

TD12 – Fonctions numériques d’une variable réelle : développements limités**Exercice 1**

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \sin x) \cotan 2x, & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3}, \\ \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 1/2} (2x^2 - 3x + 1) \tan \pi x, & \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} \end{array}$$

Exercice 2

Former les développements limités à l’ordre et au voisinage indiqués des fonctions suivantes :

$$\text{a)} \quad \text{ordre 4, voisinage de } 0, f(x) = \ln\left(\frac{\text{sh } x}{x}\right),$$

$$\text{b)} \quad 3, 0, \ln(\ln(e + x)),$$

$$\text{c)} \quad 4, 0, \frac{x}{e^x - 1},$$

$$\text{d)} \quad 7, 0, e^{\cos x},$$

$$\text{e)} \quad 3, 2, x^x.$$

Exercice 3

Donner un équivalent en zéro de la fonction $f(x) = \sin(\text{sh } x) - \text{sh}(\sin x)$.

Exercice 4

Étudier la fonction (variations, asymptotes à l’infini) f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x \left| 1 + \frac{1}{x} \right|^{x+1}.$$

On montrera que, au voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$),

$$f(x) = ex + \frac{e}{2} - \frac{e}{24x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

et on conclura sur la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

Exercice 5 – Facultatif

Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x}{1 + \cos 4x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^{\sin x}}{x^3},$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}$$