MQ41 Automne 2003

Corrigé de l'examen partiel du 16 octobre 2003

1. Cette structure est plane, possède trois liaisons (un encastrement) et est donc isostatique.
2. Puisqu'il y a aucun effort normal appliqué, on a

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad N(x) = 0.} \tag{1a}$$

En intégrant l'équation vue en cours $dT(x)/dx + p(x) = 0$, il vient, grâce à $p(x) = Fx^2/l^3$,

$$T(x) = -\int p(x)dx = -\frac{x^3 F}{3l^3} + C,$$

où C est une constante. Puisque l'extrémité B n'est soumise à aucune force ponctuelle, on a $T(l) = 0$. On en déduit

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad T(x) = \frac{\left(-x^3 + l^3\right) F}{3l^3}.} \tag{1b}$$

En intégrant l'équation vue en cours $dM(x)/dx + T(x) = 0$, il vient

$$M(x) = -\int T(x)dx = \frac{\left(x^4 - 4l^3 x\right) F}{12l^3} + C',$$

où C' est une constante. Puisque l'extrémité B n'est soumise à aucun couple ponctuel, on a $M(l) = 0$. On en déduit

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad M(x) = \frac{\left(x^4 - 4l^3 x + 3l^4\right) F}{12l^3}.} \tag{1c}$$

3. On intègre l'équation $v'' = M/EI$. Grâce à (1c), on déduit successivement :

$$\forall x \in [0, l], \quad v'(x) = \frac{\left(x^5 - 10l^3 x^2 + 15l^4 x\right) F}{60EIl^3} + C_1,$$

où C_1 est une constante. En A, l'encastrement impose $v'(0) = 0$ et donc

$$\forall x \in [0, l], \quad v'(x) = \frac{\left(x^5 - 10l^3 x^2 + 15l^4 x\right) F}{60EIl^3}.$$

Ainsi, en intégrant de nouveau,

$$\forall x \in [0, l], \quad v(x) = \frac{\left(x^6 - 20l^3 x^3 + 45l^4 x^2\right) F}{360EIl^3} + C_2,$$

où C_2 est une constante. En A, l'encastrement impose $v(0) = 0$ et donc, on obtient

$$\boxed{\forall x \in [0,l], \quad v(x) = \frac{\left(x^6 - 20l^3x^3 + 45l^4x^2\right)F}{360EIl^3}.} \tag{2}$$

4. (a) Pour étudier le second chargement, on raisonne par linéarité : il est la somme du premier chargement et le chargement de la figure 1.

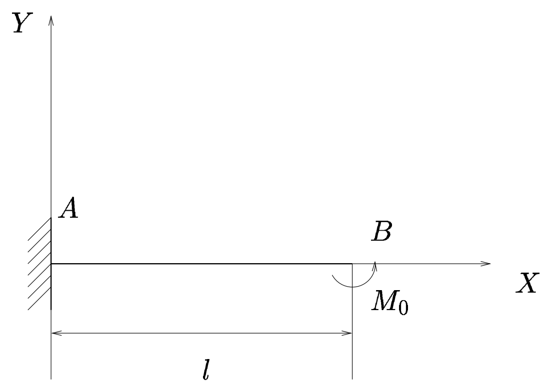

FIG. 1 – La structure étudiée avec le couple M_0 seul

Dans ce cas, on calcul aisément M, puis par intégration v.

(b) Le moment M est constant et égal à

$$\boxed{\forall x \in [0,l], \quad M(x) = M_0.} \tag{3}$$

Par intégration, on en déduit

$$\forall x \in [0,l], \quad v'(x) = \frac{M_0 x}{EI} + D_1,$$

où D_1 est une constante. En A, l'encastrement impose $v'(0) = 0$ et donc

$$\forall x \in [0,l], \quad v'(x) = \frac{M_0 x}{EI}.$$

Ainsi, en intégrant de nouveau,

$$\forall x \in [0,l], \quad v(x) = \frac{M_0 x^2}{2EI} + D_2,$$

où D_2 est une constante. En A, l'encastrement impose $v(0) = 0$ et donc, on obtient

$$\forall x \in [0,l], \quad v(x) = \frac{M_0 x^2}{2EI}.$$

Finalement, en sommant avec (2), on obtient le déplacement total :

$$\boxed{\forall x \in [0,l], \quad v(x) = \frac{\left(x^6 - 20l^3x^3 + 45l^4x^2\right)F}{360EIl^3} + \frac{M_0 x^2}{2EI}.} \tag{4}$$