MQ41 Automne 2004

Corrigé de l'examen partiel du 14 octobre 2004

Les conventions adoptées sont celles du polycopié, ce qui n'interdit pas l'usage d'autres conventions, dés lors qu'elles sont explicitées.

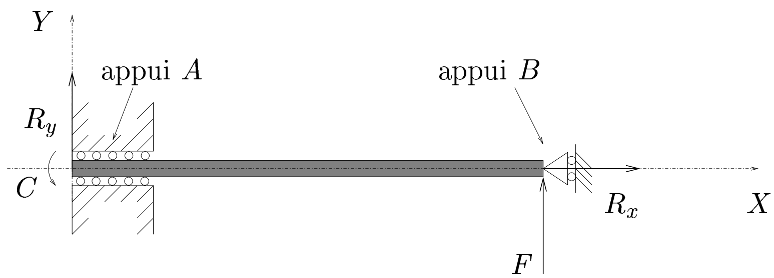

FIG. 1 – Le repère choisi.

On choisit le repère représenté (X, Y) sur la figure 1 ; l'origine de la poutre étudiée est choisie en A.

1. Compte tenu de la nature des appuis en A et B, les réactions d'appuis sont :
   - une force verticale en A, notée R_y ;
   - un couple en A, noté C ;
   - une force horizontale en B, notée R_x.

   L'équilibre de la structure en projection sur X fournit :

   $$\boxed{R_x = 0,} \tag{1}$$

   On note $N(x)$, $T(x)$ et $M(x)$, les efforts de la RDM dans la section d'abscisse x (dont on rappelle qu'ils désignent l'action de la droite sur la gauche).

   L'équation (1) donne instantanément :

   $$N(x) = 0. \tag{2}$$

   Pour tout x, la seule force non nulle exercée par l'extérieur à droite de la section d'abscisse x est F ; on en déduit donc

   $$M(x) = F(l - x), \tag{3}$$

et

$$T(x) = F. \tag{4}$$

Les réactions d'appui R_y et C sont égales aux opposés des efforts de la RDM en $x = 0$. De (3) et (4), on déduit donc

$$\boxed{C = -Fl}, \tag{5}$$

$$\boxed{R_y = -F.} \tag{6}$$

En ne prenant en compte que les effets dûs au moment fléchissant, la dérivée seconde de la flèche v vérifie :

$$v''(x) = \frac{M(x)}{EI} = \frac{F(l-x)}{EI}.$$

Par double intégration, on en déduit

$$v(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + Ax + B\right),$$

où A et B sont des constantes d'intégration. L'appui en A impose

$$v(0) = 0 \quad , v'(0) = 0,$$

ce qui fournit

$$v(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

On en déduit le déplacement vertical du point B :

$$\boxed{v_B = \frac{Fl^3}{3EI}.} \tag{7}$$

2. L'effort normal est nul dans la poutre ; on néglige les effets dus à l'effort normal et donc les déplacements longitudinaux dans la poutre sont nuls ; ainsi, le déplacement horizontal du point B est nul :

$$\boxed{u_B = 0.} \tag{8}$$

3. On note $\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)$, le repère orthonormé lié aux axes (X, Y).

   D'après les valeurs des réactions d'appuis (1), (5) et (6) et la nature des appuis A et B, on peut donc écrire que
   - la force exercée par l'extérieur sur A est égale à $-F\vec{Y}$;
   - le couple exercé par l'extérieur sur A est égale à $-Fl$;
   - la force exercée par l'extérieur sur B est égale à $F\vec{Y}$;
   - le couple exercé par l'extérieur sur B est égale à 0.

   Si on considère maintenant la structure de la figure 2 page suivante, encastrée en A, libre en B, et soumise à la force F en B, on peut vérifier que les valeurs des forces et des couples extérieurs agissant en A et en B sont égales à celles que l'on vient de donner.

   Les deux structures étant soumises aux mêmes forces extérieures, possèdent donc la même distributions des efforts de la RDM et sont donc équivalentes.

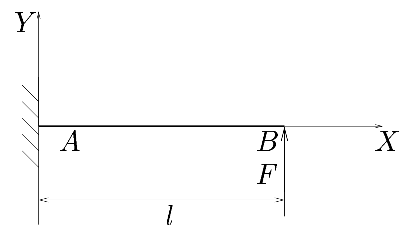

FIG. 2 – Une structure équivalente à celle de la figure 1.