TD9 – Fonctions numériques d'une variable réelle : dérivée I

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, b) $f(x) = \tan\left(2x^2\right)$,

c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, d) $f(x) = \cos^3(x)\sin^2(x)$,

e) $f(x) = x^2(1+x)^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et étudier la continuité et la dérivabilité, ainsi que la dérivabilité de l'éventuel prolongement par continuité.

a) $f(x) = |x-1|$, b) $f(x) = |x-1|^3$,

c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, d) $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$,

e) $f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, f) $f(x) = \dfrac{|x|^5}{x}$.

Exercice 3

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

a) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(x^3+2x-7\right)e^x \end{array}$ b) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x\cos(x) \end{array}$

Exercice 4

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+bh) - f(x_0-ah)}{(b+a)h} = f'(x_0).$$

Exercice 5 – Facultatif

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/2}}.$$

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = \left(1+X^2\right) P_n' - (2n+1)XP_n.$$

Exercice 6 – Facultatif

On rappelle la définition de la fonction caractéristique $\mathbf{1}_\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{1}_\mathbb{Q}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2\, \mathbf{1}_\mathbb{Q}(x).$$

Montrer que g est dérivable en zéro seulement.