

TD8 – Fonctions numériques d’une variable réelle : continuité**Exercice 1**

Étudier, en tout point, la continuité des applications suivantes

$$\text{a) } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = E(x) + (x - E(x))^2,$$

$$\text{b) } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \sqrt{x - E(x)},$$

$$\text{c) } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)},$$

$$\text{d) } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{|x - 3| - x + 1}{|x - 1| + x - 3}.$$

Pour d), on étudiera un éventuel prolongement par continuité de f sur \mathbb{R} .

Exercice 2

Soient f et g deux fonction lipschitziennes sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- 1) Montrer que si f et g sont bornées sur I , alors fg est lipschitzienne sur I .
- 2) Montrer qu’il en est pas nécessairement de même si l’on ne suppose plus f et g bornées.

Exercice 3

On cherche une racine éventuelle du polynôme $P = X^3 + X - 20$, par la méthode de dichotomie.

- 1) Combien ce polynôme a-t-il de zéros sur \mathbb{R} ? Proposer un encadrement de cette racine à un près.
- 2) Si on utilise la méthode de dichotomie, combien faut-il d’itérations pour calculer ce zéro avec une erreur inférieure à 10^{-2} ?
- 3) Déterminer un encadrement de cette racine à 10^{-2} près.

Exercice 4

Soit f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ continue. Montrer qu’il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 5

Soit f une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Montrer que la fonction f admet un minimum sur \mathbb{R} .

Exercice 6

1) On considère la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{Q} définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de \mathbb{R} . On utilisera le fait que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} et que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} , c'est-à-dire,

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = x$,

pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'irrationnels tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = x$.

2) On considère la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) \times x + 1.$$

Montrer que f est discontinue sur \mathbb{R}^* et continue en zéro.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pourriez vous construire une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie sur tout \mathbb{R} , qui soit ne soit continue qu'en n points distincts de \mathbb{R} exactement et discontinue en dehors de ces points ?