Corrigé de l'examen médian du 13 novembre 2003

Correction de l'exercice 1.
On renvoie au polycopié de cours.

Correction de l'exercice 2.

1. On étudie le tenseur :
$$[\sigma]=\begin{pmatrix}6&2\\2&3\end{pmatrix}. \tag{1}$$
   (a) Les contraintes principales sont les valeurs propres de $[\sigma]$. On a
$$\det\left([\sigma]-XI\right)=\det\begin{pmatrix}6-X&2\\2&3-X\end{pmatrix}=X^2-9X+14.$$
   On calcule les deux racines du trinôme $X^2-9X+14$ et on en déduit (en Mpa)
$$\boxed{\sigma_2=2,\quad \sigma_1=7.} \tag{2}$$
   (b) À un état de contrainte plan est associé un cercle de Mohr. Puisque la première colonne de $[\sigma]$ est égale à ${}^t(6,2)$, l'état de contrainte du point M_1 est défini par
$$\sigma(M_1)=6,\quad \tau(M_1)=2. \tag{3}$$
   On connaît donc le point de coordonnées $M_1(6,2)$ du cercle de Mohr. De même, puisque la seconde colonne de $[\sigma]$ est égale à ${}^t(2,3)$, l'état de contrainte du point M_2 est défini par
$$\sigma(M_2)=3,\quad \tau(M_2)=-2. \tag{4}$$
   On connaît donc le point de coordonnées $M_2(3,-2)$ du cercle de Mohr.
   On reporte ces deux points et on déduit le cercle de Mohr, de centre Ω d'ordonnée nulle, comme l'indique la figure 1.

2. On étudie le tenseur :
$$[\sigma]=\begin{pmatrix}6&2&0\\2&3&0\\0&0&-10\end{pmatrix}. \tag{5}$$
   (a) Pour le tenseur $[\sigma]$ défini par (5), on constate la présence de deux blocs. Le premier correspond au tenseur plan (1) et le second à $[-10]$ de valeur propre -10. Ainsi, le tricercle de Mohr de l'état de contrainte (5) est constitué de trois cercles ; deux d'entre eux passent par $M_3(-10,0)$ et le troisième est au identique au cercle déjà tracé sur la figure. On en déduit donc les trois cercles, comme indiqué sur la figure 2.

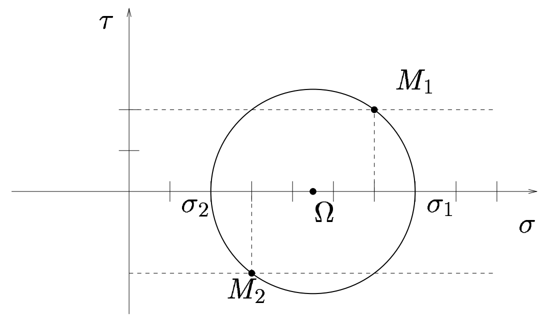

FIG. 1 – Le cercle de Mohr (plan).

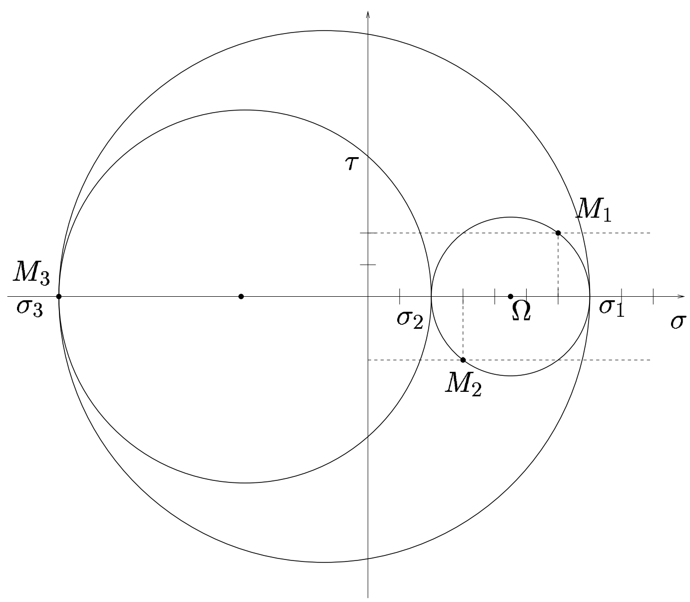

FIG. 2 – Le cercle de Mohr (spatial).

(b) D'après ce qui précède, on a

$$\boxed{\sigma_3 = -10, \quad \sigma_2 = 2, \quad \sigma_1 = 7.} \tag{6}$$

(c) Graphiquement ou par le calcul, on a

$$\boxed{|\tau_{\text{max}}| = 8.5.} \tag{7}$$

(d) Notons (X, Y, Z) le repère principal : X est associé à la valeur propre σ_1, Y est associé à la valeur propre σ_2 et Z est associé à la valeur propre σ_3.

Vu la forme de $[\sigma]$ ((5)), on a

$$\boxed{Z = z.} \tag{8}$$

Ainsi le repère (X, Y) est dans le plan (x, y) et on note

$$\boxed{\theta = \widehat{(x, X)}.} \tag{9}$$

D'après le cours, on a

$$\phi = -2\theta, \tag{10}$$

où $\phi = \left(\widehat{\Omega Q_1, \Omega M_1}\right)$ (voir figure 3). En utilisant les propriétés de l'angle au centre et de

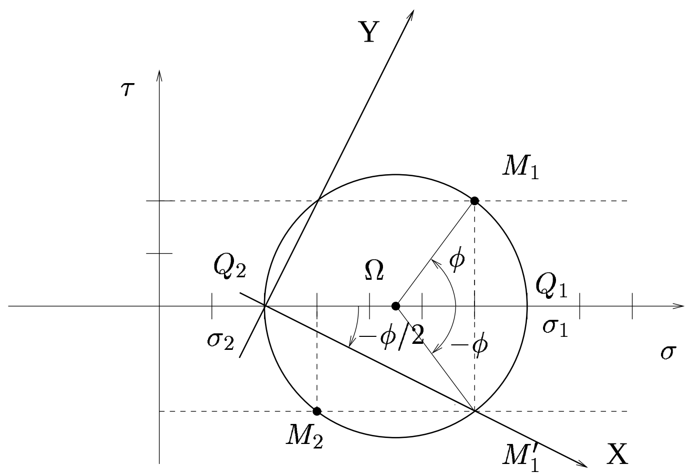

FIG. 3 – Le cercle de Mohr (plan) et les angles θ et ϕ.

l'angle inscrit, on a

$$\left(\widehat{Q_2 Q_1, Q_2 M_1'}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{\Omega Q_1, \Omega M_1'}\right),$$

et on déduit donc de (10) que

$$\boxed{\theta = \left(\widehat{Q_2 Q_1, Q_2 M_1'}\right),} \tag{11}$$

ce qui nous permet de tracer le repère (X, Y) sur la figure 3. De plus, selon (11), on a

$$\boxed{\theta = -\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx -26,56^{\circ}.} \tag{12}$$

Correction de l'exercice 3.

1. La structure étudiée possède quatre réactions d'appuis et trois équations en déterminent l'équilibre. Ainsi,

$$\boxed{\text{le degré d'hyperstaticité de cette strucure est égal à } h = 1.} \tag{13}$$

2. Les différentes structures isostatiques équivalentes possibles sont :
   - un encastrement en A et une force verticale en B qui impose le déplacement vertical de B nul ;

- un guide vertical en A (il ne laisse libre que le déplacement vertical de A) et une force verticale en A qui impose le déplacement vertical de A nul ;
- une rotule en A et un couple en A qui impose la rotation de A nulle.

La possibilité de mettre un guide horizontal en A (il ne laisse libre que le déplacement horizontal de A) et une force horizontale en A qui impose le déplacement horizontal de A nul n'est pas retenue : c'est un mécanisme.

3. Dans cette question, on considère la structure isostatique équivalente représentée sur la figure 4. Dans le repère habituel, on note Y la réaction d'appui verticale en B et X_A et Y_A les réactions

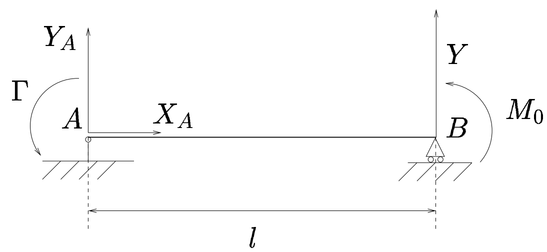

FIG. 4 – la structure isostatique équivalente étudiée.

d'appuis en A.

(a) On a

$$M(x) = Y(l - x) + M_0. \tag{14}$$

L'équilibre fournit

$$Y = -\frac{\Gamma + M_0}{l}. \tag{15}$$

De (14) et (15), on déduit donc

$$M(x) = \frac{x}{l}(\Gamma + M_0) - \Gamma. \tag{16}$$

Ainsi, après intégration, on a

$$v'(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{x^2}{2l}(\Gamma + M_0) - \Gamma x + C\right), \tag{17}$$

où C est une constante. Après intégration, il vient

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{x^3}{6l}(\Gamma + M_0) - \Gamma\frac{x^2}{2} + Cx + D\right), \tag{18}$$

où D est une constante. On détermine les constantes en écrivant que $v(0) = v(l) = 0$. On a, après calculs,

$$\boxed{v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{x^3}{6l}(\Gamma + M_0) - \Gamma\frac{x^2}{2} + Cx\right),} \tag{19}$$

où

$$\boxed{C = \frac{l}{6}(2\Gamma - M_0).} \tag{20}$$

Enfin, on écrit que Γ est tel que $\omega_A = 0$, c'est-à-dire, $v'(0) = 0$, soit, d'après (17),

$$\boxed{C = 0.} \tag{21}$$

D'après (20), on a donc

$$\boxed{\Gamma = \frac{1}{2}M_0.} \tag{22}$$

(b) Selon (16), il vient

$$W = \frac{1}{2EI}\int_0^l \left(\frac{x}{l}(\Gamma + M_0) - \Gamma\right)^2 dx,$$

et donc, après calculs,

$$\boxed{W = \frac{l}{6EI}\left(\Gamma^2 - \Gamma M_0 + M_0^2\right).} \tag{23}$$

On en déduit, grâce au théorème de Castigliano appliqué à la structure isostatique de la figure 4,

$$\boxed{\omega_A = \frac{\partial W}{\partial \Gamma} = \frac{l}{6EI}\left(2\Gamma - M_0\right).} \tag{24}$$

Puisque que Γ est tel que $\omega_A = 0$, on a donc

$$\boxed{\Gamma = \frac{1}{2}M_0,} \tag{25}$$

c'est-à-dire le résultat (22).

(c) Pour déterminer ω_B, la rotation en B, on peut utiliser la méthode directe de la question 3a ou la méthode énergétique de la question 3b. En utilisant la méthode directe, on a

$$\omega_B = v'(l),$$

c'est-à-dire, grâce à (17) et (21),

$$\omega_B = \frac{1}{EI}\left(\frac{l^2}{2l}(\Gamma + M_0) - \Gamma l\right),$$

soit, après calculs et selon (22),

$$\boxed{\omega_B = \frac{lM_0}{4EI}.} \tag{26}$$

En utilisant la méthode énergétique, on écrit, pour la structure isostatique grâce à (23) :

$$\omega_B = \frac{\partial W}{\partial M_0} = \frac{l}{6EI}\left(-\Gamma + 2M_0\right).$$

Selon (25), il vient donc

$$\boxed{\omega_B = \frac{lM_0}{4EI},} \tag{27}$$

c'est-à-dire le résultat (26).