+4\alpha) & -3 \\ -3 & 8(1+\alpha) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta_\alpha}\begin{pmatrix} 8(1+\alpha) & 3 \\ 3 & 2(1+4\alpha) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

En déduire les expressions de $X$ et de $Y$.

d) En déduire les réactions d'appui en $A$, $X_A$, $Y_A$ et $\Gamma_A$.

e) Calculer le déplacement horizontal de $B$, $x_B$.

5°) Comment peut on retrouver les résultats de la question trois ?

6°) *Question facultative*

a) Comment traduire que la contribution de l'effort normal est faible devant celle du moment fléchissant , mais non nulle. On pourra exprimer cette condition $\mathcal{C}$ en fonction de $\alpha$.

b) Sous cette condition $\mathcal{C}$, exprimer, de façon plus simple, les réactions d'appuis $X$, $Y$, $X_A$, $Y_A$ et $\Gamma_A$ ainsi que $x_B$, en faisant un développement limité au premier ordre en $\alpha$.

On rappelle le développement limité suivant, pour $\alpha$ tendant vers zéro :

$$(1+\alpha)^{-1} = 1 - \alpha + o(\alpha).$$

c) Tracer, en la justifiant de façon qualitative, la déformée de la structure.

d) Si la section est rectangulaire (cf. figure 3 page 4), de largeur $b$ et de longueur $h$, montrer que

$$I = I_y = \frac{bh^3}{12}.$$

En déduire l'expression du paramètre $\alpha$, défini par (4).

Est-il raisonnable de supposer

$$\alpha \ll 1\,?$$

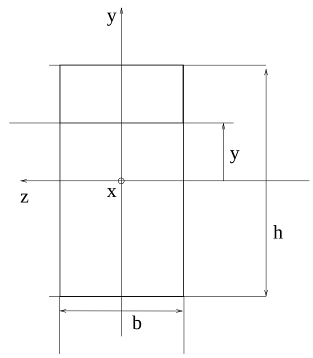


FIG. 3 – Une section rectangulaire