MQ41 Printemps 2004

Corrigé de l'examen médian du 6 Mai 2004

Correction de l'exercice 1.

1. Il faut retenir que les deux équations d'équilibre local relatives aux résultantes des efforts de la RDM lient N à la densité d'effort normal q appliqué, et T à la densité d'effort tranchant p appliqué ; par homogénéité, elles sont donc du type :

$$\boxed{\frac{dN(x)}{dx} \pm q(x) = 0,}$$

et

$$\boxed{\frac{dT(x)}{dx} \pm p(x) = 0.}$$

L'équation relative au moment lie M, T et la densité m de couple appliqué et est du type :

$$\boxed{\frac{dM(x)}{dx} \pm T(x) \pm m(x) = 0.}$$

On consultera la proposition 1.15 page 19 du chapitre 1.

2. Voir chapitre 1 et annexe A.

3. Voir la proposition 3.5 page 51 du chapitre 3.

Correction de l'exercice 2.

Cet exercice est proche de l'exercice de TD 2.4mais, au lieu d'étudier une rosette à 45 degrés, on étudie une rosette à 120 degrés.
On rappelle que

$$(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}) = \frac{2\pi}{3} \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}}) = \frac{2\pi}{3}, \tag{1}$$

et que

$$\sigma_2 \leq \sigma_1. \tag{2}$$

1. Comme dans l'exercice de TD 2.4, pour construire le cercle de Mohr à partir de s_1, s_2 et s_3, on suppose le problème déjà résolu et, à partir des propriétés observées, on en déduit une caractérisation à partir des données connues.

(a) Soit Ω, le centre du cercle de Mohr. On sait, d'après le cours, qu'une rotation d'un angle θ de la facette, entraîne une rotation d'un angle -2θ du point correspondant sur le cercle de Mohr. Ainsi, d'après (1), l'angle entre $\overrightarrow{\Omega M_1}$ et $\overrightarrow{\Omega M_2}$ est égal à $-2 \times 2\pi/3$, soit modulo 2π,

$$\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M_2}}\right) = \frac{2\pi}{3}.} \tag{3}$$

De même,

$$\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M_2}, \overrightarrow{\Omega M_3}}\right) = \frac{2\pi}{3}.} \tag{4}$$

On obtient donc la figure 1.

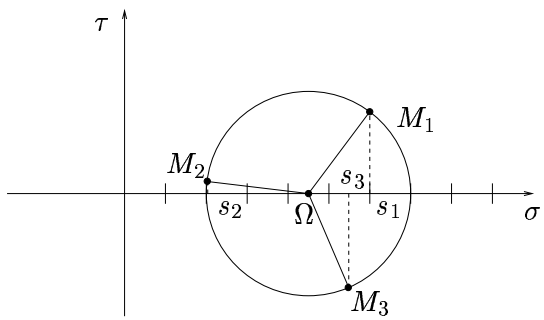

FIG. 1 – Le cercle de Mohr (plan).

(b) Notons r, la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. D'après (3) et (4), on a

$$\boxed{r(M_1) = M_2, \text{ et } r(M_2) = M_3.} \tag{5}$$

Ainsi, le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral et Ω, le centre de son cercle inscrit, est aussi son centre de gravité. On en déduit donc que son abscisse est définie par

$$\boxed{x_\Omega = \frac{1}{3}\left(s_1 + s_2 + s_3\right).} \tag{6}$$

(c) Voir corrigé de la question 1b et (5).

Notons $\mathcal{D}_1$ la droite perpendiculaire à l'axe des x, passant un point d'abscisse s_1 et $\mathcal{D}_2$ la droite perpendiculaire à l'axe des x, passant un point d'abscisse s_2.

Puisque M_1 appartient à $\mathcal{D}_1$, $M_2 = r(M_1)$ appartient à $r(\mathcal{D}_1)$. Or M_2 appartient à $\mathcal{D}_2$. On a donc

$$\boxed{M_2 = \mathcal{D}_2 \cap r(\mathcal{D}_1).} \tag{7}$$

(d) On synthétise maintenant les propriétés vues :

- grâce à (6), on peut tracer Ω ;
- on trace ensuite $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $r(\mathcal{D}_1)$;
- grâce à (7), on en déduit ensuite M_2 ;

- on trace le cercle de Mohr, de centre Ω et passant par M_2 ;
- grâce à (5), on peut déterminer M_1 et M_3.

Remarque 1. En toute rigueur, il faudrait aussi montrer que (7), définit de façon unique le point M_2, c'est à dire que $\mathcal{D}_2$ et $r(\mathcal{D}_1)$ sont sécantes ; cela est évident car ces deux droites forment un angle égal à $2\pi/3$.

2. (a) On donne (en Mpa)

$$s_1 = 6, \tag{8}$$
$$s_2 = 2,02, \tag{9}$$
$$s_3 = 5,48. \tag{10}$$

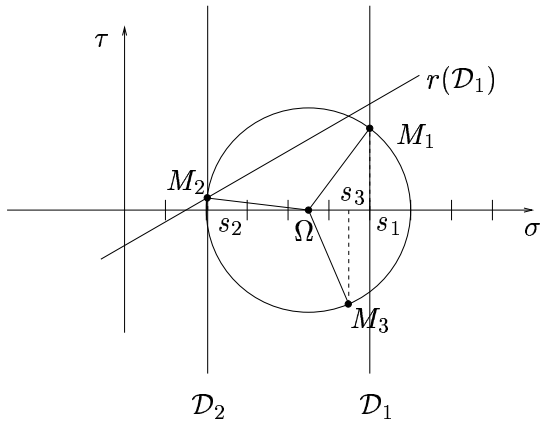

FIG. 2 – Tracé du cercle de Mohr grâce à s_1, s_2 et s_3.

Grâce à ces valeurs, on peut réaliser le programme de la question 1d. On obtient, grâce à (6),

$$\boxed{x_\Omega = 4,5.} \tag{11}$$

Voir figure 2.

(b) Voir le chapitre 2 du cours, l'annexe D et la figure 3 page suivante.
Graphiquement, on a

$$\boxed{\sigma_2 \approx 2, \quad \sigma_1 \approx 7, \quad \theta \approx -26^{\circ}.} \tag{12}$$

3. Cette question est proche des questions finale de l'exercice de TD 2.4. On retrouve par le calcul, la construction graphique précédemment faite.

(a) On rappelle que la contrainte normale dans la direction θ vaut

$$\boxed{\sigma(\theta) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta.} \tag{13}$$

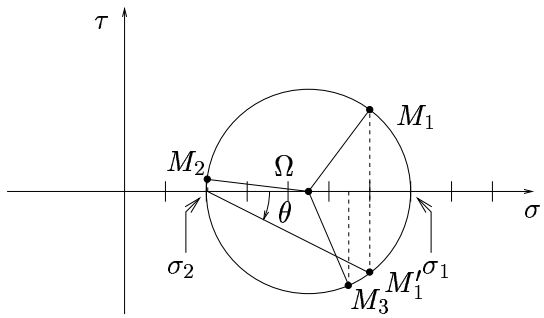

FIG. 3 – détermination graphique de σ_1, σ_2 et θ.

On a donc, puisque $s_1 = \sigma(\theta)$, $s_2 = \sigma(\theta + 2\pi/3)$ et $s_3 = \sigma(\theta + 4\pi/3)$,

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta, \\
s_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right), \\
s_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right),
\end{aligned}$$

et donc, on obtient

$$s_1 = x_\Omega + R\cos 2\theta, \tag{14a}$$

$$s_2 = x_\Omega + R\cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right), \tag{14b}$$

$$s_3 = x_\Omega + R\cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right), \tag{14c}$$

où

$$R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{14d}$$

$$x_\Omega = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2). \tag{14e}$$

(b) En sommant (14a), (14b) et (14c), on retrouve (6).

(c) On développe

$$\cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta.$$

Ainsi, en notant

$$\begin{aligned}
c &= \cos 2\theta, \\
s &= \sin 2\theta,
\end{aligned}$$

(14a) et (14c) se réécrivent

$$s_1 = x_\Omega + Rc,$$
$$s_3 = x_\Omega - \frac{R}{2}c - \frac{\sqrt{3}R}{2}s.$$

Après calcul, compte tenu de (6), on a

$$R\cos(2\theta) = \frac{1}{3}\left(2s_1 - s_2 - s_3\right), \tag{15a}$$
$$R\sin(2\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(s_2 - s_3\right). \tag{15b}$$

Ces relations permettent de calculer R et θ (à π près).
Grâce aux valeurs données (8), (9) et (10), on a

$$R\cos(2\theta) = 1,5,$$
$$R\sin(2\theta) \approx -1,997$$

et donc

$$\boxed{R \approx 2,497,}$$

et

$$\boxed{\theta \approx -26.}$$

On retrouve donc (12).

(d) D'après (14d) et (14e), on a

$$\boxed{\sigma_1 = R + x_\Omega, \quad \sigma_2 = -R + x_\Omega,}$$

et on retrouve numériquement (12).

Remarque 2. Les valeurs numériques (8), (9) et (10) proviennent en fait exactement du problème donné en annexe D ; les valeurs exactes sont (en Mpa)

$$s_1 = 6,$$
$$s_2 = \frac{15}{4} - \sqrt{3},$$
$$s_3 = \frac{15}{4} + \sqrt{3}.$$

Elles sont été calculées comme abscisses des points M_1, M_2 et M_3 de telle sorte que les ordonnées correspondantes soient

$$y_1 = 2,$$
$$y_2 = -1 + 3\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{4},$$
$$y_3 = -1 - 3\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Les valeurs exactes de R, σ_1, σ_2, R et θ sont alors données par

$$\begin{aligned} R &= \frac{9}{2}, \\ \sigma_1 &= 7, \\ \sigma_1 &= 2, \\ \theta &= -\arctan\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.

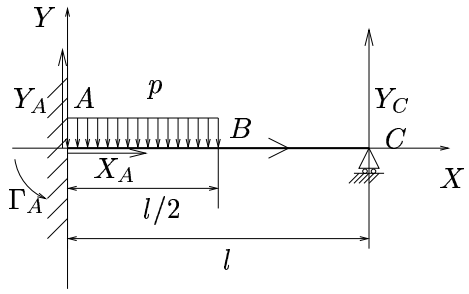

FIG. 4 – La poutre étudiée

1. La poutre est orientée et munie d'un repère comme indiqué sur la figure 4.

   Puisque la poutre est soumise à quatre réactions d'appuis notée X_A, Y_A, Γ_A et Y_C et que son équilibre est déterminé par trois équations,

$$\boxed{\text{la poutre est hyperstatique, de degré 1.}} \tag{16}$$

   Comme dans l'exemple 3.60 page 80 du chapitre 3, on choisit Y_C comme inconnue hyperstatique ; sa valeur est déterminé par le théorème de Ménabréa qui fournit l'équation manquante :

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial Y_C} = 0,} \tag{17}$$

   où seuls les effets dus au moment fléchissant sont pris en compte.

   Pour simplifier le calcul, par linéarité, on calcule d'abord le moment dû à Y_C, noté M_Y puis le moment dû à p, noté M_p et on écrira

$$M = M_p + M_Y.$$

   Il est clair que

$$\forall x \in [0, l], \quad M_Y(x) = (l - x)Y_C. \tag{18}$$

   Pour calculer le moment dû à p, on remplacera la force répartie par une force ponctuelle équivalente, appliquée au milieu de la partie de la poutre considérée. Après calculs, il vient

$$\forall x \in [0, l], \quad M_p(x) = \begin{cases} -\frac{p}{2}\left(x - \frac{l}{2}\right)^2, & \text{si } x \text{ appartient à } [0, l/2], \\ 0, & \text{si } x \text{ appartient à } [l/2, l]. \end{cases} \tag{19}$$

Selon (17), puisque E et I sont uniformes, on obtient en dérivant sous le signe somme :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial Y_C}dx, \\ &= \int_0^l (M_p(x)+M_Y(x))\frac{\partial}{\partial Y_C}\left(M_p(x)+M_Y(x)\right)dx, \end{aligned}$$

et puisque M_p ne dépend pas de Y_C

$$\begin{aligned} &= \int_0^l (M_p(x)+M_Y(x))\frac{\partial M_Y(x)}{\partial Y_C}dx, \\ &= \int_0^l (l-x)(xY_C+M_p(x))dx, \\ &= \int_0^l (l-x)^2 Y_C dx + \frac{p}{2}\int_0^{l/2}(x-l)\left(x-\frac{l}{2}\right)^2 dx. \end{aligned}$$

Il est plus rapide de calculer la seconde intégrale par intégration par partie :

$$\int_0^{l/2} x\left(x-\frac{l}{2}\right)^2 dx = -\frac{1}{3}\int_0^{l/2}\left(x-\frac{l}{2}\right)^3 dx + \frac{1}{3}\left[(x-l)\left(x-\frac{l}{2}\right)^3\right]_{x=0}^{x=l/2} = -\frac{7l^4}{192}.$$

Après calculs, on obtient donc

$$\boxed{Y_C = \frac{7pl}{128}.} \tag{20}$$

2. On peut maintenant calculer toutes les réactions d'appuis de cette structure.

Pour calculer Γ_A, il peut être rapide d'écrire (pour réutiliser les calculs faits)

$$\Gamma_A = -M(0) = -M_p(0) - M_Y(0) = +\frac{p}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 - lY_C,$$

et donc

$$\boxed{\Gamma_A = \frac{9}{128}pl^2.}$$

L'équilibre des forces appliquées fournit

$$\boxed{X_A = 0,}$$

et

$$Y_A = \frac{pl}{2} - \frac{7pl}{128},$$

soit

$$\boxed{Y_A = \frac{57}{16}pl.}$$