TD10 – Fonctions numériques d'une variable réelle : dérivée II

Exercice 1

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x)\right| \leq \frac{x^4}{24}.$$

En déduire une valeur approchée de $\sin(1/6)$. Quelle est l'erreur commise par cette approximation ?

Exercice 2

Soit un entier n supérieur ou égal à deux. On considère la fonction g_n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^n & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}$.
2) Jusqu'à quel ordre, la fonction f_n est elle dérivable ?
3) Tracer les courbes représentatives des fonctions f_2, f_3 et f_4.

Exercice 3

Tracer le tableau de variation de la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x - x^2 - x.$$

On pourra être amené à dériver plusieurs fois g.

Exercice 4

Montrer que la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x - \sin x)(\pi - x - \sin x),$$

est strictement croissante sur $]0, \pi/2[$.
On montrera que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = (\pi - 4\sin x)\sin x.$$

Exercice 5

Tracer le tableau de variation et le graphe de la fonction ϕ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \frac{\sqrt{x+1}(x-2)}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

En déduire un encadrement des zéros de ϕ.

Exercice 6 – Facultatif

Soient $a > 0$, $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$. Montrer que

$$\exists c \in]0, a[, \quad f'(c) = 0.$$

Exercice 7 – Facultatif

Soit f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

dont on a représenté le graphe sur la figure 1.

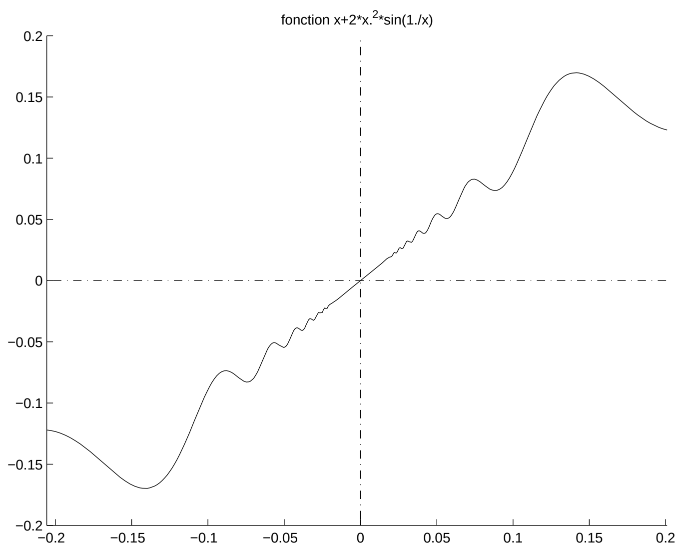

FIGURE 1. La fonction f.

1) Comment prolonger f par continuité en zéro ?
2) Montrer que f dérivable en zéro et calculer sa dérivée en zéro.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = 1/(n\pi)$. Montrer que f n'est croissante sur aucun intervalle contenant x_{2n+1}.
4) En déduire que f n'est croissante sur aucun intervalle contenant zéro. Peut affirmer que f n'est décroissante sur aucun intervalle contenant zéro.