MQ41 Printemps 2003

Examen partiel du 15 mai 2003

Durée : deux heures

Aucun document - **Calculatrice interdite**.

On rédigera les exercices 1 et 2 sur une copie (ou plus) et l'exercice 3 sur une autre.

Exercice 1 (1,5 points). *Questions de cours*
Répondre à chaque question en une phrase.

1. Quelle est la conséquence théorique du théorème de Maxwell-Betti sur la matrice de souplesse ?
2. Quelle est l'hypothèse de Saint-Venant ?
3. Comment peut-on lever l'hyperstaticité d'une structure ?

Exercice 2 (6 points).
On considère la structure plane représentée sur la figure 1, soumise en C à la force F et au couple Γ, et encastrée en A.

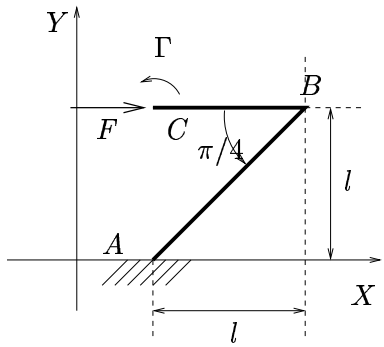

FIG. 1 – La structure étudiée

1. Cette structure est-elle isostatique ?
2. En précisant l'orientation de la poutre et les origines choisies, déterminer les efforts de la RDM en tout point.

3. Calculer les réactions d'appuis en A.

Exercice 3 (12,5 points).
On pourra admettre tout résultat et passer à la suite.

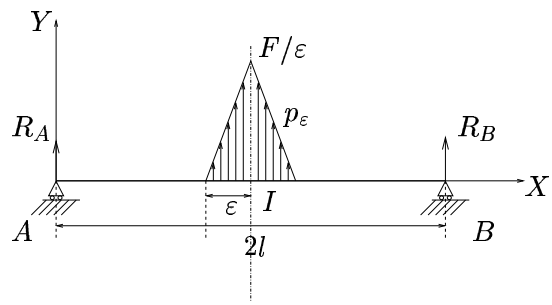

FIG. 2 – La structure étudiée

On étudie la poutre plane, représentée sur la figure 2. Elle est orientée de A vers B et l'origine est choisie en A. Cette poutre repose sur deux appuis simples en A et B et est soumise à une densité linéique de charge (verticale) p_ε, symétrique par rapport au point d'abscisse l définie par

$$\forall x \in [0, l-\varepsilon], \quad p_\varepsilon(x) = 0 \ ; \tag{1a}$$

$$\forall x \in [l-\varepsilon, l], \quad p_\varepsilon(x) = \frac{x-l+\varepsilon}{\varepsilon^2} F. \tag{1b}$$

Par symétrie[1], pour tout cet exercice, nous étudierons cette structure uniquement sur sa partie gauche, c'est-à-dire, pour $x \in [0, l]$.
On a choisi $F > 0$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout cet exercice, F est fixé et ε sera amené à tendre vers zéro.

1. Afin de déterminer la flèche de cette poutre au point d'abscisse $y \in [0, l-\varepsilon]$, on place deux forces fictives[2] de même intensité f aux points d'abscisses respectives y et $2l - y$ (voir figure 3). La force fictive $f > 0$ est destinée à tendre vers zéro.

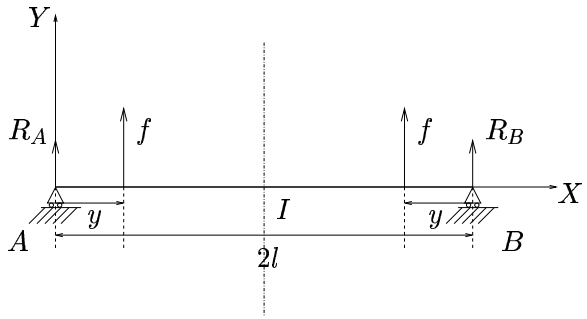

FIG. 3 – Les deux forces fictives d'intensité f

[1] En effet, on rappelle que, puisque la structure est symétrique, les efforts normaux, le moment fléchissant et la flèche sont symétriques par rapport au point d'abscisse l et l'effort tranchant est antisymétrique.

[2] pour conserver la symétrie de la structure.

On désigne $M_f^I(x)$ le moment fléchissant de la structure de la figure 3 et $M_\varepsilon^{II}(x)$ le moment fléchissant de la structure de la figure 2.

(a) Calculer $M_f^I(x)$ et $M_\varepsilon^{II}(x)$ pour tout $x \in [0, l-\varepsilon]$.

(b) Montrer que

$$\forall x \in [l-\varepsilon, l], \quad M_\varepsilon^{II}(x) = -\frac{Fx}{2} - \int_{z=0}^{z=x-l+\varepsilon} (z+l-\varepsilon-x) p_\varepsilon(z+l-\varepsilon) dz. \tag{2}$$

Attention, ici $p_\varepsilon(z+l-\varepsilon)$ désigne la valeur de la fonction p_ε en $z+l-\varepsilon$.

(c) En observant que la fonction p_ε est bornée par F/ε sur $[0, l]$, montrer que M_ε^{II} est borné sur $[l-\varepsilon, l]$ uniformément en ε, c'est-à-dire :

$$\exists C \geq 0 : \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in [l-\varepsilon, l], \quad \left|M_\varepsilon^{II}(x)\right| \leq C. \tag{3}$$

2. Pour la structure de la figure 2, on note, pour tout $\varepsilon > 0$, $v_\varepsilon(y)$ la flèche en y.

Pour $f > 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés, on note $W_{\varepsilon,f}$ l'énergie de déformation dans la partie de gauche (pour $x \in [0, l]$) de la figure de la structure 2, à laquelle on a rajouté le chargement de la figure 3. On admet que

$$v_\varepsilon(y) = \lim_{f \to 0} \frac{\partial W_{\varepsilon,f}}{\partial f}. \tag{4}$$

(a) Pour toute la suite, on supposera E et I uniformes et on négligera les effets dus aux efforts normal et tranchant dans l'énergie de déformation. Déduire de (4) que

$$v_\varepsilon(y) = \frac{1}{EI} \int_0^l M_\varepsilon^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx. \tag{5}$$

(b) En utilisant (3), montrer que, pour la structure de la figure 2, pour tout $y \in [0, l[$, $v_\varepsilon(y)$ admet une limite quand ε tend vers zéro, notée $v_0(y)$ avec

$$v_0(y) = \frac{1}{EI} \int_0^l M_0^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f}\right]_{f=0} dx, \tag{6}$$

où

$$\forall x \in [0, l], \quad M_0^{II}(x) = -\frac{Fx}{2}. \tag{7}$$

(c) À quelle structure correspond le déplacement défini par (6) et (7) ?

(d) En utilisant (6) et (7), montrer que ,

$$\forall y \in [0, l], \quad v_0(y) = \frac{F}{12EI}\left(-y^3 + 3yl^2\right). \tag{8}$$

3. **Cette question est indépendante des autres questions.**

On considère une poutre droite soumise à des forces et des couples ponctuels ainsi qu'à une densité linéique de charge p (d'effort tranchant).

(a) Montrer qu'en tout point d'abscisse x où ne sont exercés ni couple ni force ponctuels, on a les équations d'équilibre local :

$$\frac{dN(x)}{dx} = 0, \tag{9a}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = -T(x), \tag{9b}$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -p(x). \tag{9c}$$

Comme dans le cours, on écrira l'équilibre d'un tronçon élémentaire de poutre compris entre les abscisses x et $x + dx$, où dx est la variation infinitésimale d'abscisse.

(b) Montrer que, si on néglige les effets de l'effort tranchant, on a, en tout point d'abscisse x où ne sont exercés ni couple ni force ponctuels (et en supposant E et I uniformes) :

$$v^{(4)}(x) = \frac{1}{EI}p(x). \tag{10}$$

On rappelle que, si on néglige l'effort tranchant, on a

$$v''(x) = \frac{1}{EI}M(x). \tag{11}$$

4. **Question facultative**

(a) Comment pourrait-on, à ε fixé, calculer les efforts de la RDM, $N_\varepsilon(x)$, $T_\varepsilon(x)$ et $M_\varepsilon(x)$ en tout point d'abscisse $x \in [0, l]$ pour la structure de la figure 2 ?

(b) Comment pourrait on, à ε fixé, calculer $v_\varepsilon(y)$, en tout point d'abscisse $y \in [0, l]$ pour la structure de la figure 2 ?

(c) Les égalités (9) sont elles vérifiées pour p_ε (définie par (1)), N_ε, T_ε et M_ε ?

(d) L'égalité (10) est-elle vérifiée pour v_ε et p_ε ?

(e) Déterminer en tout point d'abscisse $x \in [0, l]$, $N_0(x)$, $T_0(x)$ et $M_0(x)$, les limites de $N_\varepsilon(x)$, $T_\varepsilon(x)$ et $M_\varepsilon(x)$ quand ε tend vers zéro.

Quelle structure admet cette distribution d'effort de la RDM ?

(f) De même, déterminer en tout point d'abscisse $x \in [0, l]$, $p_0(x)$ la limite de $p_\varepsilon(x)$ quand ε tend vers zéro.

(g) Les fonctions v_0, p_0, N_0, T_0 et M_0 ? vérifient elles les équations différentielles (9) et (10) ?

(h) (i) On considère la fonction de Heaviside H définie par

$$\forall x \in [0, 2l], \quad H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < l, \\ 1, & \text{si } x > l. \end{cases} \tag{12}$$

On considère formellement sa dérivée (appelée «fonction Dirac») définie[3] par

$$\forall x \in [0, 2l], \quad \delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}. \tag{13}$$

[3]En toute rigueur, H n'est pas continue en $x = l$, donc non dérivable !

Montrer que, pour toute fonction u, dérivable sur $[0, 2l]$, nulle en 0 et en $2l$, on peut écrire formellement

$$\int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = u(l). \tag{14}$$

(ii) Montrer qu'en fait, grâce à (14), δ ne peut être une fonction. On pourra faire un intégration par partie.

(iii) Ceux qui connaissent la théorie des distributions, peuvent conclure sur ce paradoxe et expliquer l'intérêt des distributions !