MQ41 Automne 2002

Examen médian du 14 Novembre 2002

Durée : deux heures

Aucun document - Calculatrice interdite.

On rédigera les exercices 1 et 2 sur une copie (ou plus) et l'exercice 3 sur une autre.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Répondre à chaque question en une phrase.
1°) Dans un milieu continu, à quoi correspond, en un point donné, la contrainte σ_{xx} ?
2°) Quelles sont les deux principales méthodes pour calculer des déplacements dans une structure isostatique ?
3°) Qu'est-ce qu'une structure hypostatique (aussi appelée mécanisme) ?

Exercice 2.
On considère la structure plane représentée sur la figure 1, soumise en C à la force F et au couple Γ, et encastrée en A. On suppose que les caractéristiques E et$I$ sont uniformes dans la structure.

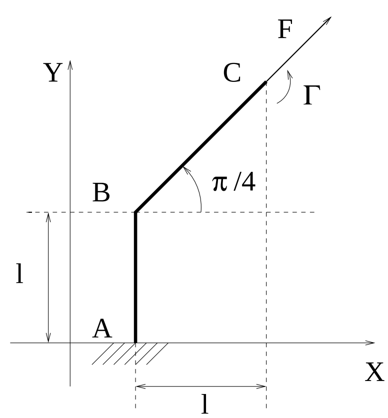

FIG. 1 – La structure étudiée

1°) Cette structure est-elle isostatique ?
2°) En précisant l'orientation de la poutre et l'origine choisies, déterminer les efforts de la RDM en tout point.

3°) Calculer l'énergie de déformation dans cette structure. On ne considérera que les effets dus au moment fléchissant. On rappelle que

$$W = \frac{1}{2EI}\int_{\text{structure}} M^2 dx.$$

4°) En déduire le déplacement du point C dans la direction de F ainsi que la rotation de la section liée au point C.

Exercice 3.

L'ensemble des figures de cet exercice est regroupé page 5.

On considère une structure circulaire plane représentée sur la figure 2. Pour l'instant, on ne s'intéresse pas aux conditions d'appui et on suppose que cette structure est en équilibre. En tout point courant $P(\theta)$, défini par l'angle θ, on définit les vecteurs polaires $u_r(\theta)$ et $u_\theta(\theta)$.

On oriente la poutre comme sur la figure 2. Pour tout θ, les efforts de la RDM en $P(\theta)$, représentent les actions de la partie amont sur la partie aval de la poutre. On note $N(\theta)$, $T(\theta)$ et $M(\theta)$, les composantes de cette action dans le repère[1] local $(u_r(\theta), u_\theta(\theta), z)$; voir figure 3.

1°) Étude de l'équilibre local.

On pourra admettre les résultats démontrés dans cette question et traiter directement la question 2.

a) Montrer que :

$$\frac{du_r(\theta)}{d\theta} = u_\theta(\theta), \tag{1}$$

$$\frac{du_\theta(\theta)}{d\theta} = -u_r(\theta). \tag{2}$$

b) On suppose que cette poutre circulaire est soumise, outre des forces ponctuelles, à une densité radiale de force $p(\theta)$ (qui dépend de θ).

On étudie maintenant la portion de poutre comprise entre les points $P(\theta)$ et $P(\theta + d\theta)$, où $d\theta$ est un angle infiniment petit (voir figure 4). On suppose que cette portion de poutre n'est pas soumise à des forces ponctuelles extérieures. Montrer que l'équilibre de cette portion de poutre implique

$$\begin{aligned}&\Big(-T(\theta)u_r(\theta) + T(\theta + d\theta)u_r(\theta + d\theta)\Big)\\ &\qquad + \Big(-N(\theta)u_\theta(\theta) + N(\theta + d\theta)u_\theta(\theta + d\theta)\Big) + Rd\theta p(\theta)u_r(\theta) = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

c) On ne conserve dans (3), que les infiniment petits du premier ordre en θ, c'est-à-dire, pour une fonction scalaire ou vectorielle $f(\theta)$:

$$f(\theta + d\theta) = f(\theta) + \frac{df}{d\theta}d\theta. \tag{4}$$

Montrer qu'avec l'écriture (4), (3) s'écrit, en ne conservant que les termes du premier ordre en $d\theta$:

$$\frac{dT}{d\theta} - N(\theta) + Rp(\theta) = 0, \tag{5a}$$

$$T(\theta) + \frac{dN}{d\theta} = 0. \tag{5b}$$

[1] Attention, cette convention n'est pas tout à fait celle du cours pour les poutres planes ; avec les conventions générales, $T(\theta)$ serait porté par $-u_\theta(\theta)$. Cela ne devrait pas produire de gêne, puisque toute les équations utiles seront démontrées ici.

On admettra que la nullité des moments s'écrit

$$\frac{dM}{d\theta} - RT(\theta) = 0. \tag{5c}$$

d) Quel est l'avantage des équations (5) ?

2°) On étudie maintenant la structure autoéquilibrée de la figure (5). Cette structure ne repose pas sur des appuis et n'est soumise qu'à une densité linéaire de force radiale $p(\theta) = p_0$ ($p_0 > 0$) uniforme. On suppose que les caractéristiques mécaniques de la structure sont uniformes.
Les angles θ seront repérés par rapport au point A.

a) Pourquoi les efforts de la RDM, $N(\theta)$ $T(\theta)$ et $M(\theta)$ sont-ils indépendants de θ ?

b) Déduire des équations (5) que, pour tout θ,

$$T(\theta) = T_0 = 0, \tag{6}$$

$$N(\theta) = N_0 = pR. \tag{7}$$

Que pensez-vous du signe de N_0 ?
La valeur de M_0 peut-elle être déterminée directement ?

3°) On introduit dans la structure de la figure 5, une coupure au point A : de chaque coté de la coupure, on suppose maintenant que la structure repose sur deux appuis A_+ et A_- qui exercent sur la structure les réactions respectivement égales

$$X = -N_0, \quad Y = -T_0 = 0, \quad \Gamma = -M_0, \tag{8}$$

et à

$$-X = N_0, \quad -Y = T_0 = 0, \quad -\Gamma = M_0.$$

Voir figure 6.

a)

Pour cette nouvelle structure, montrer que l'effort de la RDM, $N(\theta)$ en tout point vérifie

$$N(\theta) = pR(1 - \cos\theta) - X\cos\theta. \tag{9}$$

b) En utilisant (5), en déduire

$$T(\theta) = -pR\sin\theta - X\sin\theta, \tag{10}$$

$$M(\theta) = pR^2(\cos\theta - 1) + RX(\cos\theta - 1) - \Gamma. \tag{11}$$

c) Pourquoi peut-on écrire

$$\frac{\partial W}{\partial \Gamma} = 0 \text{ ?} \tag{12}$$

En déduire, selon (8), la valeur de M_0. On prendra dans l'expression de l'énergie de déformation, l'influence des trois efforts de la RDM :

$$W = \frac{1}{2EI}\int_0^{2\pi} M^2 R d\theta + \frac{1}{2ES}\int_0^{2\pi} N^2 R d\theta + \frac{1}{2GS}\int_0^{2\pi} T^2 R d\theta.$$

4°) Question facultative

a) En assimilant la partie de la poutre circulaire de la figure 5 comprise entre $P(\theta)$ et $P(\theta + d\theta)$, à un segment infinitésimal de poutre rectiligne, montrer que sa variation élémentaire de longueur est égale à

$$d\lambda = \frac{pR^2}{ES} d\theta. \tag{13}$$

b) En déduire la variation de longueur totale puis la variation de rayon de la structure.

Ensemble des figures de l'exercice 3

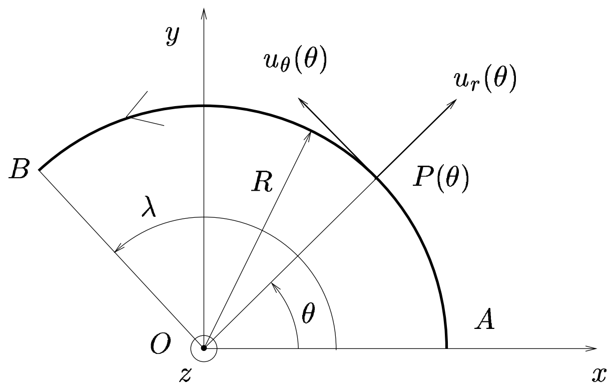

FIG. 2 – La structure circulaire étudiée

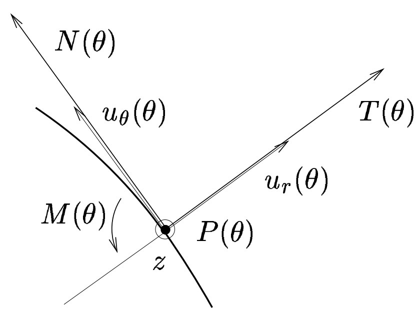

FIG. 3 – les efforts de la RDM : $N(\theta)$, $T(\theta)$ et $M(\theta)$

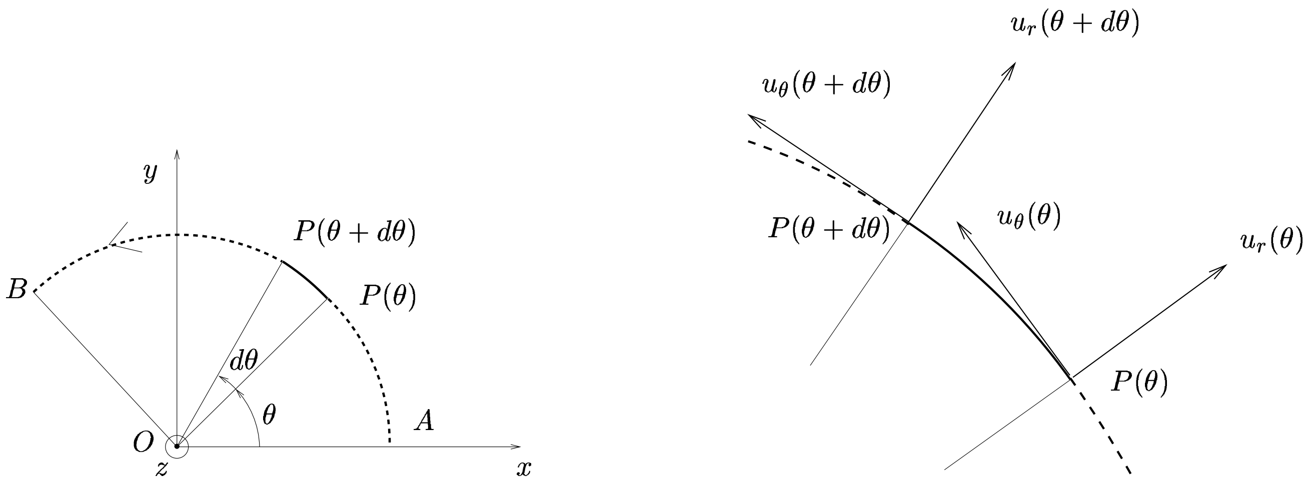

FIG. 4 – Une portion de poutre comprise entre $P(\theta)$ et $P(\theta + d\theta)$.

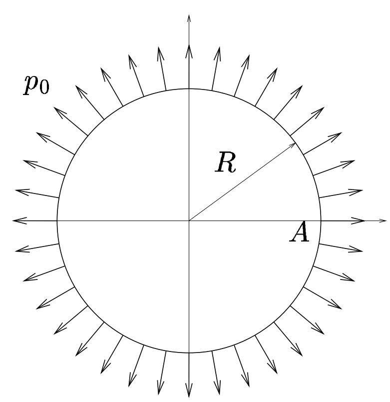

FIG. 5 – La structure circulaire autoéquilibrée

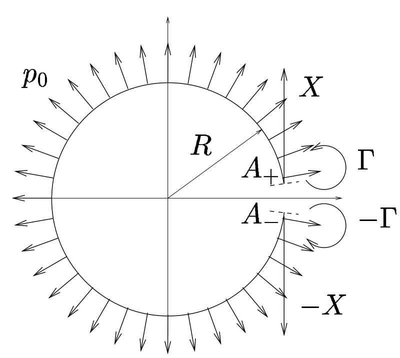

FIG. 6 – La structure circulaire autoéquilibrée avec une coupure interne.