

Examen médian du 9 novembre 2000

Durée : deux heures

Aucun document - Calculatrice interdite.

On rédigera les quatre exercices sur quatre feuilles différentes.

Exercice 1 (3 points)

Soient n un entier naturel et α et β deux réels.

1) Calculer la somme

$$t_n = \sum_{k=0}^n C_n^k e^{(\alpha+k\beta)i}.$$

2) En déduire les deux sommes

$$c_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(\alpha + k\beta) \text{ et } s_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(\alpha + k\beta).$$

Exercice 2 (6 points)

On appelle inversion l'application

$$\begin{cases} f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \\ z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}. \end{cases}$$

Si M est un point quelconque du plan complexe, d'affixe $z \neq 0$, on notera M' le point d'affixe $z' = f(z)$.

On notera A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 .

1) Montrer que M' appartient à la demi-droite $[OM)$.

2) Montrer que, si le point M n'appartient pas à l'axe réel,

$$\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B} \right) = \pi - \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right).$$

3) En déduire, si le point M n'appartient pas à l'axe réel, une construction géométrique du point M' , image de M par inversion.

Exercice 3 (5 points)

On rappelle qu'une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $X^p = 0$. On dit qu'une matrice X est unipotente si et seulement si la matrice $I - X$ est nilpotente. Soit N une matrice nilpotente et U une matrice unipotente de $M_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer que l'on peut définir deux matrices, notées $\exp(N)$ et $\ln(U)$ par

$$\begin{aligned}\exp(N) &= I + \frac{1}{1!}N + \frac{1}{2!}N^2 + \dots + \frac{1}{k!}N^k + \dots, \\ \ln(U) &= -(I - U) - \frac{1}{2}(I - U)^2 - \dots - \frac{1}{k}(I - U)^k - \dots\end{aligned}$$

2) Soit, pour $a, b, c \in \mathbb{C}$,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que N est nilpotente et que $\ln(\exp(N)) = N$.

3) Pour $t \in \mathbb{C}$, on pose

$$U(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + 2t^2 & 3t + \frac{17}{2}t^2 + 4t^3 \\ 0 & 1 & 4t & 5t + 12t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $U(t) = \exp(tN)$, où N est une matrice nilpotente que l'on calculera.

Exercice 4 (7 points)

On définit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ par la donnée de $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1) Calculer P_2 , P_3 et P_4 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$P_n \left(z + \frac{1}{z} \right) = z^n + \frac{1}{z^n}.$$

3) En déduire une expression simple de $P_n(2 \cos \theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

4) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, le réel $\alpha_k = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right)$ est racine de P_n .

5) Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, quelle est l'ordre de multiplicité de la racine α_k ? En déduire la décomposition en produit de polynômes irréductibles de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.