

Corrigé de l'examen médian du 16 novembre 2001

Correction de l'exercice 1.

1°) La charge critique de flambement d'une poutre encastree à une extremité, articulée à une autre, soumise à un effort normal est égale à

$$F_c = \pi^2 \frac{EI}{(\alpha L)^2},$$

où $\alpha \approx 0,7$, I est l'inertie principale, E le module d'Young et L la longueur de la poutre.

2°) La longueur libre de flambement pour une poutre avec des conditions aux limites quelconques est la longueur \mathcal{L} telle que la charge critique de flambement soit égale à

$$F_c = \pi^2 \frac{EI}{\mathcal{L}^2};$$

\mathcal{L} est une fraction de la longueur réelle L et dépend des conditions aux limites. Par exemple, pour une poutre encastree-libre, on a $\mathcal{L} = 2L$.

3°) Le théorème de Ménabréa sert à lever l'hyperstaticité d'une structure (élastique linéaire) : si la structure hyperstatique de degré h comporte h inconnues hyperstatiques indépendantes notées $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq h}$ et si W désigne le potentiel de déformation, on a, d'après le théorème de Ménabréa :

$$\forall i \in \{1, \dots, h\}, \quad \frac{\partial W}{\partial \Phi_i} = \begin{cases} 0 & \text{si l'inconnue hyperstatique est interne,} \\ \lambda_i & \text{si l'inconnue hyperstatique est externe,} \end{cases}$$

où λ_i est le déplacement généralisé associé à la réaction d'appui Φ_i (en général nul).

Correction de l'exercice 2.

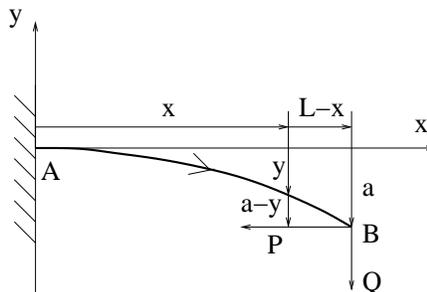


FIG. 1 – Étude du flambement d'une poutre

1°) Les réactions d'appui sont au nombre de trois (X_A , Y_A , composantes de la réaction d'appui et M_A , moment d'encastrement), égal au nombre d'équations fournies par l'équilibre de la structure étudiée ; ainsi, la structure est isostatique, c'est-à-dire

le degré d'hyperstaticité est nul.

2°) Au point d'abscisse x , le bras de levier (algébrique) de la force P est égal à $a - y$ et le bras de levier de la force Q est égal à $-(L - x)$ (cf. figure 1). On a donc

$$M(x) = P(a - y) - Q(L - x),$$

On a donc

$$M(x) = Qx - Py - QL + Pa. \quad (1)$$

3°) On sait que l'on a

$$y''(x) = \frac{M}{EI},$$

Ainsi, on a , compte tenu de (1),

$$y''(x) = \frac{Qx - Py - QL + Pa}{EI},$$

soit encore

$$y''(x) + \frac{P}{EI}y(x) = \frac{P}{EI} \left(\frac{Q}{P}x - \frac{Q}{P}L + a \right),$$

soit encore

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = \omega^2 \left(\frac{Q}{P}x - \frac{Q}{P}L + a \right), \quad (2)$$

où

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (3)$$

4°) On a une équation différentielle linéaire du deuxième ordre avec second membre non nul, pour laquelle la solution générale est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre ; ainsi, il existe deux réels A et B que la solution de (2) soit

$$y(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x) + \tilde{y}(x),$$

où \tilde{y} est une solution particulière de (2). Il est aisé de constater que \tilde{y} peut être cherché sous la forme d'une application affine en x ; après calculs, on obtient

$$y(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x) + \frac{Q}{P}x - \frac{Q}{P}L + a. \quad (4)$$

5°) Les conditions aux limites sont correspondent à un encastrement en $x = 0$, c'est-à-dire,

$$y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0. \quad (5)$$

En réinjectant dans (4), l'équation (5) fournit respectivement

$$\begin{aligned} B - \frac{Q}{P}L + a &= 0, \\ A\omega + \frac{Q}{P} &= 0, \end{aligned}$$

ce qui implique en réutilisant (4) que

$$\boxed{y(x) = \frac{Pa - QL}{P}(1 - \cos(\omega x)) - \frac{Q}{P\omega} \sin(\omega x) + \frac{Q}{P}x.} \quad (6)$$

6°) Un calcul immédiat montre, en utilisant la définition (3) de ω et la définition de P_c

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}. \quad (7)$$

que

$$\omega L = L\sqrt{\frac{P}{EI}} = \sqrt{PL}\sqrt{\frac{\pi^2}{4L^2 P_c}},$$

et donc que

$$\boxed{\omega L = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_c}}.} \quad (8)$$

Il est alors immédiat que si $P < P_c$, alors $\omega L < \pi/2$.

7°) Pour calculer le moment d'encastrement M_A , on peut écrire l'équilibre global de la structure ; mais il est plus rapide d'utiliser les calculs déjà faits en remarquant que

$$M_A = -M(0),$$

car le moment d'encastrement en A est égal au moment de l'action de l'appui sur la poutre, c'est à dire l'opposé de l'action de la droite de la structure sur la gauche. D'après (1) et (5), on a donc

$$\boxed{M_A = QL - Pa.} \quad (9)$$

8°) On n'a pas encore utilisé la condition aux limites au point B qui s'écrit

$$y(L) = a,$$

ce qui implique, selon (6), que

$$a = \frac{Pa - QL}{P}(1 - \cos(\omega L)) - \frac{Q}{P\omega} \sin(\omega L) + \frac{Q}{P}L ;$$

cela implique, après simplification

$$\frac{Q}{\omega} \sin(\omega L) = (QL - Pa) \cos(\omega L).$$

D'après la question 5, si $P < P_c$, $\omega L < \pi/2$ d'où $\cos(\omega L) \neq 0$ et donc d'après (9)

$$\frac{M_A}{QL} = \frac{QL - Pa}{QL} = \frac{1 - \cos(\omega L)}{\omega L \cos(\omega L)},$$

soit, selon (8),

$$\boxed{\frac{M_A}{QL} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_c}}\right)}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_c}}}}. \quad (10)$$

9°) Le terme QL représente le moment d'encastrement au point A pour une poutre non soumise au

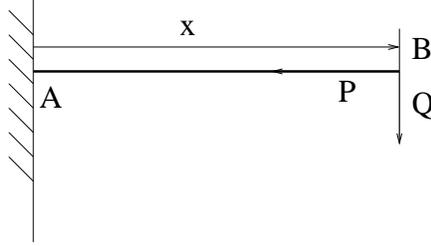


FIG. 2 – Étude d'une poutre en flexion sans flambement

flambement (cf. figure 2). Il suffit de faire $a = 0$ dans (9).

10°) Si $P \rightarrow P_c$, d'après (10), le terme M_A/QL tend vers $+\infty$ puisque $\tan(P/P_c)$ tend vers $+\infty$. Cela signifie qu'une poutre soumise à deux forces de composante Q et P avec P proche de la charge critique de flambement voit son moment d'encastrement très grand.

11°) Selon (6), on a

$$y(x) = \left(a - \frac{QL}{P}\right) (1 - \cos(\omega x)) - \frac{Q}{P\omega} \sin(\omega x) + \frac{Q}{P}x. \quad (11)$$

D'autre part, d'après (3), si $P \rightarrow 0$ alors $\omega \rightarrow 0$. Enfin, on rappelle les développements limités d'ordre trois au voisinage de zéro du sinus et du cosinus :

$$\sin X = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3), \quad (12)$$

$$\cos X = 1 - \frac{X^2}{2} + o(X^3). \quad (13)$$

On a donc quand $\omega \rightarrow 0$,

$$\sin(\omega x) = \omega x - \frac{\omega^3 x^3}{6} + o(\omega^3 x^3),$$

$$\cos(\omega x) = 1 - \frac{\omega^2 x^2}{2} + o(\omega^3 x^3),$$

ce qui implique, puisque x est borné (car compris entre 0 et L)

$$\sin(\omega x) = \omega x - \frac{\omega^3 x^3}{6} + o(\omega^3),$$

$$\cos(\omega x) = 1 - \frac{\omega^2 x^2}{2} + o(\omega^3).$$

En réinjectant ces expressions dans (11), on a donc

$$y(x) = \left(a - \frac{QL}{P}\right) \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + o(\omega^3)\right) - \frac{Q}{P\omega} \left(\omega x - \frac{\omega^3 x^3}{6} + o(\omega^3)\right) + \frac{Q}{P}x,$$

ce qui, après calculs, se met sous la forme

$$y(x) = \frac{1}{2}a\omega^2 x^2 - \frac{QL\omega^2 x^2}{2P} + \frac{Q\omega^2 x^3}{6P} + \frac{1}{P}o(\omega^3) + \frac{1}{P}o(\omega^2) + o(\omega^3).$$

Dans cette expression, on a laissé tous les termes négligeables car on ne sait pas encore *a priori* lesquels peuvent être négligés devant les autres. Cependant, d'après, (3), il vient après simplification

$$y(x) = \frac{Qx^3}{6EI} - \frac{QLx^2}{2EI} + \frac{aPx^2}{2EI} + o\left(P^{\frac{1}{2}}\right) + o(1) + o\left(P^{\frac{3}{2}}\right),$$

c'est-à-dire

$$y(x) = \frac{Qx^3}{6EI} - \frac{QLx^2}{2EI} + o(1).$$

Le terme $o(1)$ tend vers 0 quand P tend vers 0 et on a donc montré que

$$\boxed{\lim_{P \rightarrow 0} y(x) = y_0(x) \text{ où } y_0(x) = \frac{Qx^3}{6EI} - \frac{QLx^2}{2EI}.} \quad (14)$$

Remarque 1. Pour les puristes, on peut démontrer que la convergence de y vers y_0 est uniforme sur $[0, T]$ quand $P \rightarrow 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{P \rightarrow 0} \sup_{x \in [0, L]} |y(x) - y_0(x)| = 0. \quad (15)$$

Pour cela, on remplace les développements limités (12)-(13) par le résultat de l'application de la formule de Taylor-Lagrange aux fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[0, X]$: il existe ξ_X et ξ'_X appartenant à $[0, X]$ tels que

$$\begin{aligned} \sin X &= X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{24} \sin^{(4)}(\xi_X), \\ \cos X &= 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24} \cos^{(4)}(\xi'_X), \end{aligned}$$

où $\sin^{(4)}$ et $\cos^{(4)}$ désigne les dérivées quatrièmes des fonctions sinus et cosinus, qui sont bornées par un ; on a donc

$$\begin{aligned} \sin X &= X - \frac{X^3}{6} + X^3 M_1(X), \\ \cos X &= 1 - \frac{X^2}{2} + X^3 M_2(X), \end{aligned}$$

où

$$|M_1(X)| \leq \frac{|X|}{24} \text{ et } |M_2(X)| \leq \frac{|X|}{24}.$$

En reprenant le calcul précédent, on montre que

$$y(x) = \frac{Qx^3}{6EI} - \frac{QLx^2}{2EI} + \sqrt{P}M(P),$$

où la fonction $M(P)$ est bornée si P est borné. Cela implique, que

$$\forall x \in [0, L], \quad |y(x) - y_0(x)| \leq \sqrt{P} |M(P)|,$$

ce qui implique le résultat de convergence uniforme (15).

Remarque 2. On peut montrer que la déformée y_0 correspond à la déformée d'une poutre encastrée et chargée par une force de bout Q . On utilise en effet le théorème de la force virtuelle pour connaître la déformée $y_1(x)$ en un point d'abscisse x quelconque de la poutre de la figure 3. On considère une

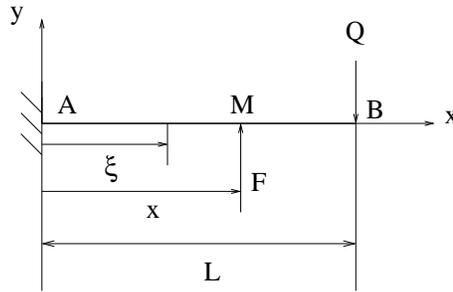


FIG. 3 – Poutre encastrée

force verticale d'intensité F (dirigée vers le haut pour avoir un déplacement dirigé comme l'axe y) appliquée au point d'abscisse x . D'après le cours, on a

$$y_1(x) = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{\partial W}{\partial F},$$

où W est le potentiel de déformation. Le moment fléchissant en un point d'abscisse ξ est défini par

$$\begin{aligned} \text{sur } [AM] \quad (0 \leq \xi \leq x), \quad M(\xi) &= F(x - \xi) - Q(L - \xi), \\ \text{sur } [MB] \quad (x \leq \xi \leq L), \quad M(\xi) &= -Q(L - \xi). \end{aligned}$$

On ne considère pour le potentiel W que les contributions du moment fléchissant. On a donc, en dérivant sous le signe somme,

$$\frac{1}{EI} \int_{\text{structure}} M \frac{\partial M}{\partial F} d\xi = \frac{1}{EI} \int_0^x (F(x - \xi) - Q(L - \xi))(x - \xi) d\xi,$$

puisque l'intégrale entre x et L est nulle (moment indépendant de F). En passant à la limite sous le signe somme quand $F \rightarrow 0$, il vient

$$y_1(x) = \frac{1}{EI} \int_0^x (-Q(L - \xi))(x - \xi) d\xi,$$

et après calculs

$$y_1(x) = \frac{Qx^3}{6EI} - \frac{QLx^2}{2EI},$$

ce qui est bien l'expression figurant dans (14).

Correction de l'exercice 3.

1°) À l'encastrement D , il y a deux résultantes pour la réaction d'appui, notées X_D, Y_D et un moment notés M_D . Le problème étant plan, on aura trois équations d'équilibre; ainsi, l'équilibre seul fournit les trois réactions d'appui et

la structure étudiée est isostatique.

2°) L'équilibre global de la structure, projeté sur les axes X et Y fournit respectivement

$$\begin{aligned} X_D &= 0, \\ Y_D - F &= 0, \\ M_D - FL &= 0 \text{ (nullité du moment par rapport à } D\text{)}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} X_D &= 0, \\ Y_D &= F, \\ M_D &= FL. \end{aligned}$$

3°) On calcule aisément les efforts de la RDM dans les différentes travées de la structure (par rapport aux différent axes locaux (x, y)); dans chaque travée, l'origine est prise au premier point de la poutre, par rapport à l'orientation choisie.

$$\begin{aligned} \text{sur } DC : \quad & N = -F; \\ & T = 0; \\ & M = -M_D = -FL; \\ \\ \text{sur } CB : \quad & N = 0; \\ & T = -F; \\ & M = -F(L - x); \\ \\ \text{sur } AB : \quad & N = F; \\ & T = 0; \\ & M = 0. \end{aligned}$$

4°) En dérivant sous le signe somme, on a, puisque EI est constant,

$$\frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{EI} \int_{\text{structure}} M \frac{\partial M}{\partial F}.$$

En décomposant l'intégrale sur les différentes travées, il vient successivement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial F} &= \frac{1}{EI} \left(\int_0^L (-FL)(-L)dx + \int_0^L (-F)(L-x)(-(L-x))dx \right), \\ &= \frac{1}{EI} \left(FL^3 + F \int_0^L (x-L)^2 dx \right), \\ &= \frac{1}{EI} \left(FL^3 + \frac{FL^3}{3} \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial F} = \frac{4}{3} \frac{FL^3}{EI}} \quad (16)$$

5°) Pour cette question, on n' a pas utilisé la valeur des réactions d'appui (sauf peut-être l'opposé de M_D dans la question 3).

6°) D'après le théorème de Castigliano, le déplacement généralisé du point A , c'est-à-dire le déplacement de A sur la ligne d'action de F (demi droite orientée vers le bas) est égal à

$$\lambda_A = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{4}{3} \frac{FL^3}{EI} ;$$

Ainsi, le déplacement du point A est égal

$$\boxed{\lambda_A = \frac{4}{3} \frac{FL^3}{EI}},$$

ce déplacement étant dirigé vers le bas, comme F .

7°) On utilise le théorème de la force fictive : on considère une charge extérieure d'intensité P appliquée horizontalement (cf. figure 4).

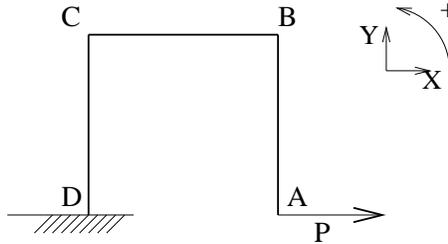


FIG. 4 – Utilisation du théorème de la force fictive

D'après le théorème de Castigliano le déplacement horizontal du point A est égal à

$$\mu_A = \frac{\partial W}{\partial P}.$$

En calculant la limite de cette expression quand P tend vers zéro on a donc le déplacement horizontal du point A correspondant à la structure initiale étudiée.