

**TD11 – Fonctions numériques d’une variable réelle : fonctions usuelles****Exercice 1**

Étudier les fonctions suivantes, définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , après en avoir transformé et simplifié les expressions :

$$\text{a) } f(x) = \text{Arcos} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} , \quad \text{b) } f(x) = \text{Arsin} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} ,$$

$$\text{c) } f(x) = \text{Arsin} \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} , \quad \text{d) } f(x) = \text{Arcos} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} .$$

**Exercice 2**

Résoudre les équations d’inconnue  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{a) } a \text{ch} x + b \text{sh} x = 0, \quad a, b \in \mathbb{R} ,$$

$$\text{b) } \sqrt{\text{ch} x} + \sqrt{\text{sh} x} = m, \quad m \in \mathbb{R} .$$

**Exercice 3**

Soient deux réels  $a$  et  $b$  et un entier naturel  $n$ . On pose

$$C_n = \sum_{k=0}^n \text{ch}(a + kb) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n \text{sh}(a + kb) .$$

1) Calculer les deux sommes suivantes

$$P_n = \sum_{k=0}^n e^{a+kb} \text{ et } M_n = \sum_{k=0}^n e^{-(a+kb)} .$$

2) Calculer  $C_n + S_n$  et  $C_n - S_n$  et en déduire les deux expressions de  $C_n$  et  $S_n$ .

**Exercice 4**

Résoudre l’équation  $5\text{ch} x - 4\text{sh} x = 3$ .

**Exercice 5**

Dériver la fonction

$$x \rightarrow \frac{2 \sin x \text{sh} x}{(\sin x + \text{sh} x)^2} .$$

**Exercice 6 – Facultatif**

Calculer les sommes suivantes :

$$\text{a) } \sum_{p=0}^n p \operatorname{ch}(a + pb) , \quad \text{b) } \sum_{p=0}^n p \operatorname{sh}(a + pb) ,$$

$$\text{c) } \sum_{p=0}^n \operatorname{ch}^2(a + pb) , \quad \text{d) } \sum_{p=0}^n \operatorname{sh}^2(a + pb).$$

**Exercice 7 – Facultatif**

Montrer que  $\mathbb{R}$  muni de la loi de composition  $*$  définie par

$$x * y = x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2},$$

est un groupe.