MQ41 Automne 2003

Corrigé de l'examen partiel du 8 Avril 2004

Les conventions adoptées sont celles du polycopié, ce qui n'interdit pas l'usage d'autres conventions..

1. (a) Dans la travée BC, les projections respectives de F sur x et y sont égales à $\sqrt{2}/2F$ et $\sqrt{2}/2F$; on a donc

$$\boxed{N_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}F,} \tag{1}$$

et

$$\boxed{T_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}F.} \tag{2}$$

Dans BC, on vérifie que la bras de levier de la force F est égal à $\sqrt{2}/2F(L-x)$; on a donc

$$\boxed{M_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}F(L-x).} \tag{3}$$

Dans la travée AB, les projections respectives de F sur x et y sont égales à $\sqrt{2}/2F$ et $-\sqrt{2}/2F$; on a donc

$$\boxed{N_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}F,} \tag{4}$$

et

$$\boxed{T_2(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}F.} \tag{5}$$

Pour calculer, M_2, le plus simple est d'intégrer (voir équation (11)) :

$$\forall x \in [0,l], \quad \frac{dM_2(x)}{dx} + T_2(x) = 0.$$

On a donc

$$M_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}Fx + C, \tag{6}$$

où C est une constante. Pour déterminer C, on écrit l'équation (1.21c) page 18 du chapitre 1 du polycopié de cours au point B où est appliquée un couple ponctuel Γ :

$$M_2(l+0) - M_2(l-0) = -\Gamma.$$

D'après (3), on a

$$M_2(l+0) = \frac{\sqrt{2}}{2}FL. \tag{7}$$

D'après (6), on a

$$M_2(l-0) = \frac{\sqrt{2}}{2}Fl + C. \tag{8}$$

D'après (7) et (8), on a donc

$$-\Gamma = M_2(l+0) - M_2(l-0) = \frac{\sqrt{2}}{2}F(L-l) - C,$$

et donc

$$\boxed{M_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}F(x+L-l) + \Gamma.} \tag{9}$$

(b) En prenant garde au fait que les repères (x,y) et (X,Y) ne coïncident pas, on a

$$X_A = -(-T_2(0)),$$

et donc

$$\boxed{X_A = -\frac{\sqrt{2}}{2}F.}$$

De même,

$$Y_A = -N_2(0),$$

et donc

$$\boxed{Y_A = -\frac{\sqrt{2}}{2}F.}$$

De même,

$$C_A = -M_2(0),$$

et donc

$$\boxed{C_A = -\frac{\sqrt{2}}{2}F(L-l) - \Gamma.}$$

2. (a) (i) On renvoie au polycopié de cours : voir équations (1.26) page 19. Dans le cas général (poutres quelconques), voir preuve en section B.2 page 148 (annexe B). Dans le cas de poutres droites, voir preuve pages 161 et 168 (annexe E). On a donc

$$\boxed{\forall x \in [0,L], \quad \frac{dT_1(x)}{dx} + p(x) = 0,} \tag{10}$$

et

$$\boxed{\forall x \in [0,L], \qquad \frac{dM_1(x)}{dx} + T(x) = 0.} \tag{11}$$

(ii) Par intégration de (10) entre y et L, il vient, grâce à $T_1(L) = F$:

$$\boxed{\forall y \in [0,L], \quad T_1(y) = F + \int_y^L p(x)dx.} \tag{12}$$

(iii) Par intégration de (11) entre 0 et L, il vient, grâce à $M_1(L) = 0$:

$$\boxed{M_1(0) = \int_0^L T(y)dy.} \tag{13}$$

De (12), on déduit donc que

$$\begin{aligned} M_1(0) &= \int_0^L \left(F + \int_y^L p(x)dx \right) dy, \\ &= LF + \int_0^L \int_y^L p(x)dxdy. \end{aligned}$$

On transforme l'intégrale double par une intégration par partie : on pose

$$\phi(y) = \int_y^L p(x)dx.$$

Puisque

$$\phi'(y) = -p(y),$$

il vient

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_y^L p(x)dxdy &= \int_0^L \phi(y)dy, \\ &= -\int_0^L y\phi'(y)dy + [y\phi(y)]_{y=0}^{y=L}, \\ &= \int_0^L yp(y)dy. \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{M_1(0) = LF + \int_0^L yp(y)dy.} \tag{14}$$

Remarque 1. On aura reconnu dans $yp(y)dy$ le moment élémentaire dû à l'action de p sur la portion de poutre infinitésimale d'abscisse comprise entre y et $y + dy$. On aurait donc aussi pu faire le calcul grâce à cette remarque.

(iv) Puisqu'aucun effort normal n'est appliqué, on a

$$\boxed{\forall x \in [0,L], \quad N_1(x) = 0.} \tag{15}$$

(b) L'équilibre de la travée en projection sur X fournit

$$N_1(0) + T_2(0) = 0,$$

et donc

$$\boxed{T_2(0) = -N_1(0).} \tag{16a}$$

De même, en Y, on obtient

$$\boxed{N_2(0) = T_1(0).} \tag{16b}$$

La nullité des moments par rapport à B donne enfin :

$$\boxed{M_2(0) = M_1(0) - N_1(0)l.} \tag{16c}$$

(c) De (12), (14), (15) et (16), on déduit que

$$\boxed{X_A = 0,} \tag{17}$$

$$\boxed{Y_A = -F - \int_0^L p(x)dx,} \tag{18}$$

et

$$\boxed{C_A = -LF - \int_0^L yp(y)dy.} \tag{19}$$