

TD7 – Fonctions numériques d’une variable réelle : limite**Exercice 1**

Soient A et B deux parties de \mathbb{R} . Montrer que, si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Exercice 2

Étudier la limite de $x^2 \sin(1/x)$ quand x tend vers zéro.

Exercice 3

1) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\max(x, y) &= \frac{1}{2}(x + y + |x - y|), \\ \min(x, y) &= \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).\end{aligned}$$

2) Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions de $]a, b[$ dans \mathbb{R} admettant des limites finies l et l' en $x_0 \in]a, b[$. Montrer que $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ définies par

$$\begin{aligned}\forall x \in]a, b[, \quad \max(f, g)(x) &= \max(f(x), g(x)), \\ \min(f, g)(x) &= \min(f(x), g(x)),\end{aligned}$$

admettent des limites finies en x_0 et les calculer.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} xE\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right) + x}{E\left(\frac{1}{x}\right) - x}, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1,$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} - \sqrt{x}.$$