

Corrigé de l'examen partiel du 15 mai 2003

Correction de l'exercice 1. On renvoie au polycopié de cours.

Correction de l'exercice 2.

1. Cette structure est plane, possède trois liaisons (un encastrement) et est donc isostatique.
2. Comme d'habitude, on oriente la poutre en s'éloignant de l'appui, c'est-à-dire de A vers C . On en déduit les axes locaux pour chaque travée, comme indiqué sur la figure 1.

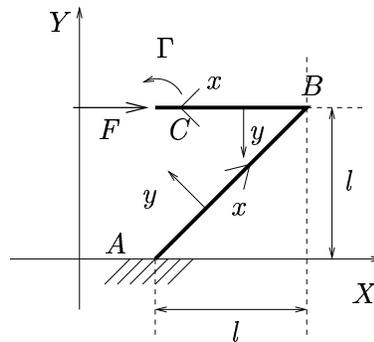


FIG. 1 – L'orientation de la structure étudiée

Après calculs, il vient (pour chaque travée, l'origine est prise à l'origine de cette travée) :

sur CB , ($0 \leq x \leq l$)	$N = -F,$ $T = 0,$ $M = \Gamma,$
sur AB , ($0 \leq x \leq \sqrt{2}l$)	$N = \frac{\sqrt{2}}{2}F,$ $T = -\frac{\sqrt{2}}{2}F,$ $M = \Gamma - F \left(l - \frac{\sqrt{2}}{2}x \right).$

3. Déterminons dans le repère global (X, Y, Z) les composantes (R_{AX}, R_{AY}), Γ_A des réactions d'appui.

Dans le repère local (x, y, Z) , on a

$$R_{Ax} = -N(x=0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}F,$$

$$R_{Ay} = -T(x=0) = \frac{\sqrt{2}}{2}F,$$

$$\Gamma_A = -M(x=0) = -\Gamma + Fl.$$

En revenant au repère global, on a donc

$$\begin{aligned} R_{AX} &= -F, \\ R_{AY} &= 0, \\ \Gamma_A &= -\Gamma + Fl. \end{aligned}$$

Remarque 1. On aurait pu aussi obtenir ces résultats en écrivant l'équilibre global de la structure.

Correction de l'exercice 3.

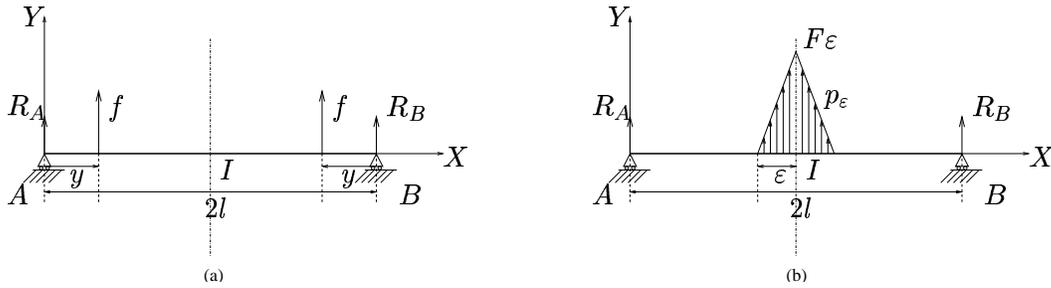


FIG. 2 – les chargements I (a) et II (b).

1. (a) Par symétrie et d'après l'équilibre de la structure, on montre que, pour la structure de la figure 2a,

$$R_A = R_B = -f.$$

On en déduit (en calculant le torseur des forces de gauche) que

$$\forall x \in [0, l - \varepsilon], \quad M_f^I(x) = \begin{cases} -fx & \text{si } x \in [0, y], \\ -fy & \text{si } x \in [y, l - \varepsilon]. \end{cases} \quad (1)$$

Par symétrie, on montre que, pour la structure de la figure 2b, $R_A = R_B$. La densité linéique de charge a une résultante égale à $F\varepsilon/\varepsilon = F$. On a donc $R_A = R_B = -F/2$. On en déduit en utilisant le torseur de force de gauche que

$$\forall x \in [0, l - \varepsilon], \quad M_\varepsilon^{II}(x) = -\frac{Fx}{2}. \quad (2)$$

- (b) En tout point d'abscisse $x \in [l - \varepsilon, l]$, les efforts de gauche se réduisent à $R_A = -F/2$ et à la densité linéique de charge $p_\varepsilon(z + l - \varepsilon)$ pour $z \in [0, x - l + \varepsilon]$, de moment élémentaire $(z + l - \varepsilon - x) \times p_\varepsilon(z + l - \varepsilon)dz$; par intégration, il vient donc

$$\boxed{\forall x \in [l - \varepsilon, l], \quad M_\varepsilon^{II}(x) = -\frac{Fx}{2} - \int_{z=0}^{z=x-l+\varepsilon} (z + l - \varepsilon - x)p_\varepsilon(z + l - \varepsilon)dz.} \quad (3)$$

- (c) La densité p_ε est affine entre $l - \varepsilon$ et l et vaut 0 et F/ε aux deux extrémités; ainsi,

$$\forall x \in [0, x - l + \varepsilon], \quad |p_\varepsilon(z + l - \varepsilon)| \leq \frac{F}{\varepsilon}.$$

On en déduit donc successivement, pour tout $x \in [l - \varepsilon, l]$,

$$\begin{aligned} \left| M_\varepsilon^{II}(x) + \frac{Fx}{2} \right| &= \left| \int_{z=0}^{z=x-l+\varepsilon} p_\varepsilon(z + l - \varepsilon)(z + l - \varepsilon - x)dz \right| ; \\ &\leq \int_{z=0}^{z=x-l+\varepsilon} |p_\varepsilon(z + l - \varepsilon)(z + l - \varepsilon - x)| dz ; \\ &\leq (x - l + \varepsilon) \times \frac{F}{\varepsilon} \times (x - l + \varepsilon) ; \\ &\leq \varepsilon F. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in [l - \varepsilon, l], \quad \left| M_\varepsilon^{II}(x) + \frac{Fx}{2} \right| \leq \varepsilon F. \quad (4)$$

et puisque

$$|M_\varepsilon^{II}(x)| \leq \left| M_\varepsilon^{II}(x) + \frac{Fx}{2} \right| + \left| -\frac{Fx}{2} \right| \leq \varepsilon F + \frac{Fl}{2},$$

en posant $C = Fl/2 + \varepsilon F$ (en supposant par exemple $\varepsilon \in]0, 1]$), on a donc

$$\boxed{\exists C \geq 0 : \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in [l - \varepsilon, l], \quad |M_\varepsilon^{II}(x)| \leq C.} \quad (5)$$

2. *Remarque 2.* Pour démontrer, de façon «intuitive» que

$$\boxed{v_\varepsilon(y) = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\partial W_{\varepsilon, f}}{\partial f},} \quad (6)$$

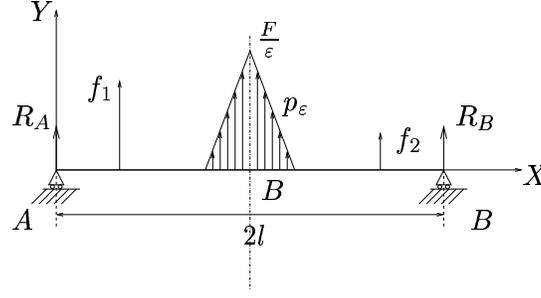
on peut dire que, par symétrie, l'énergie totale de déformation de la structure (à $f > 0$ fixé) est égale à $2W_{\varepsilon, f}$. Si on charge la structure avec deux forces fictives, induisant une distribution symétrique, il faut diviser le déplacement obtenu par deux.

On peut aussi démontrer ce résultat de façon plus rigoureuse. Notons, à $f_1, f_2 > 0$ fixés, l'énergie $W_{\varepsilon, f_1, f_2}$ correspond au chargement fictif de la figure 3, qui n'est pas nécessairement symétrique.

Notons que l'énergie de déformation à ($f > 0$ fixé) de la structure complète correspondant aux chargements superposés I et II (voir figure 2) est égale à $W_{\varepsilon, f, f}$.

D'après le théorème de la force fictive, on sait que la flèche cherchée est égale à

$$v_\varepsilon(y) = \lim_{f_1 \rightarrow 0} \frac{\partial W_{\varepsilon, f_1, f_2=0}}{\partial f_1}. \quad (7)$$

FIG. 3 – Chargement fictif (f_1, f_2) quelconque

Avec les notations de l'énoncé, il faut donc démontrer que

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{\partial W_{\varepsilon, f}}{\partial f} = \lim_{f_1 \rightarrow 0} \frac{\partial W_{\varepsilon, f_1, f_2=0}}{\partial f_1}. \quad (8)$$

Pour toute la suite, on supposera E et I uniformes et on négligera les effets dus aux efforts normal et tranchant dans la l'énergie de déformation (cela simplifiera la preuve, mais on peut s'en affranchir). Ainsi, on a, en notant $M_{\varepsilon, f_1, f_2}$ la distribution de moment dans la structure de la figure 3 :

$$\lim_{f_1 \rightarrow 0} \frac{\partial W_{\varepsilon, f_1, f_2=0}}{\partial f_1} = \frac{1}{EI} \int_0^{2l} M_{\varepsilon, 0, 0}(x) \left[\frac{\partial M_{\varepsilon, f_1, 0}(x)}{\partial f_1} \right]_{f_1=0} dx.$$

On découpe l'intégrale en deux et, dans la seconde intégrale, on pose $\tilde{x} = 2l - x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \lim_{f_1 \rightarrow 0} \frac{\partial W_{\varepsilon, f_1, f_2=0}}{\partial f_1}, \\ &= \frac{1}{EI} \left(\int_0^l M_{\varepsilon, 0, 0}(x) \left[\frac{\partial M_{\varepsilon, f_1, 0}(x)}{\partial f_1} \right]_{f_1=0} dx + \int_l^{2l} M_{\varepsilon, 0, 0}(x) \left[\frac{\partial M_{\varepsilon, f_1, 0}(x)}{\partial f_1} \right]_{f_1=0} dx \right), \\ &= \frac{1}{EI} \left(\int_0^l M_{\varepsilon, 0, 0}(x) \left[\frac{\partial M_{\varepsilon, f_1, 0}(x)}{\partial f_1} \right]_{f_1=0} dx \right. \\ & \quad \left. + \int_0^l M_{\varepsilon, 0, 0}(2l - x) \left[\frac{\partial M_{\varepsilon, f_1, 0}(2l - x)}{\partial f_1} \right]_{f_1=0} dx \right). \end{aligned}$$

Par symétrie, on a

$$M_{\varepsilon, 0, 0}(x) = M_{\varepsilon, 0, 0}(2l - x),$$

et

$$\left[\frac{\partial M_{\varepsilon, f_1, 0}(2l - x)}{\partial f_1} \right]_{f_1=0} = \left[\frac{\partial M_{\varepsilon, f, 0}(2l - x)}{\partial f} \right]_{f=0} = \left[\frac{\partial M_{\varepsilon, 0, f}(x)}{\partial f} \right]_{f=0}.$$

Ainsi, il vient

$$\lim_{f_1 \rightarrow 0} \frac{\partial W_{\varepsilon, f_1, f_2=0}}{\partial f_1} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_{\varepsilon, 0, 0}(x) \left(\left[\frac{\partial M_{\varepsilon, f, 0}(x)}{\partial f} \right]_{f=0} + \left[\frac{\partial M_{\varepsilon, 0, f}(x)}{\partial f} \right]_{f=0} \right) dx.$$

Par linéarité, on a

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f,0}(x)}{\partial f} \right]_{f=0} + \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,0,f}(x)}{\partial f} \right]_{f=0} &= \left[\frac{\partial}{\partial f} (M_{\varepsilon,f,0}(x) + M_{\varepsilon,0,f}(x)) \right]_{f=0}, \\ &= \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f,f}(x)}{\partial f} \right]_{f=0}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\lim_{f_1 \rightarrow 0} \frac{\partial W_{\varepsilon,f_1,f_2=0}}{\partial f_1} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_{\varepsilon,0,0}(x) \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f,f}(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx.$$

Par définition de $W_{\varepsilon,f}$, on a

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{\partial W_{\varepsilon,f}}{\partial f} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_{\varepsilon,0,0}(x) \left[\frac{\partial M_{\varepsilon,f,f}(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx,$$

ce qui montre l'équation (8).

(a) D'après le principe de linéarité externe, on décompose le chargement de structure en un chargement I (voir figure 2a) et un chargement II (voir figure 2b). Ainsi, on a

$$\forall x \in [0, l], \quad M_{\varepsilon,f}(x) = M_f^I(x) + M_\varepsilon^{II}(x). \quad (9)$$

Selon (6)

$$v_\varepsilon(y) = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{EI} \int_0^l M_{\varepsilon,f}(x) \frac{\partial M_{\varepsilon,f}(x)}{\partial f} dx,$$

il vient, selon (9),

$$v_\varepsilon(y) = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_{f=0}^I(x) + M_\varepsilon^{II}(x)) \left[\frac{\partial (M_f^I(x) + M_\varepsilon^{II}(x))}{\partial f} \right]_{f=0} dx,$$

Puisque M_f^I est nul si $f = 0$ et que M_ε^{II} ne dépend pas de f , on en déduit donc que

$$\boxed{v_\varepsilon(y) = \frac{1}{EI} \int_0^l M_\varepsilon^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx.} \quad (10)$$

(b) Soit y fixé dans $[0, l]$. On choisit ε assez petit tel que $y < l - \varepsilon$. Découpons l'intégrale de (10) en deux :

$$v_\varepsilon(y) = \frac{1}{EI} \left(\int_0^{l-\varepsilon} M_\varepsilon^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx + \int_{l-\varepsilon}^l M_\varepsilon^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx \right). \quad (11)$$

On définit¹ M_0^{II} par

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad M_0^{II}(x) = -\frac{Fx}{2}.} \quad (12)$$

¹ M_0^{II} est égal M_ε^{II} uniquement sur $[0, l - \varepsilon]$.

On a donc

$$v_\varepsilon(y) = \frac{1}{EI} \left(\int_0^{l-\varepsilon} M_0^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx + \int_{l-\varepsilon}^l M_\varepsilon^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx \right). \quad (13)$$

La fonction à intégrer dans la première intégrale de (13) est continue sur $[0, l]$ et ne dépend pas de ε ; on a donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{l-\varepsilon} M_0^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx = \int_0^l M_0^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx. \quad (14)$$

D'autre part, la fonction $x \mapsto \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0}$ est continue sur $[0, l]$: ainsi, il existe une constante K , indépendante de ε telle que

$$\left| \int_{l-\varepsilon}^l M_\varepsilon^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx \right| \leq K \int_{l-\varepsilon}^l |M_\varepsilon^{II}(x)| dx;$$

d'après (5), on en déduit que

$$\left| \int_{l-\varepsilon}^l M_\varepsilon^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx \right| \leq KC\varepsilon$$

et donc que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{l-\varepsilon}^l M_\varepsilon^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx = 0. \quad (15)$$

De (11), (14) et (15), on déduit donc

$$\boxed{\forall y \in [0, l[, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v_\varepsilon(y) = v_0(y),} \quad (16)$$

avec

$$\boxed{v_0(y) = \frac{1}{EI} \int_0^l M_0^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx,} \quad (17)$$

où M_0^{II} est défini par (12).

Remarque 3. On aurait pu expliciter $v_\varepsilon(y)$ et calculer la limite de l'expression obtenue quand ε tend vers 0; mais c'est lourd. Les majorations faites précédemment ne sont guère compliquées; de plus, sous la forme (17), on va pouvoir identifier la structure équivalente qui admet une telle flèche.

- (c) Remarquons que M_0^{II} (défini par (12)) correspond au moment fléchissant dans une structure où aucune densité de force n'est exercée sur $[0, l]$ et où les réactions d'appuis en A et B valent $-F/2$. La seule structure possible est donc une structure comme représentée sur la figure 4.

Le cas de chargement I étant identique quand ε tend vers zéro, on en déduit donc que le déplacement défini par (17) et (12) correspond à la flèche au point d'abscisse $y \in [0, l]$ pour la structure de la figure 4.

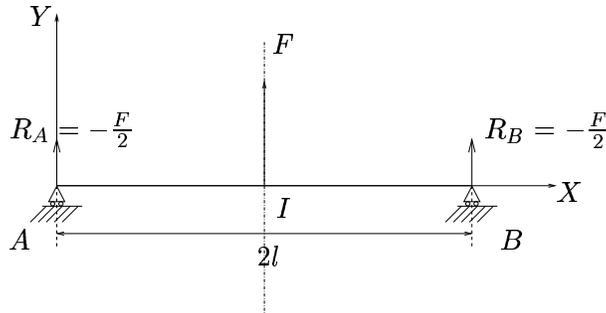


FIG. 4 – La structure équivalente recevant le moment M_0^{II}

Remarque 4. On vient donc de montrer que la densité linéique de force p_ε était équivalente, quand ε tend vers zéro, à une force ponctuelle, de norme F appliquée au point d'abscisse l .

(d) D'après (1), (12) et (17), on a, pour tout $y \in [0, l[$,

$$\begin{aligned}
 v_0(y) &= \frac{1}{EI} \int_0^l M_0^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx, \\
 &= \frac{1}{EI} \left(\int_0^y M_0^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx + \int_y^l M_0^{II}(x) \left[\frac{\partial M_f^I(x)}{\partial f} \right]_{f=0} dx \right), \\
 &= \frac{1}{EI} \left(\int_0^y -\frac{Fx}{2}(-x)dx + \int_y^l -\frac{Fx}{2}(-y)dx \right), \\
 &= \frac{F}{2EI} \left(\int_0^y x^2 dx + y \int_y^l x dx \right), \\
 &= \frac{F}{2EI} (-y^3 + 3yl^2).
 \end{aligned}$$

Par passage à la limite $y \rightarrow l$, ce résultat² est aussi valable pour $y = l$. On a donc

$$\boxed{\forall y \in [0, l], \quad v_0(y) = \frac{F}{12EI} (-y^3 + 3yl^2),} \quad (18)$$

Remarque 5. Dans le photocopié de cours, ce calcul est fait directement en intégrant l'équation différentielle $v'' = M/EI$

3. (a) Comme dans le cours, on considère un tronçon élémentaire de poutre compris entre les abscisses x et $x + dx$, soumis à aucune force ni aucun couple ponctuels. La partie à gauche de ce tronçon (correspondant à $z \leq x$) exerce les forces respectives (dans le repère (x, y)) $-N(x)$ et $-T(x)$; La partie à droite de ce tronçon (correspondant à $z \leq x + dx$) exerce les forces respectives (dans le repère (x, y)) $N(x + dx)$ et $T(x + dx)$; ce tronçon est soumis aux forces extérieures égale à 0 et $p(x)dx$. L'équilibre des forces de ce tronçon donne donc les

²en admettant que v_0 est continue.

deux équations

$$\begin{aligned} -T(x) + T(x + dx)dx + p(x)dx &= 0, \\ -N(x) + N(x + dx)dx &= 0 ; \end{aligned}$$

En ne retenant que les termes du premier ordre en dx et en écrivant :

$$\begin{aligned} T(x + dx) &= T(x) + \frac{dT(x)}{dx}dx, \\ N(x + dx) &= N(x) + \frac{dN(x)}{dx}dx \end{aligned}$$

on obtient après simplification :

$$\frac{dN(x)}{dx} = 0, \quad (19a)$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -p(x). \quad (19b)$$

De même, la nullité des moments fournit :

$$\frac{dM(x)}{dx} = -T(x). \quad (19c)$$

Remarque 6. Ces équations sont valables hors des points d'application des forces et des couples ponctuels. En fait, d'après le principe de Saint-Venant, elles sont valables «loin» de ces points. Cependant, on n'hésitera pas à les écrire à droite et à gauche des points d'application, qui introduiront certaines discontinuité.

- (b) Si on néglige les effets de l'effort tranchant, on a, en tout point d'abscisse x où ne sont exercés ni couple ni force ponctuels, en utilisant (19b) et (19c) :

$$v^{(4)}(x) = \frac{1}{EI} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} (M(x)) = \frac{1}{EI} \frac{d}{dx} (-T(x)) = \frac{p(x)}{EI}.$$

On a donc

$$\boxed{v^{(4)}(x) = \frac{1}{EI} p(x)}. \quad (20)$$

Remarque 7. Comme pour la remarque 6, on n'hésitera pas à écrire (20) à droite et à gauche des points d'application des forces et des couples ponctuels, qui introduiront certaines discontinuité.

4. Par symétrie, et pour toute la suite, on ne s'intéresse qu'à la partie gauche de la structure.

- (a) Puisqu'aucun effort normal n'est imposé, on a, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad N_\varepsilon(x) = 0.} \quad (21)$$

En dérivant l'équation (2), on a, selon (19c),

$$\boxed{\forall x \in [0, l - \varepsilon], \quad T_\varepsilon(x) = \frac{F}{2}.} \quad (22)$$

Sur l'intervalle $[l - \varepsilon, l]$, l'effort T_ε peut être déterminé en intégrant (19b). La constante d'intégration peut être déterminée grâce à $T(l) = 0$.

Les calculs complets (qui n'étaient pas exigés) donneraient :

$$\boxed{\forall x \in [l - \varepsilon, l], \quad T_\varepsilon(x) = -\frac{F}{2\varepsilon^2} (x^2 + 2(\varepsilon - l)x - 2\varepsilon l + l^2)}. \quad (23)$$

L'effort M_ε est connu sur $[0, l - \varepsilon]$: selon (2), on a donc :

$$\boxed{\forall x \in [0, l - \varepsilon], \quad M_\varepsilon(x) = -\frac{Fx}{2}}. \quad (24)$$

Sur l'intervalle $[l - \varepsilon, l]$, l'effort M_ε peut être déterminé en intégrant (19c). La constante d'intégration peut être déterminée grâce à la valeur $M_\varepsilon(l - \varepsilon)$ connue d'après (24) :

$$M_\varepsilon(l - \varepsilon) = -\frac{F(l - \varepsilon)}{2}.$$

Les calculs complets (qui n'étaient pas exigés) donneraient :

$$\boxed{\forall x \in [l - \varepsilon, l], \quad M_\varepsilon(x) = \frac{F}{6\varepsilon^2} (x^3 + 3(\varepsilon - l)x^2 + 3(l^2 - 2\varepsilon l)x - (l - \varepsilon)^3)}. \quad (25)$$

- (b) À $\varepsilon > 0$ fixé, on peut déterminer v_ε sur l'intervalle $[0, l - \varepsilon]$, en explicitant l'expression donnée par (11). Les calculs complets (qui n'étaient pas exigés) donneraient :

$$\boxed{\forall y \in [0, l - \varepsilon], \quad v_\varepsilon(y) = \frac{F}{12EI} (-y^3 + 3l^2y) + \frac{17Fy}{24EI} \varepsilon^2}. \quad (26)$$

Remarque 8. D'après (26), il est immédiat que

$$\forall y \in [0, l - \varepsilon], \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v_\varepsilon(y) = \frac{F}{12EI} (-y^3 + 3l^2y) = v_0(y).$$

Sur l'intervalle $[l - \varepsilon, l]$, on pourrait déterminer v_ε en utilisant de même l'expression (11) ; on découperait cette intégrale en trois termes : une intégrale sur $[0, l - \varepsilon]$, une intégrale sur $[l - \varepsilon, y]$ et une intégrale sur $[y, l]$.

Remarque 9. On pourrait montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon = v_0, \text{ uniformément sur } [0, 2l]. \quad (27)$$

- (c) Naturellement, les égalités (19) sont vérifiées pour p_ε , N_ε , $T_\varepsilon(y)$ et $M_\varepsilon(y)$.
(d) On en déduit que l'égalité (20) est vérifiée pour v_ε et p_ε puisqu'elle découle de (19).
(e) D'après (21), on a, à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad N_0(x) = 0}. \quad (28)$$

Remarque 10. Ici, naturellement, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_\varepsilon = N_0, \text{ uniformément sur } [0, 2l]. \quad (29)$$

D'après (22), on a pour tout $x \in [0, l]$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} T_\varepsilon(x) = \frac{F}{2}. \quad (30)$$

D'après (23), on a

$$T_\varepsilon(l) = 0. \quad (31)$$

Ainsi, selon (30) et (31), on a

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad T_0(x) = \begin{cases} \frac{F}{2}, & \text{si } x \in [0, l[, \\ 0, & \text{si } x = l. \end{cases}} \quad (32)$$

Remarque 11. Ici, la convergence de T_ε vers T_0 n'est pas uniforme sur l'intervalle $[0, l]$, puisque T_ε est continu alors que T_0 ne l'est pas. Nous avons seulement le résultat :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = T_0, \text{ simplement sur } [0, 2l]. \quad (33)$$

D'après (24), on a pour tout $x \in [0, l[$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_\varepsilon(x) = -\frac{Fx}{2}. \quad (34)$$

D'après (25), on a

$$M_\varepsilon(l) = -\frac{Fl}{2} + \frac{\varepsilon}{6},$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_\varepsilon(l) = -\frac{Fl}{2}. \quad (35)$$

Ainsi, selon (34) et (35), on a

$$\boxed{\forall x \in [0, l], \quad M_0(x) = -\frac{Fx}{2}.} \quad (36)$$

Remarque 12. Ici, on peut montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon = M_0, \text{ uniformément sur } [0, 2l]. \quad (37)$$

En effet, selon (4) et (24), on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in [0, l], \quad |M_\varepsilon(x) - M_0(x)| \leq \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, l - \varepsilon], \\ \varepsilon F, & \text{si } x \in [l - \varepsilon, l]. \end{cases}$$

On remarque que la structure correspondant à la flèche correspondant à $\varepsilon = 0$ (voir figure 4) admet N_0 , T_0 et M_0 comme efforts de la RDM.

On retrouve donc les résultats de la question 2c.

(f) D'après la définition de p_ε :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, l - \varepsilon], \quad p_\varepsilon(x) &= 0 ; \\ \forall x \in [l - \varepsilon, l], \quad p_\varepsilon(x) &= \frac{x - l + \varepsilon}{\varepsilon^2} F ; \end{aligned}$$

on a pour tout $x \in [0, l[$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} p_\varepsilon(x) = 0. \quad (38)$$

et

$$p_\varepsilon(l) = \frac{F}{\varepsilon}. \quad (39)$$

Ainsi, selon (38) et (39), on a

$$\boxed{\forall x \in [0, 2l], \quad p_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq l, \\ +\infty, & \text{si } x = l. \end{cases}} \quad (40)$$

On introduit la «fonction³ Dirac» définie formellement par

$$\boxed{\forall x \in [0, 2l], \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq l, \\ +\infty, & \text{si } x = l. \end{cases}} \quad (41)$$

On a donc

$$\boxed{\forall x \in [0, 2l], \quad p_0(x) = F\delta(x).} \quad (42)$$

On peut donc écrire formellement :

$$\boxed{\forall x \in [0, 2l], \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(x) = F\delta(x).} \quad (43)$$

Remarque 13. Puisque $\infty \times F = \infty$, on aurait pu poser $p_0(x) = \delta(x)$. Cependant, conformément à la conclusion de la question 2c, il faut que la résultante de la densité limite p_0 soit égale à la limite de la résultante p_ε quand ε tend vers zéro, c'est à dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2l} p_\varepsilon(z) dz = \int_0^{2l} p_0(z) dz.$$

Cela peut aussi s'écrire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F = \int_0^{2l} p_0(z) dz.$$

Compte tenu de (42), on a donc la condition de normalisation

$$\int_0^{2l} \delta(z) dz = 1. \quad (44)$$

Remarque 14. Si on récapitule, on est passé à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$: la structure de la figure 2 est «passée» à la limite vers celle de la figure 4. Plus précisément, nous avons (avec des convergence simple ou uniforme) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon = v_0, \quad (45a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon = p_0, \quad (45b)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = T_0, \quad (45c)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_\varepsilon = N_0, \quad (45d)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon = M_0. \quad (45e)$$

On retrouve donc mathématiquement le résultat signalé dans la remarque 4.

³Nous verrons pourquoi, cette fonction n'est pas une vraie fonction ; nous raisonnons maintenant formellement.

(g) Naturellement,

$$\boxed{\text{l'équation différentielle (19a) est vérifiée.}} \quad (46)$$

Puisque M_0 est symétrique par rapport au point d'abscisse l , on a donc, selon (36),

$$\forall x \in [0, 2l], \quad M_0(x) = \begin{cases} -\frac{Fx}{2}, & \text{si } x \leq l, \\ -\frac{F(2l-x)}{2}, & \text{si } x \geq l. \end{cases}$$

Ainsi, en, dérivant, on a

$$\forall x \in [0, 2l], \quad -\frac{dM_0(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{F}{2}, & \text{si } x < l, \\ -\frac{F}{2}, & \text{si } x > l. \end{cases}$$

Pour $x = l$, M_0 n'est pas dérivable, donc on ne peut rien écrire en ce point. On a vu que (par antisymétrie)

$$\forall x \in [0, 2l], \quad T_0(x) = \begin{cases} \frac{F}{2}, & \text{si } x < l, \\ 0, & \text{si } x = l, \\ -\frac{F}{2}, & \text{si } x > l. \end{cases} \quad (47)$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{l'équation différentielle (19c) est vraie, sauf en } x = l.} \quad (48)$$

De même, si on dérive (47), on a :

$$\forall x \in [0, 2l], \quad -\frac{dT_0(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{si } x < l, \\ 0, & \text{si } x > l. \end{cases} \quad (49)$$

En $x = l$, T_0 n'est pas continue, donc *a fortiori* non dérivable.

Néanmoins, grâce à (42), on constate que (19b) est vraie à condition de poser formellement

$$\frac{dH(0)}{dx} = \delta(0). \quad (50)$$

Nous sommes obligé de tenir compte de cette discontinuité : sinon, selon (49) et (19b), p serait identiquement nul et la poutre soumise à aucune force ! Ainsi, par définition de H , sa dérivée est nulle sur $[0, 2l] \setminus \{l\}$ et on a donc, grâce à (50),

$$\boxed{\forall x \in [0, 2l], \quad \frac{dH(x)}{dx} = \delta(x).} \quad (51)$$

Plus précisément, on introduit H , la fonction de Heaviside définie par

$$\forall x \in [0, 2l], \quad H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < l, \\ 1, & \text{si } x > l. \end{cases} \quad (52)$$

Sa valeur en $x = l$ n'importe pas.

Ainsi, selon (47), on a

$$\forall x \in [0, 2l], \quad T_0(x) = -FH(x) + \frac{F}{2}. \quad (53)$$

On ne s'occupe pas de ce qui se passe en $x = l$.

Formellement, selon (51), on a donc

$$\forall x \in [0, 2l], \quad -\frac{dT_0(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(-FH(x) + \frac{F}{2} \right) = F \frac{dH(x)}{dx} = F\delta(x).$$

Puisque p_0 est définie par (42),

$$\boxed{\text{l'équation différentielle (19b) est vraie sur tout } [0, 2l],} \quad (54)$$

à condition de considérer la règle de dérivation (51).

Compte tenu de cette règle de dérivation, on retiendra que l'on peut

- dériver toute fonction continue sur $[0, 2l]$ et dérivable par morceaux, à condition de «ne pas tenir compte de ce qu'il se passe aux points de non dérivabilité»,
- dériver toute fonction dérivable par morceaux, à condition de rajouter des Dirac, aux éventuels points de discontinuité.

Compte tenu de cela,

$$\boxed{\text{l'équation différentielle (19) est vérifiée en tout point de } [0, 2l].} \quad (55)$$

Pour vérifier l'équation différentielle (20), il suffit de vérifier que

$$v_0''(x) = \frac{1}{EI} M_0(x). \quad (56)$$

Compte tenu de (18) et de (36), on vérifiera que

$$\boxed{\text{l'équation différentielle (56) est vérifiée en tout point de } [0, 2l].} \quad (57)$$

- (h) (i) Pour calculer l'intégrale proposée, on utilise la définition de δ (que l'on a vue, ici comme «règle de dérivation» (51), nécessaire pour expliquer la présence de la force F) :

$$\int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = \int_0^{2l} \frac{dH(x)}{dx}u(x)dx,$$

et donc, formellement, par intégration par partie :

$$\int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = -\int_0^{2l} \frac{du(x)}{dx}H(x)dx + [uH]_{x=0}^{x=2l}.$$

Puisque $u(0) = u(2l) = 0$, on a

$$\int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = -\int_0^{2l} \frac{du(x)}{dx}H(x)dx.$$

On découpe cette intégrale en deux terme et puisque $H = 0$ sur $[0, l[$ et $H = 1$ sur $]l, 2l]$, il vient

$$\int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = -\int_l^{2l} \frac{du(x)}{dx}dx = -u(2l) + u(l) = u(l).$$

On a donc :

$$\boxed{\text{pour tout fonction } u, \text{ dérivable sur } [0, 2l], \text{ nulle en } 0 \text{ et en } 2l, \quad \int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = u(l).} \quad (58)$$

- (ii) Si δ était une fonction, puisqu'elle est nulle sur $[0, l[$ et sur $]l, 2l]$, on aurait pour tout fonction u , dérivable sur $[0, 2l]$, nulle en 0 et en $2l$,

$$u(l) = \int_0^{2l} \delta(x)u(x)dx = \int_0^l \delta(x)u(x)dx + \int_l^{2l} \delta(x)u(x)dx = 0 + 0,$$

ce qui est absurde ! De même, si u était une fonction, (44) serait absurde.

- (iii) Il faut prendre un peu de recul pour expliquer ce paradoxe.

On a vu qu'une force ponctuelle F était la limite d'une densité linéaire de force, nulle sur $[0, 2l]$ sauf en $x = l$, où elle est infinie.

Remarque 15. Ainsi, en poursuivant l'observation des remarques 4 et 14, on constate que les équations différentielles (19) et (20), vérifiées pour les fonctions v_ε , p_ε , M_ε , T_ε et N_ε , gardent un sens quand ε tend vers zéro et que la densité limite p_0 est définie grâce au Dirac δ , défini comme la dérivée de la fonction de Heaviside H . Ainsi, en englobant d'éventuelles forces ponctuelles dans la densité linéaire de charge p , les équations différentielles (19) et (20) demeurent vraie, même aux points d'application des forces ponctuelles⁴.

En fait, la limite (43) n'a pas de sens mathématique⁵ : l'objet δ n'est pas une fonction : c'est une application linéaire continue, qui a toute fonction u , assez régulière et nulle en 0 et $2l$ associe $u(l)$. On parle aussi parfois d'opérateur. Tous les calculs précédents n'ont pas de sens mathématique, en particulier (58), que l'on remplacera⁶ par

$$\text{pour tout fonction } u, \text{ dérivable sur } [0, 2l], \text{ nulle en } 0 \text{ et en } 2l, \quad \langle \delta, u \rangle = u(l), \quad (62)$$

où $\langle \delta, u \rangle$ est l'image de l'opérateur δ sur u .

Toutes les autres équations vue précédemment n'ont qu'un sens formel. Cependant, on peut en retenir qui ont un sens rigoureux : les fonctions p_ε , T_ε , N_ε , M_ε , tendent⁷ (quand ε tend vers zéro) respectivement vers $F\delta$ (qui n'est pas une fonction) T_0 , N_0 , M_0 (ces trois dernières sont des fonctions)

⁴D'après l'hypothèse de Saint-Venant, on ne peut étudier sur le plan mécanique ce qui se passe près de ces points, dans un cadre de RDM ; c'est sur le plan mathématique qu'on se donne le droit d'étudier le voisinage de ces points, et ce, grâce aux distributions

⁵Pour ceux qui connaissent les distributions, pour toute la suite, on pose $\Omega =]0, 2l[$; l'égalité (43) a lieu au sens des distributions :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon = F\delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (59)$$

⁶Pour ceux qui connaissent les distributions, on a donc

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \delta, u \rangle = u(l). \quad (60)$$

De façon plus générale, si y désigne un élément quelconque de Ω , on appelle le Dirac en y , la distribution définie par

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \delta_y, u \rangle = u(y). \quad (61)$$

⁷en fait, au sens des distributions.

L'équation (51) est vraie : on peut dériver une fonction non dérivable et obtenir un objet qui n'est plus une fonction⁸.

Grâce à cette notion de dérivée étendue, on peut conclure que les équations différentielles (19) et (56) sont vérifiées⁹

Il existe une méthode, dite la quadruple quadrature : on se donne p , une densité linéaire de charge connue. Pour calculer la flèche v , on intègre l'équation différentielle (20), en utilisant la fonction de Heaviside et l'opérateur Dirac (voir¹⁰ [2]).

Les distributions ont été inventées par Laurent Schwartz dans les années 1950, afin de donner un sens à des équations différentielles dont les solutions présentent des singularités. La théorie de ce grand mathématicien (médaille Fields) a permis de dériver des fonctions, qu'elles soient dérivables ou non (on pourra consulter le cours de MT41 ou [1, 3]).

Cependant, il faut garder à l'esprit que de telles forces ponctuelles (infinies) ne sont que des objets mathématiques, qui n'existent pas en réalité mais donnent des équations dont la résolution donnent des résultats qui approchent ceux observés de façon empirique.

Références

- [1] Roger Petit. *L'outil mathématique pour la physique*. Dunod, Paris, 1998. disponible à la bibliothèque de l'UTBM sous la cote QC20 PET.
- [2] Jean Roux. *Résistance des matériaux par la pratique. Tome 2, Méthodes énergétiques, poutres continues, systèmes réticulés, calcul des ossatures, méthodes matricielles*. Eyrolles, Paris, 1995. disponible à la bibliothèque de l'UTBM sous la cote TA405 ROU.
- [3] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966. disponible à la bibliothèque de l'UTBM sous la cote QA324 SCH.

⁸L'équation (51) peut se réécrire :

$$\frac{dH}{dx} = \delta, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (63)$$

et plus généralement, si on définit la fonction de Heaviside avec un saut en $y \in \Omega$ par

$$\forall x \in [0, 2l], \quad H_y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < y, \\ 1, & \text{si } x > y. \end{cases} \quad (64)$$

on a

$$\frac{dH_y}{dx} = \delta_y, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (65)$$

⁹au sens des distributions.

¹⁰Attention, l'auteur y a commis une coquille : page 368, il faut lire « $\delta(x - d) = +\infty$ si $x = d$ » à la place de « $\delta(x - d) = 1$ si $x = d$ ».