MQ41 Printemps 2002

Corrigé de l'examen médian du 16 Mai 2002

Correction de l'exercice 1. On renvoie au polycopié de cours.

Correction de l'exercice 2.
Il faut calculer en tout point de la structure le moment fléchissant, $M(\theta)$ (cf. figure 1), dans la configuration non déformée.

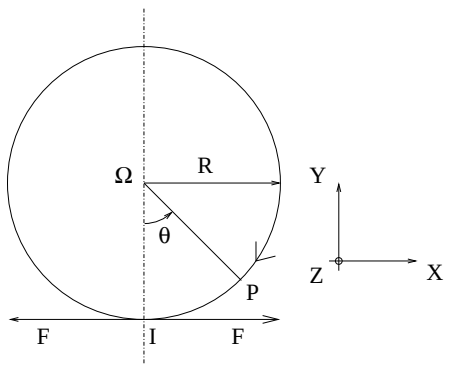

FIG. 1 – Une poutre circulaire : configuration non déformée

On oriente la poutre comme sur la figure. Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, la seule force de droite est la force F appliquée à droite. Par définition, on a (par rapport au repère global (X, Y, Z))

$$\overrightarrow{M}(\theta) = \overrightarrow{PI} \wedge \overrightarrow{F}.$$

Dans le système (X, Y, Z) (dirigé par le repère orthonormé direct $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}$), on a

$$\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{X},$$

et, pour $\theta \in [0, 2\pi[$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IP} &= \overrightarrow{I\Omega} + \overrightarrow{\Omega P},\\ &= R\overrightarrow{Y} + R\left(\sin\theta\overrightarrow{X} - \cos\theta\overrightarrow{Y}\right),\\ &= R\sin\theta\overrightarrow{X} + R(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{Y}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{M}(\theta) = FR(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{Z}.$$

On a donc,

$$\boxed{\forall\theta \in [0, 2\pi[, \quad M(\theta) = RF\,(1-\cos\theta)\,.}$$

Par dérivation sous le signe somme, on en déduit, si on ne prend en compte que les effets du moment fléchissant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial F} &= \frac{1}{EI}\int_0^{2\pi} M\frac{\partial M}{\partial F}\,ds,\\
&= \frac{1}{EI}\int_0^{2\pi} RF\,(1-\cos\theta)\times R\,(1-\cos\theta)\;ds,\\
&= \frac{1}{EI}\int_0^{2\pi} RF\,(1-\cos\theta)\times R\,(1-\cos\theta)\;Rd\theta,\\
&= \frac{R^3F}{EI}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta.
\end{aligned}$$

Après linéarisation, on a

$$\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1}{2}\left(1+\cos(2\theta)\right)\right)\,d\theta = 3\pi,$$

et donc

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial F} = \frac{3\pi R^3F}{EI}.} \tag{1}$$

Les deux forces d'intensité F et $-F$ ne sont pas indépendantes. Pour calculer le déplacement généralisé du point B, il faudrait les renommer F_1 (appliquée en B) et F_2 (appliquée en A), calculer d'après le théorème de Castigliano,

$$x_B = \lambda = \frac{\partial W}{\partial F_1},$$

puis faire $F_1 = F_2 = F$. On a alors l'expression de δ, l'ouverture en I (on rappelle que le théorème de castigliano fournit le déplacement du point B, dans un repère défini, qui ici est lié à A, que l'on peut considérer comme point d'appui)

$$\delta = x_B = \frac{\partial W}{\partial F_1}.$$

Puisque F_2 n'intervient pas dans W (force de gauche), on a donc

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial F}.$$

Soit, d'après (1),

$$\boxed{\delta = \frac{3\pi R^3F}{EI}.}$$

Remarque 1. Par symétrie de la figure, on peut supposer que la structure est encastrée au point D (cf. figure 2).

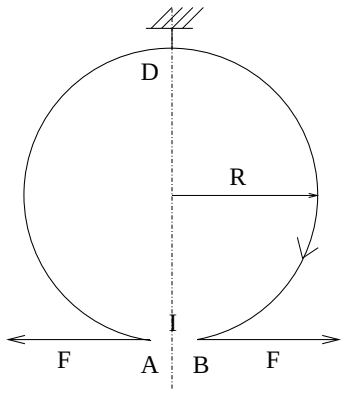

FIG. 2 – Une structure équivalente

On travaille alors sur la demi structure BD (pour laquelle les réactions en D sont des forces à gauche et seule F, appliquée en B intervient comme force extérieure). Pour cette structure, on a

$$\frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi} M\frac{\partial M}{\partial F}\,ds = \frac{3\pi R^3 F}{2EI}.$$

On a donc le déplacement du point B, par rapport à I, égal à

$$\widetilde{x}_B = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{3\pi R^3 F}{2EI}.$$

Par symétrie,

$$\delta = 2\widetilde{x}_B = \frac{3\pi R^3 F}{EI}.$$

Correction de l'exercice 3.

1°)

a) La structure plane étudiée a cinq réactions d'appui, X, Y (en C) et X_A, Y_A et Γ_A (en A) et le degré d'hyperstaticité est donc égal à $h = 5 - 3$, soit

$$\boxed{h = 2.} \tag{2}$$

b) Sur les cinq réactions d'appuis X, Y, X_A, Y_A et Γ_A, on peut en choisir arbitrairement deux d'entre elles. On choisit celles qui, avec l'orientation de la structure choisie, correspondent à l'extrémité «droite» de la structure, c'est-à-dire X et Y.

2°) Après calculs, il vient (pour chaque travée, l'origine est prise à l'origine de cette travée) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{sur } BC,\ (0 \le x \le l) & N = X, \\ & T = Y, \\ & M = Y(l-x), \\ & \\ \text{sur } AB,\ (0 \le x \le l) & N = Y, \\ & T = -(F+X), \\ & M = -(F+X)(l-x) + Yl. \end{array}} \tag{3}$$

3°)

a) En négligeant les effets des efforts normaux et tranchants et, puisque E et I sont constants, on a

$$W = \frac{1}{2}\int_{\text{structure}} \frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS_1}\,ds \approx \frac{1}{2EI}\int_{\text{structure}} M^2 dx,$$

c'est-à-dire, selon (3),

$$W = \frac{1}{2EI}\left(\int_0^l Y^2(l-x)^2 dx + \int_0^l \big(-(F+X)(l-x) + Yl\big)^2 dx\right).$$

Après calculs, on a

$$\boxed{W = \frac{l^3}{6EI}\left(4Y^2 - 3(F+X)Y + (F+X)^2\right).} \tag{4}$$

b) Les deux inconnues X et Y sont indépendantes ; d'après le théorème de Ménabréa, on a

$$\frac{\partial W}{\partial X} = 0 \text{ et } \frac{\partial W}{\partial Y} = 0,$$

ce qui fournit, de façon immédiate, les deux équations permettant de déterminer X et Y :

$$2X - 3Y = -2F, \tag{5}$$

$$-3X + 8Y = 3F. \tag{6}$$

On en déduit

$$\boxed{\begin{array}{l} X = -F, \\ Y = 0. \end{array}} \tag{7}$$

Remarque 2. Les égalités (5) et (6) se mettent sous la forme matricielle

$$A_0\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

où la matrice A_0 de taille 2 est définie par

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Conformément au cours, cette matrice est symétrique, définie positive. On peut le constater ici à la main car la trace et le déterminant de A_0 sont strictement positifs (ce qui équivalent, en dimension deux, au fait que valeurs propres de A_0 sont strictement positives).

Remarque 3. Attention, le fait qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique est définie positive est équivalent à $\det A > 0$ et trace $(A) > 0$ n'est valable que pour $n = 2$. Pour $n \geq 3$, cette condition n'est que nécessaire.

Par ailleurs, l'équilibre global fournit (résultante projetée sur les axes X et Y et moment calculé par rapport au point A) les trois équations suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = -X - F, \\ Y_A = -Y, \\ \Gamma_A = (F+X)l. \end{array}} \tag{8}$$

Selon (7), on a donc

$$\boxed{\begin{array}{l} X_A = 0, \\ Y_A = 0, \\ \Gamma_A = 0. \end{array}} \tag{9}$$

c) L'hyperstaticité de la structure ayant été levée, on peut maintenant calculer tous les déplacements en utilisant le théorème de Ménabréa. F est orienté vers la droite de la figure et donc

$$x_B = \lambda_B = \frac{\partial W}{\partial F}. \tag{10}$$

D'après (4), à X et Y fixés,

$$\frac{\partial W}{\partial F} = \frac{l^3}{6EI}\left(2(F+X) - 3Y\right).$$

En reportant les valeurs de X et Y dans cette expression, il vient, compte tenu de (10),

$$\boxed{x_B = 0.} \tag{11}$$

Remarque 4. Conformément à ce qui a été vu en cours, on peut aussi, dans l'expression (4) de W, remplacer X et Y et dériver ensuite :

$$W = 0. \tag{12}$$

On dérive ensuite cette expression par rapport à F.

d) Pour obtenir le déplacement vertical et la rotation de B, qui correspondent à des sollicitations extérieures nulles, on pourrait rajouter une force virtuelle g et un couple virtuel Γ, comme indiqué sur la figure 3. On utiliserait le théorème de la force virtuelle.

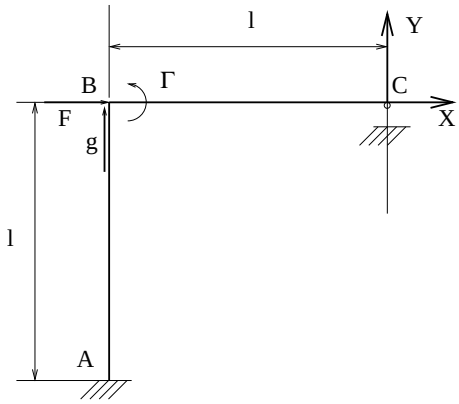

FIG. 3 – la force virtuelle g et le couple virtuel Γ

Mais, ici, on peut procéder de façon plus rapide : compte tenu de (12) on peut dire qu'il n'y a aucune contrainte dans la structure, puisque l'on a vu en cours que W est aussi égal à

$$W = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\int_S \frac{n_1^2}{E} + \frac{1}{G}\left(t_2^2 + t_3^2\right)\, dS\right)\, ds.$$

Ainsi, puisque W est nul, les contraintes n_1, t_2 et t_3 sont identiquement nulles (si l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle, alors la fonction est identiquement nulle). D'après la loi de Hooke inversée les déformations sont donc toutes nulles et les déplacements aussi (résultat qui provient du fait que la structure étudiée ne peut avoir de déplacement de corps rigide, puisqu'elle est hyperstatique). On a donc, sans aucun calculs,

$$\boxed{\begin{array}{l} y_B = 0, \\ \omega_B = 0. \end{array}} \tag{13}$$

e) Le point B est donc immobile. Puisque les réactions d'appuis en A sont nulles, la travée AB n'est donc soumise à aucune force et est immobile. La travée BC n'est soumise qu'à un effort normal ; puisque cet effort normal est négligé dans le calcul des déplacements, la travée BC est elle aussi immobile. Ainsi

$$\boxed{\text{la structure n'est pas déformée.}}$$

Les réactions d'appui en A sont nulles : on est donc dans un cas similaire à une structure libre en A et seul, l'appui C travaille.
Ce résultat est absurde : une structure contrainte est nécessairement déformée. Le paradoxe vient du fait que l'on a négligé à mauvais escient les contributions de l'effort normal. Nous allons réviser cette hypothèse et refaire les calculs complets dans la suite de cet exercice.

Remarque 5. Sans aucun calcul, on peut aussi justifier la nullité de x_B et de y_B : si on néglige l'effort normal, les poutres AB et CD sont indéformables en traction compression : leur longueur reste égale à l. En effet, si une poutre est soumise à un effort normal constant N, on a son allongement :

$$\Delta l = \frac{Nl}{ES}, \tag{14}$$

où S est la section. Négliger l'influence de l'effort normal revient à prendre

$$S \to +\infty, \tag{15}$$

puisque (avec $S_1 \to +\infty$)

$$W = \frac{1}{2}\int_{\text{structure}} \frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS_1}\, ds \approx \frac{1}{2}\int_{\text{structure}} \frac{M^2}{EI}\, ds.$$

Ainsi, d'après (14), pour tout effort normal N, $\Delta l = 0$. Ainsi, après chargement, $AB = BC = l$ et donc B ne peut qu'être immobile.

4°)

a) Si on prend en compte l'effort normal, il suffit de rajouter dans l'expression (4) donnée ci-dessus, le terme N donné par (3) ; puisque ce terme est constant, on obtient, par intégration,

$$W = \frac{l^3}{6EI}\left(4Y^2 - 3(F+X)Y + (F+X)^2\right) + \frac{lX^2}{2ES} + \frac{lY^2}{2ES}. \tag{16}$$

b) On procède ensuite comme précédemment : les deux inconnues X et Y sont indépendantes ; d'après le théorème de Ménabréa, on a

$$\frac{\partial W}{\partial X} = 0 \text{ et } \frac{\partial W}{\partial Y} = 0.$$

On a successivement,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial X} &= \frac{l^3}{6EI}\big(-3Y + 2(F+X)\big) + \frac{lX}{ES},\\ &= \frac{l^3}{6EI}\left(2\left(1+\frac{3I}{Sl^2}\right)X - 3Y + 2F\right),\\ &= \frac{l^3}{6EI}\big(2\,(1+4\alpha)\,X - 3Y + 2F\big),\end{aligned}$$

où α est un paramètre adimensionnel défini par

$$\alpha = \frac{3I}{4Sl^2}. \tag{17}$$

De même, on a

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{l^3}{6EI}\big(-3X + 8\,(1+\alpha)\,Y - 3F\big)$$

On a donc le système d'équation permettant de calculer X et Y :

$$\boxed{A_\alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},}$$

où la matrice A_α de taille 2 est définie par

$$\boxed{A_\alpha = \begin{pmatrix} 2(1+4\alpha) & -3 \\ -3 & 8(1+\alpha) \end{pmatrix}.}$$

c) Avec les notations de l'énoncé (où l'inverse de A_α était donnée), on a

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = F {A_\alpha}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$\boxed{\begin{aligned} X &= -\frac{F}{\Delta_\alpha}(7+16\alpha),\\ Y &= \frac{24\alpha F}{\Delta_\alpha}\end{aligned}} \tag{18}$$

où α est défini par (17) et

$$\Delta_\alpha = 64\alpha^2 + 80\alpha + 7. \tag{19}$$

Remarque 6. Comme pour la remarque 2, la matrice A_α symétrique, définie positive. On peut le constater ici à la main car la trace et le déterminant de A_α sont strictement positifs.

d) Compte tenu de (8), on obtient les valeurs de X_A, Y_A et Γ_A. Après calculs, on a

$$X_A = F\left(\frac{7+16\alpha}{\Delta_\alpha} - 1\right),$$
$$Y_A = -\frac{12\alpha F}{\Delta_\alpha},$$
$$\Gamma_A = -Fl\left(\frac{7+16\alpha}{\Delta_\alpha} - 1\right),$$

ce qui implique, compte tenu de (19)

$$\boxed{\begin{aligned} X_A &= -64F\alpha\frac{1-\alpha}{7+80\alpha+64\alpha^2}, \\ Y_A &= -\frac{24\alpha F}{7+80\alpha+64\alpha^2}, \\ \Gamma_A &= 64Fl\alpha\frac{1-\alpha}{7+80\alpha+64\alpha^2}. \end{aligned}} \tag{20}$$

où α est défini par (17).

e) On utilise le théorème de Castigliano : à X et Y fixé, on a

$$\frac{\partial W}{\partial F} = \frac{l^3}{6EI}\big(-3Y + 2(F+X)\big).$$

En utilisant les expressions de X et de Y, issues de (18), on a donc

$$x_B = \frac{l^3 F}{3EI}\left(1 - \frac{7}{\Delta_\alpha} - \frac{52\alpha}{\Delta_\alpha}\right),$$

soit encore

$$\boxed{x_B = \frac{l^3 F\alpha}{3EI}\,\frac{28+64\alpha}{7+80\alpha+64\alpha^2}.} \tag{21}$$

Remarque 7. Contrairement aux résultats obtenus en négligeant N, on obtient des réactions d'appuis et des déplacements non nuls, ce qui est plus satisfaisant !

5°) Si on néglige l'effort normal (dans BC seul), compte tenu de la remarque 5 et de (14), il suffit de faire dans les calculs précédents, $S \to \infty$, c'est-à-dire, compte tenu de (17), $\alpha = 0$. D'après, (19), pour $\alpha = 0$, on a $\Delta_0 = 7$ et si on fait $\alpha = 0$ dans (18), (20) et (21), on obtient

$$X = -F,$$
$$Y = 0,$$
$$X_A = 0,$$
$$Y_A = 0,$$
$$\Gamma_A = 0,$$
$$x_B = 0.$$

ce qui sont les résultats de la question trois.

6°) *Question facultative*
On se place, de nouveau dans le cas où $\alpha > 0$.

a) En comparant les deux termes de l'énergie potentielle N^2/ES et M^2/EI, on constate que la contribution de l'effort normal est petite mais non nulle si S est «grand mais fini». c'est à dire, $\alpha = 3I/(4Sl^2)$ «petit mais non nul». La condition $\mathcal{C}$ s'écrit donc soit encore

$$\boxed{0 < \alpha \ll 1.} \tag{22}$$

b) Dans l'énoncé était rappelé le développement limité suivant, pour α tendant vers zéro (valable donc sous la condition $\mathcal{C}$) :

$$(1+\alpha)^{-1} = 1 - \alpha + o(\alpha). \tag{23}$$

On a, au premier ordre,

$$\Delta_\alpha = 7 + 80\alpha + 64\alpha^2 = 7 + 80\alpha + o(\alpha),$$

et donc, d'après (23),

$$\frac{1}{\Delta_\alpha} = \frac{1}{7}\left(1 + \frac{80}{7}\alpha\right)^{-1} = \frac{1}{7}\left(1 - \frac{80}{7}\alpha + o(\alpha)\right).$$

Ainsi, d'après (18), on a, au premier ordre,

$$\begin{aligned} X &= -\frac{F}{\Delta_\alpha}(7 + 16\alpha), \\ &= -\frac{F}{7}\left(1 - \frac{80}{7}\alpha + o(\alpha)\right)(7 + 16\alpha), \\ &= -F\left(1 - \frac{80}{7}\alpha + o(\alpha)\right)\left(1 + \frac{16}{7}\alpha + o(\alpha)\right), \\ &= -F\left(1 - \frac{64}{7}\alpha + o(\alpha)\right). \end{aligned}$$

On fait de même pour Y. Ainsi

$$\boxed{\begin{aligned} X &= -F\left(1 - \frac{64}{7}\alpha + o(\alpha)\right), \\ Y &= \frac{24\alpha F}{7} + o(\alpha) \end{aligned}} \tag{24}$$

De même, selon (20), pour α tendant vers zéro, on a, au premier ordre,

$$\boxed{\begin{aligned} X_A &= -\frac{64F\alpha}{7} + o(\alpha), \\ Y_A &= -\frac{24F\alpha}{7} + o(\alpha), \\ \Gamma_A &= \frac{64Fl\alpha}{7} + o(\alpha). \end{aligned}} \tag{25}$$

De même, selon (21), pour α tendant vers zéro, on a, au premier ordre,

$$\boxed{x_B = \frac{4}{3}\frac{l^3 F\alpha}{EI} + o(\alpha).} \tag{26}$$

Si on exprime α en fonction de sa valeur, on obtient

$$x_B = \frac{lF}{ES} + o(\alpha). \tag{27}$$

c) D'après (3) et (24), on a, au premier ordre en α,

$$\text{sur } BC, \quad M = \frac{12\alpha F}{7}(l-x) + o(\alpha), \tag{28a}$$

$$N = -F\left(1 - \frac{64}{7}\alpha\right) + o(\alpha), \tag{28b}$$

$$\text{sur } AB, \quad M = -\frac{64F\alpha}{7}(l-x) + \frac{12F\alpha}{7}l + o(\alpha), \tag{28c}$$

$$N = \frac{12\alpha F}{7} + o(\alpha). \tag{28d}$$

Si on néglige l'effort tranchant dans BC et AB, on a

$$v''(x) = \frac{M}{EI}. \tag{29}$$

Puisque M est affine en x sur BC et AB, la déformée de la poutre sera donnée par un polynôme de degré trois.
On peut donc donner la déformée (qualitativement), en tenant compte de l'encastrement en A et de l'angle qui reste droit en B : voir figure 4.

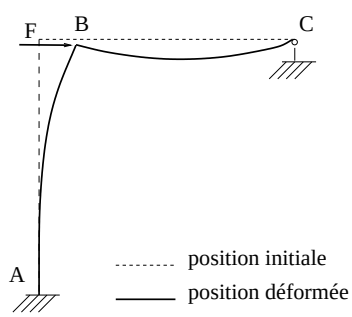

FIG. 4 – La déformée de la structure

Remarque 8. Pour calculer x_B, on peut aussi écrire selon (14) et (28b), à l'ordre 0 en α :

$$|x_B| = \frac{|N|l}{ES} = \frac{Fl}{ES}.$$

d) D'après le cours (voir poly, chapitre 1), on a

$$\boxed{I = I_y = \frac{bh^3}{12}.} \tag{30}$$

D'après (17), on a donc

$$\alpha = \frac{3I}{4l^2 S_b} = \frac{3bh^3}{48l^2 bh},$$

soit

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{16}\left(\frac{l}{h}\right)^{-2}.} \tag{31}$$

En RDM, l'élancement l/h est «grand devant un» (mais fini) ; ainsi, d'après (31), on a bien (22). Retenons qu'on peut négliger (au second ordre près) en général les effets des efforts normaux si l'élancement est grand. On ne peut cependant négliger ces efforts devant zéro, ce qui aboutirait à la contradiction constaté en question trois. En effet, d'après (27), on peut écrire

$$x_B = \frac{lF}{ES} + o(\alpha) = 0 \times \frac{Fl^3}{EI} + \frac{lF}{ES} + o(\alpha).$$

Le terme $0 = 0 \times Fl^3/EI$ correspond à l'influence de la flexion et le terme lF/ES correspond à l'influence de la traction-compression. En général, on néglige le terme $k_1\, lF/ES$ devant $k_2\, Fl^3/EI$ (k_1 et k_2 constantes numérique). Mais, ici, $k_2 = 0$ et on ne peut négliger $k_1\, lF/ES$ devant zéro.

Remarque 9. En comparant les expressions de $X \approx -F + k_1 \alpha F$ et de $X_A \approx k_2 \alpha F$ (au premier ordre en α), où k_1 et k_2 sont deux constantes numériques, on constate que l'encastrement A ne supporte qu'une portion de F, et ce, d'autant moins que α est petit.