MQ41 Printemps 2004

Examen médian du 6 Mai 2004

Durée : 2 heure(s)

Aucun document - **Calculatrice interdite**.

On rendra une copie (au moins et même blanche) pour les exercices 1 et 2 et une copie (au moins et même blanche) pour l'exercice 3.

Exercice 1 (1.5 points). *Question de cours*
Répondre à chaque question en une phrase.

1. Écrire la formes des trois relations d'équilibre local d'une poutre plane rectiligne. On ne demande pas de les savoir par cœur, mais de connaître leur forme.
2. En RDM linéaire, de quelles hypothèses provient l'assimilation de la configuration déformée à la configuration au repos ?
3. Quelles sont les relations de Clapeyron ?

Exercice 2 (8,5 points). *Cercle de Mohr*
On se place dans un état de contraintes planes et on supposera que les contraintes principales σ_1 et σ_2 vérifient

$$\sigma_2 \leq \sigma_1. \tag{1}$$

On suppose que l'on connaît s_1, s_2 et s_3 trois contraintes normales dans trois directions définies comme sur la figure 1 page suivante : cela correspond à la mesure d'une rosette «à 120 degrés» dont les angles vérifient :

$$(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}) = \frac{2\pi}{3} \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}}) = \frac{2\pi}{3}. \tag{2}$$

Ne connaissant pas l'angle θ, on cherche les contraintes et les directions principales.

1. (a) Tracer le cercle de Mohr correspondant à l'état de contrainte plan étudié et représenter sur ce cercle les trois points M_1, M_2 et M_3 représentatifs des états des contraintes des facettes dirigées par $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, et $\overrightarrow{n_3}$.

   (b) Montrer que le centre Ω du cercle de Mohr est le centre de gravité de (M_1, M_2, M_3) et en déduire que

$$x_\Omega = \frac{1}{3}\left(s_1 + s_2 + s_3\right). \tag{3}$$

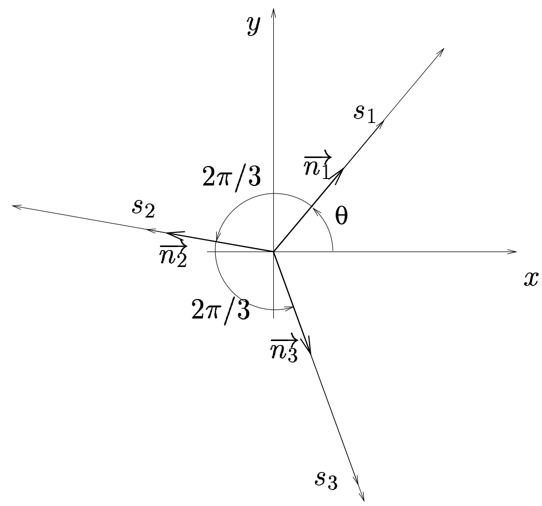

FIG. 1 – Trois mesures de contraintes normales

(c) Montrer que r, la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ envoie le point M_1 sur M_2. On appelle $\mathcal{D}_1$ la droite perpendiculaire à l'axe des x, passant un point d'abscisse s_1 et $\mathcal{D}_2$ la droite perpendiculaire à l'axe des x, passant un point d'abscisse s_2. Montrer que M_2 est l'intersection de $\mathcal{D}_2$ et de $r(\mathcal{D}_1)$, l'image[1] de la droite $\mathcal{D}_1$ par la rotation r.

(d) Expliquer comment tracer ensuite le cercle de Mohr à partir des données s_1, s_2 et s_3.

2. **applications**

(a) On donne (en Mpa)

$$s_1 = 6,$$
$$s_2 = 2,02$$
$$s_3 = 5,48$$

Tracer sur une figure, les points d'abscisse s_1, s_2 et s_3 et d'ordonnées nulles et en déduire, d'après les questions 1b, 1c et 1d le tracé du cercle de Mohr.

(b) Tracer sur la même figure les valeurs de σ_1 et σ_2 et l'angle θ.

3. **question facultative**

(a) On rappelle que la contrainte normale dans la direction θ vaut

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta. \tag{4}$$

[1]On fait le rappel suivant : soit r la rotation de centre α et de centre Ω. La rotation d'une droite D est l'ensemble des images des points de cette droite par la rotation r. C'est une droite qui fait un angle α avec D. On la trace donc
- soit en prenant la droite qui passe par $r(M_1)$ et $r(M_2)$ où M_1 et M_2 sont deux points distincts de D ;
- soit en traçant la droite qui passe par $r(M_1)$ où M_1 est un point de D et formant un angle α avec D.

En déduire les trois relations

$$s_1 = x_\Omega + R\cos 2\theta, \tag{5a}$$

$$s_2 = x_\Omega + R\cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right), \tag{5b}$$

$$s_3 = x_\Omega + R\cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right), \tag{5c}$$

où

$$x_\Omega = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right), \tag{5d}$$

$$R = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right). \tag{5e}$$

(b) Retrouver, grâce à (5a), (5b) et (5c), la relation (3).

(c) Montrer que

$$R\cos(2\theta) = \frac{1}{3}\left(2s_1 - s_2 - s_3\right), \tag{6a}$$

$$R\sin(2\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(s_3 - s_2\right). \tag{6b}$$

Comment ces relations permettent-elles de déterminer R et θ ?

(d) Comment peut-on déterminer par le calcul σ_1 et σ_2 ?

Exercice 3 (10 points). *Méthodes énergétiques*

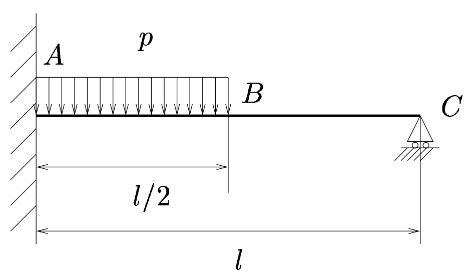

FIG. 2 – La poutre étudiée

On étudie la poutre représentée sur la figure 2. Celle-ci est encastrée en A, repose sur un appuis simple en C et est soumise à une densité de charge linéaire, constante et égale à p (dirigée vers le bas) sur la première moitié AB.

1. Lever l'hyperstaticité de cette structure. On montrera que

$$Y_C = \frac{7pl}{128}.$$

On ne prendra en compte que l'énergie due au moment fléchissant et supposera que E et I sont uniformes dans la poutre.

On rappelle que les théorèmes énergétiques vus en cours sont encore valables en présence de densités linéaires de charge.

2. Déterminer les autres réactions d'appuis de cette structure.