MQ41 Automne 2001

Examen médian du 16 novembre 2001

Durée : deux heure(s)

Aucun document - Calculatrice interdite.

On rédigera les trois exercices sur trois copies différentes.

Exercice 1 (3 points). *Questions de cours*
Répondre à chaque question en une phrase.
1°) Quelle est la charge critique de flambement pour une poutre encastrée à une extrémité, articulée à une autre et soumise à un effort normal ?
2°) Pour une poutre soumise à un effort normal et avec des conditions aux limites quelconques, à quoi correspond la longueur libre de flambement ?
3°) À quoi sert le théorème de Ménabréa ?

Exercice 2 (10 points). *Flambement d'une poutre soumise à un effort normal et un effort tranchant*
Soit une poutre AB élastique, de module constant d'Young E, de moment quadratique constant I et de longueur L (voir figure 1). Cette poutre est encastrée à son extrémité A et soumise en son extrémité B à une force dont les composantes verticale et horizontale sont notées P et Q, qui sont des nombres positifs.

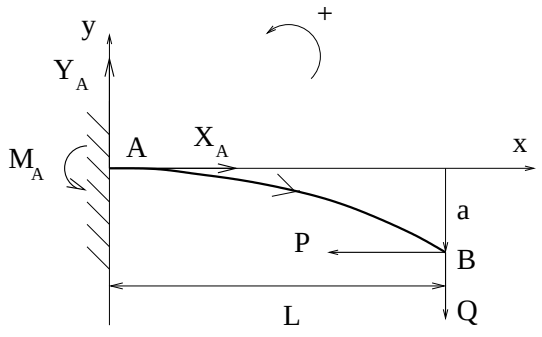

Fig. 1 – Étude du flambement d'une poutre

1°) Quel est le degré d'hyperstaticité de la structure étudiée ?
2°) Montrer qu'en un point d'abscisse x, le moment fléchissant est égal à

$$M(x) = Qx - Py - QL + Pa, \tag{1}$$

où y est la flèche en ce point et a est la flèche en $x = L$. La poutre est orientée comme sur la figure 1 et les flèches y et a sont définies par rapport au repère (x, y) (ainsi, sur la figure 1, a et y sont négatifs).
3°) En déduire que l'équation différentielle gouvernant la déformée de la poutre s'écrit

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = \omega^2 \left(\frac{Q}{P} x - \frac{Q}{P} L + a \right), \tag{2}$$

où

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

4°) Montrer qu'il existe deux réels A et B tels que la solution de (2) soit

$$y(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x) + \frac{Q}{P} x - \frac{Q}{P} L + a.$$

5°) En déduire, en utilisant les conditions aux limites en $x = 0$, que

$$y(x) = \frac{Pa - QL}{P} \big(1 - \cos(\omega x)\big) - \frac{Q}{P\omega} \sin(\omega x) + \frac{Q}{P} x. \tag{3}$$

6°) On donne la charge critique de flambement :

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}. \tag{4}$$

Montrer que

$$\omega L = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_c}},$$

et en déduire que si $P < P_c$, alors $\omega L < \pi/2$.
7°) Calculer le moment d'encastrement M_A en A.
8°) En déduire que, si $P < P_c$, alors

$$\frac{M_A}{QL} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_c}}\right)}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_c}}}.$$

9°) Que représente le terme QL ?
10°) Que se passe-t-il si $P \to P_c$?
11°) *question facultative :* Montrer, en faisant $P \to 0$ dans (3), que, pour tout $x \in [0, L]$, $y(x) \to y_0(x)$ où

$$y_0(x) = \frac{Qx^3}{6EI} - \frac{QLx^2}{2EI}.$$

On pourra observer que $P \to 0$ entraine $\omega \to 0$ et faire un développement limité du sinus et du cosinus à l'ordre trois dans (3).

Cette déformée y_0 correspond en fait à une poutre encastrée et chargée par une force de bout Q (cf. figure 2 page 3).

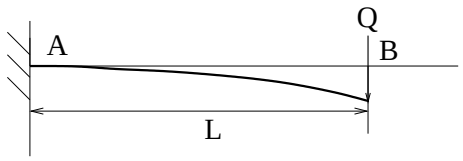

FIG. 2 – Poutre encastrée

Exercice 3 (7 points). *Méthodes énergétiques*
On considère une structure élastique, de module constant d'Young E et de moment quadratique constant I (voir figure 3). Chacune des travées AB, BC et CD est de longueur L et est orientée localement comme indiqué sur la figure 3. Cette structure est soumise au point A à une force ponctuelle d'intensité F, nombre positif.
Les axes globaux sont notés (X, Y) et sont indiqués sur la figure 3.

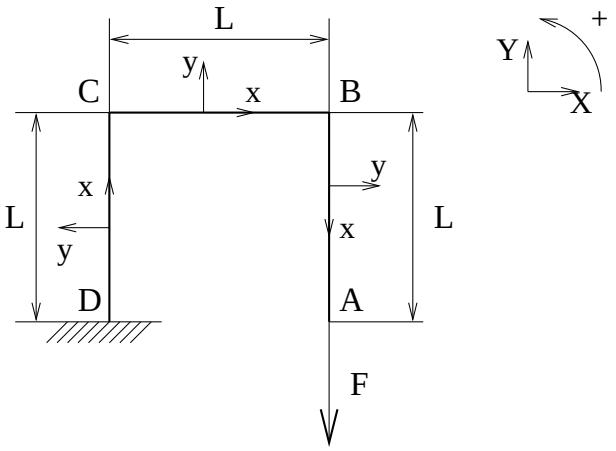

FIG. 3 – Étude d'une structure élastique

1°) Cette structure est elle isostatique ?
2°) Calculer les réactions d'appuis en D.
3°) Calculer les efforts de la RDM, N, T et M dans la structure.
4°) En négligeant les contributions des efforts normaux et tranchants, calculer la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à F dans toute la structure.

On rappelle que, avec les approximations faites :

$$W = \int_{\text{structure}} \frac{M^2}{2EI} ds$$

5°) La connaissance des réactions d'appuis en D était elle indispensable ?
6°) Calculer le déplacement vertical du point A.
7°) Comment pourrait-on déterminer le déplacement horizontal du point A ? On ne fera pas le calcul mais on donnera seulement la méthode.

Barème de l'examen médian du 16 novembre 2001

Exercice 4 (3 points).
1°) 1 pt
2°) 1 pt
3°) 1 pt

Exercice 5 (10+2 points).
1°) 0.5 pt
2°) 1 pt
3°) 1 pt
4°) 1 pt
5°) 1 pt
6°) 1 pt
7°) 1.5 pt
8°) 1 pt
9°) 1 pt
10°) 1 pt
11°) 2 pt (bonus)

Exercice 6 (7 points).
1°) 0.5 pt
2°) 1 pt
3°) 2 pt
4°) 2 pt
5°) 0.5 pt
6°) 0.5 pt
7°) 0.5 pt

total = 20 points + 2 points de bonus